Съюз на математиците в България

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ

Доклади на Петдесет и четвъртата пролетна
конференция на Съюза на математиците в България
Варна, 31 март – 4 април 2025 г.



Union of Bulgarian Mathematicians

MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS

Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

Докладите се издават със съдействието на
Института по математика и информатика при БАН

ПЕТДЕСЕТ И ЧЕТВЪРТА ПРОЛЕТНА КОНФЕРЕНЦИЯ НА СЪЮЗА НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

Варна, 31 март – 4 април 2025 г.

Програмен комитет:

Председател:
проф. д-р Станислав Харизанов (ИИКТ–БАН)

Секретари:
гл. ас. д-р Христо Сариев (ИМИ–БАН)
доц. д-р Милен Борисов (ИМИ–БАН)
доц. д-р Бориславa Кирилова (ФМИ–СУ)

Членове:
акад. Петър Кендеров (ИМИ–БАН)
акад. Олег Мушкаров (ИМИ–БАН)
чл.-кор. Петър Бойваленков (ИМИ–БАН)
чл.-кор. Николай Николов (ИМИ–БАН)
проф. д-р Емануил Атанасов (ИИКТ–БАН)
проф. д-р Азнив Каспарян (ФМИ–СУ)
проф. д-р Мая Стоянова (ФМИ–СУ)
проф. д-р Румен Янков (ИМех–БАН)
доц. д-р Красимира Иванова (ИМИ–БАН)
доц. д-р Филип Петров (ФМИ–СУ)
гл. ас. д-р Севдалина Георгиева (ТУ, Варна)

Технически секретар:
Албена Василева (ИМИ–БАН)

Организационен комитет:

Председател:
Павлин Петков (СМБ Варна)

Членове:
доц. д-р Елена Колева (ТУ, Варна)
гл. ас. д-р Севдалина Георгиева (ТУ, Варна)
Таня Петрова (ОУ „П. Р. Славейков“, Варна)
Цветелина Пеева (МГ „Д-р П. Берон“, Варна)
Искра Неделчева (ОУ „Отец Паисий“, Варна)
Елена Ангелова (Първа ЕГ, Варна)
Елеонора Павлова (МГ „Д-р П. Берон“, Варна)
д-р Ирена Радева (РУО Варна)
Антоанета Хинева (Община Варна)
Албена Василева (ИМИ–БАН)
Иванка Стоянова (ИМИ–БАН)

Редакционна колегия на поредицата:

Главен редактор:
акад. Петър Кендеров

акад. Олег Мушкаров
чл.-кор. Петър Бойваленков
чл.-кор. Николай Николов
проф. дмн Иван Ланджев
Албена Василева – секретар

Гост-редактори на тома:
гл. ас. д-р Христо Сариев
доц. д-р Милен Борисов
Албена Василева

Предпечатна подготовка:
Албена Василева

Печат:
ЧСУ „Питагор“, София

© Съюз на математиците в България, 2025

Формат: 1000 × 700/16	Дадена за печат на 20.03.2025 г.
Печатни коли 15	Подписана за печат на 21.03.2025 г.
Тираж 170	**ISSN 1313-3330** (Print), **2815-4002** (Online)

FIFTY-FOURTH SPRING CONFERENCE
OF THE UNION OF BULGARIAN MATHEMATICIANS

Varna, March 31 – April 4, 2025

Program committee:

Chair:
Prof. Stanislav Harizanov, Ph.D. (IICT–BAS)

Secretaries:
Chief Assist. Prof. Hristo Sariev, Ph.D. (IMI–BAS)
Assoc. Prof. Milen Borisov, Ph.D. (IMI–BAS)
Assoc. Prof. Borislava Kirilova, Ph.D. (Sofia University)

Members:
Acad. Petar Kenderov (IMI–BAS)
Acad. Oleg Mushkarov, (IMI–BAS)
Prof. Peter Boyvalenkov, D.Sc., Corr. Member of the Bulg. Acad. Sci. (IMI–BAS)
Prof. Nikolai Nikolov, D.Sc., Corr. Member of the Bulg. Acad. Sci. (IMI–BAS)
Prof. Emanouil Atanassov, Ph.D. (IICT–BAS)
Prof. Azniv Kasparian, Ph.D. (Sofia University)
Prof. Maya Stoyanova, Ph.D. (Sofia University)
Prof. Ivan Landjev, D.Sc. (NBU, IMI–BAS)
Prof. Rumen Yankov, Ph.D. (IMech–BAS)
Assoc. Prof. Krasimira Ivanova, Ph.D. (IMI–BAS)
Assoc. Prof. Philip Petrov, Ph.D. (Sofia University)
Chief Assist. Prof. Sevdalina Georgieva, Ph.D. (Technical University, Varna)

Technical secretary:
Albena Vassileva (IMI–BAS)

Organizing committee:

Chair:
Pavlin Petkov (UBM Varna)

Members:
Assoc. Prof. Elena Koleva, Ph.D. (Technical University, Varna)
Chief Assist. Prof. Sevdalina Georgieva, Ph.D. (Technical University, Varna)
Tania Petrova (Slaveykov Primary School, Varna)
Tsvetelina Peeva (High School of Mathematics, Varna)
Iskra Nedelcheva (Otets Paisiy Primary School, Varna)
Elena Angelova (First Foreign Language School, Varna)
Eleonora Pavlova (High School of Mathematics, Varna)
Irena Radeva, Ph.D. (Regional Department of Education, Varna)
Antoaneta Hineva (Varna Municipality)
Albena Vassileva (IMI–BAS)
Ivanka Stoyanova (IMI–BAS)

Editorial board of the series:

Editor-in-chief:
Acad. Petar Kenderov

Acad. Oleg Mushkarov
Prof. Nikolai Nikolov, D.Sc., Corr. Member of the Bulg. Acad. Sci.
Prof. Peter Boyvalenkov, D.Sc. Corr. Member of the Bulg. Acad. Sci.
Prof. Ivan Landjev, D.Sc.
Albena Vassileva – secretary

Guest editors of the volume:
Chief Assist. Prof. Hristo Sariev, Ph.D. (IMI–BAS)
Assoc. Prof. Milen Borisov, Ph.D. (IMI–BAS)
Albena Vassileva (IMI–BAS)

Layout editor:
Albena Vassileva

Print:
Pythagoras Private High School, Sofia

© Union of Bulgarian Mathematicians, 2025

П Р Е Д Г О В О Р

Уважаеми колеги,

Съюзът на математиците в България събира във Варна от 31 март до 4 април на своята 54-а Пролетна конференция учени от Българската академия на науките, университетски преподаватели, учители и изявени ученици – математици и информатици от цялата страна.

В рамките на научната програма на конференцията, а също и в неформална обстановка, математиците и информатиците ще могат да обменят опит, да обогатят своите познания, както и да обсъдят актуалните за динамичното ни съвремие проблеми в науката и образованието и подходите за тяхното решаване.

Три от докладите тази година ще бъдат посветени на видни български учени, преподаватели и просветители. Главен асистент Константин Делчев ще акцентира върху основни факти от биографията на доц. Евгения Сендова по повод 80-ата ѝ годишнина, които ще представи като доклад на тема „Жени Сендова – математическа сюита с продължение“. Академик Петър Кендеров и доц. Евгения Сендова ще почетат паметта на професор Райчо Лазаров (1943 – 2024) – един от пионерите на българската изчислителна математика и един от основателите на българската школа в областта на вариационните числени методи за решаване на диференциални уравнения. Те ще изнесат доклад на тема „Райчо Лазаров – математик, вдъхновител на следващи поколения математици, Човек“. Във връзка с 80 години от рождението на професор Керопе Чакърян – специалист на световно ниво и един от пионерите в България в теорията на крайните прости групи, проф. Азнив Каспарян и гл. ас. Константин Табаков ще представят доклад на тема „In Memoriam: Керопе Чакърян (1944 – 2012)“.

Традиционно на конференцията ще бъдат представени три доклада по покана, по един във всяка от трите научни секции. Проф. дмн Михаил Кръстанов от Института по математика и информатика към Българска академия на науките, заедно с чл.-кор. дн Надежда Рибарска от Факултета по математика и информатика на Софийския университет (ФМИ–СУ), ще изнесат доклад на тема „Множители на Лагранж в динамичната оптимизация“ в секция А. В секция Б проф. д-р Петя Копринкова-Христова от Института по информационни и комуникационни технологии към Българска академия на науките ще представи „Вдъхновени от мозъка модели и техни приложения“, а в секция В „Мястото на математическото образование в световната наука“ ще разгледа проф. Кирил Банков от ФМИ–СУ. По време на 54. Пролетна конференция на СМБ ще бъдат докладвани деветнадесет научни съобщения, от които три са в секция А, пет в секция Б и единадесет в секция В.

Ще се проведе дискусия на тема „В търсене на отговори и решения: Необходими ли са ни успешни хора в България и каква е ролята на математическата грамотност за това?“ с модератори чл.-кор. Николай Николов, председател на СМБ, и Павлин Петков, председател на секция СМБ Варна, член на Секцията на директорите на МГ, ПМГ и ППМГ. Освен това ще се проведат два обучителни семинара за учители.

Първият от тях е на тема „Развиване на STEM компетентности с математика в електронна среда“ с лектори доц. д-р Елена Колева и гл. ас. д-р Севдалина Георгиева от Технически университет – Варна, а вторият семинар с лектори Елеонора Павлова, Димитрина Докимова и Антон Атанасов от МГ „Д-р Петър Берон“ – Варна ще се фокусира върху „Интегриране на математика и пространствени информационни системи (ГИС)“. Домакините от СМБ Варна предлагат за участниците в конференцията и две посещения: „Интерактивна сесия: Киберсигурност и космически технологии“ във Висше военноморско училище „Никола Йонков Вапцаров“, Варна, и представяне на „Лаборатория по инженерна роботика и 3D принтиране“ към Професионалната гимназия по компютърно моделиране и компютърни системи „Акад. Благовест Сендов“, Варна.

С традиционната си Ученическа секция на конференцията, своят четвъртвековен юбилей ще отбележи Ученическият институт по математика и информатика. Ученици от цялата страна ще представят изследователските си проекти по математика, информатика и информационни технологии, а компетентно жури от учени и преподаватели ще оцени усилията им. Ученическата секция е прелюдия към Лятната изследователска школа на УчИМИ и най-добре представилите се ученици на Ученическата сесия ще получат покана за участие в нея.

По време на конференцията, основни български издателства ще представят част от учебните си материали в традиционното изложение на математическа литература.

Накрая, но не на последно място, изказвам своята огромна благодарност към чл.-кор. Николай Николов, председател на СМБ, за безценната подкрепа, към членовете на Програмния комитет за усилията и стремежа заедно да запазим традициите и духа на Пролетната конференция на Съюза на математиците в България, към Организационния комитет от секцията на СМБ във Варна за отлично свършената работа. Специални благодарности отправям към тримата секретари на научните секции – гл. ас. д-р Христо Сариев, доц. д-р Милен Борисов и гл. ас. д-р Бориславa Виденова, и към техническия секретар Албена Василева за всеотдайността, с която координираше научните съобщения, поканите, кореспонденцията с авторите и голяма част от организацията на научната програма. Сърдечни благодарности към секретарите и за редакторската им дейност, както и за цялостната предпечатна подготовка и техническото оформление на сборника, който държите в ръцете си. Признателни сме и за подкрепата за отпечатването на тома от ЧСУ "Питагор“ – София.

Пожелавам дните на всички участници в Петдесет и четвъртата пролетна конференция на СМБ да са интересни в научен план, ползотворни и творчески вдъхновяващи за нови научни успехи!

София 19.03.2025 г.

проф. д-р Станислав Харизанов
Председател на Програмния комитет
на 54. Пролетна конференция на СМБ

ДОКЛАДИ ПО ПОКАНА

INVITED TALKS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

LAGRANGE MULTIPLIERS IN DYNAMIC OPTIMIZATION

Mikhail I. Krastanov[1], **Nadezhda K. Ribarska**[2]

[1] Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria
[2] Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University "St. Kliment Ohridski", Sofia, Bulgaria
e-mails: [1]krast@math.bas.bg, [2]ribarska@fmi.uni-sofia.bg

An approach for studying optimization problems in abstract setting is presented and a general Lagrange multiplier rule is formulated. It is described how to apply this result to the basic problem of calculus of variations with pure state constraints of equality-type, as well as to a Mayer optimal control problem with pure state constraints.
Keywords: infinite-dimensional problems, approximating cone, nonseparation of sets, Lagrange multiplier rule, Pontryagin maximum principle

МНОЖИТЕЛИ НА ЛАГРАНЖ В ДИНАМИЧНАТА ОПТИМИЗАЦИЯ

Михаил И. Кръстанов[1], **Надежда К. Рибарска**[2]

[1] Институт по математика и информатика, Българска академия на науките, София, България
[2] Факултет по математика и информатика, Софийски университет „Св. Климент Охридски“, София, България
e-mails: [1]krast@math.bas.bg, [2]ribarska@fmi.uni-sofia.bg

Представен е подход за изследване на оптимизационните задачи в абстрактна постановка и е формулирано общо правило от тип на множители на Лагранж. Описано е как да се приложи този резултат към основната задача на вариационното смятане с чисти фазови ограничения от тип равенство, както и към задача на Майер за оптимално управление с чисти фазови ограничения.

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.009-017

* The study is financed by the Sofia University St. Kliment Ohridski under contracts No. 80-10-8/29.03.2024 and No. 80-10-138/17.04.2024.

2020 Mathematics Subject Classification: 49K27, 49K15, 46N10.

Ключови думи: безкрайномерни задачи, апроксимиращ конус, неразделяне на множества, принцип на Лагранж, принцип на максимума на Понтрягин

1. Introduction. We consider the following basic problem of calculus of variations

$$\int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))dt \to \min,$$

under the pure state constraint

$$x(t) \in \Phi \text{ for all } t \in [a, b],$$

where Φ is a closed subset of $\boldsymbol{R}^n$. Moreover, the following terminal constraints are imposed: $x(a) = x_a$ and $x(b) = x_b$, where x_a and x_b are two fixed points of Φ.

It is well-known that the necessary optimality condition for this problem without state constraints and with smooth integrand is given by the classical Euler-Lagrange equation. Finding nontrivial necessary optimality conditions in the presence of state constraints is important and there is a huge amount of papers devoted to this problem. The theory of state-constrained optimal control problems (containing the considered problem) originates from the seminal monograph [19] and the papers of Gamkrelidze (see [11, 12]). These results concern inequality-type constraints as well as equality-type constraints. Usually, subsequent developments in this theory deal with inequality-type constraints. Some important results in this direction can be found in the works of Dubovitskii and Milyutin [10], Neustadt [18], Warga [23], and others. Necessary nonsmooth optimality conditions of Pontryagin maximum principle type for state constrained problems were proved by Warga [24], Vinter and Pappas [22], Clarke [6], and Ioffe [13]. The books of Vinter [21]) and Clarke [7] contain most of the achievements to date. To our knowledge, the most recent developments can be found in Ioffe's papers [14, 15].

Our approach is based on systematic application of the methods of functional analysis and of non-smooth analysis, considering the problems of calculus of variations and of optimal control as constrained optimization problems in infinite-dimensional spaces. As early as 1965, Dubovickiĭ and Miljutin [10] applied a functional analysis based approach. These ideas are further developed by Aubin and Frankowska [1] in much more general situations. They realized the importance of set-valued mappings for obtaining necessary conditions for nonlinear problems in optimization, in particular in dynamic optimization. These ideas have proven their effectiveness over the years.

To formulate the problem written above as an optimization problem on an infinite-dimensional space, we consider

$$\varphi(x, y) \to \min \quad \text{subject to} \quad (x, y) \in \tilde{S} \cap (H \times Y),$$

where

$$\varphi(x, y) := \int_a^b L(x(t), y(t))dt,$$

$$\tilde{S} := \left\{ (x, y) \in X \times Y : \ x(t) := x_a + \int_a^t y(\tau)d\tau, \ x(b) = x_b \right\},$$

$$H := \{x \in X : \ x(t) \in \Phi\}, \text{ with } \Phi \text{ a closed subset of } \boldsymbol{R}^n,$$

$$x \in X := L^\infty([a, b]; \boldsymbol{R}^n) \text{ and } y \in Y := L^1([a, b]; \boldsymbol{R}^n).$$

So, the original problem is reduced to an optimization problem in infinite-dimensional state space. This problem has specific features which will be taken into account.

The survey is organized as follows: in the next section, we present a general approach to optimization problems in infinite-dimensional state space. In Section 3, a Lagrange multiplier rule based on uniform approximations is applied to the basic problem of calculus of variations with pure state constraints of equality-type. The last section is devoted to an application of our approach to a Mayer optimal control problem with pure state constraints. The main assumption is a variational condition involving a measure of noncompactness.

2. A general approach to optimization problems in infinite-dimensional state space. The term subtransversality is introduced in [9] in relation to proving linear convergence of the alternating projections algorithm. However, this property has been around for more than 20 years but under different names, see [17, Remark 4] and references therein. It is a key assumption for two types of results: linear convergence of sequences generated by projection algorithms, and a qualification condition for the normal intersection property with respect to the limiting normal cones and a sum rule for the limiting subdifferentials. The precise definition is:

Definition 2.1. *Let A and B be closed subsets of the Banach space X. Then A and B are said to be subtransversal at $x_0 \in A \cap B$ if there exist $\delta > 0$ and $K > 0$ such that*

$$d(x, A \cap B) \leq K(d(x, A) + d(x, B)),$$

for all $x \in x_0 + \delta\bar{\mathbf{B}}$.

From our point of view, the most remarkable thing about subtransversality is the fact that it implies a rather general nonseparation result and respective Lagrange multiplier rule. The following result is taken from [2].

Theorem 2.2 (**Lagrange multiplier rule**). *Let us consider the optimization problem,*

$$f(x) \to \min \quad \text{subject to} \quad x \in S,$$

where $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is lower semicontinuous and proper, and S is a closed subset of the Banach space X. Let $\bar{x}$ be a solution of the above problem, and $\tilde{C}_{\mathrm{epi}f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$ and $C_S(\bar{x})$ be closed convex cones contained in the corresponding Bouligand approximating cones $T_{\mathrm{epi}f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$ and $T_S(\bar{x})$. We assume that at least one of them consists of derivable tangent vectors.

(a) If $\tilde{C}_{\mathrm{epi}f}(\bar{x}, f(\bar{x})) - C_S(\bar{x}) \times (-\infty, 0]$ is not dense in $X \times \mathbb{R}$, then there exists a pair $(\xi, \eta) \in X^* \times \mathbb{R}$ such that

(i) $(\xi, \eta) \neq (\mathbf{0}, 0)$;
(ii) $\eta \in \{0, 1\}$;
(iii) $\langle \xi, v \rangle \leq 0$, for every $v \in C_S(\bar{x})$;
(iv) $\langle \xi, w \rangle + \eta s \geq 0$, for every $(w, s) \in \tilde{C}_{\mathrm{epi}f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

(b) If $\tilde{C}_{\mathrm{epi}f}(\bar{x}, f(\bar{x})) - C_S(\bar{x}) \times (-\infty, 0]$ is dense in $X \times \mathbb{R}$, then $\operatorname{epi} f$ and $S \times (-\infty, f(\bar{x})]$ are not subtransversal at $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

According to the above theorem, in order to construct a Lagrange multiplier, it is sufficient to prove that under certain conditions the case (b) is impossible. Two sufficient conditions for subtransversality in specific situations will be presented below.

3. A Lagrange multiplier rule based on uniform approximations. The following definition is taken from [16].

Definition 3.1. *Let S be a closed subset of X, and x_0 belong to S. We say that the bounded set D is* ***a uniform tangent set*** *to S at the point x_0 if for every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that, for all $v \in D$ and $x \in S \cap (x_0 + \delta\overline{\mathbf{B}})$, one can find $\lambda > 0$ such that $S \cap (x + t(v + \varepsilon\overline{\mathbf{B}}))$ is non empty for every $t \in [0, \lambda]$.*

The next theorem is the main result from [4].

Theorem 3.2. *Let S be a closed subset of X, and x_0 belong to S. The following are equivalent:*

1. *D is a uniform tangent set to S at the point x_0;*
2. *for every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that, for all $v \in D$ and $x \in S \cap (x_0 + \delta\overline{\mathbf{B}})$, one can find a sequence of positive reals $t_m \to 0$ such that $S \cap (x + t_m(v + \varepsilon\overline{\mathbf{B}}))$ is nonempty for every positive integer m;*
3. *for every $\varepsilon > 0$, there exist $\delta > 0$ and $\lambda > 0$ such that, for all $v \in D$ and $x \in S \cap (x_0 + \delta\overline{\mathbf{B}})$, the set $S \cap (x + t(v + \varepsilon\overline{\mathbf{B}}))$ is nonempty for every $t \in [0, \lambda]$.*

The basic properties of uniform tangent sets are gathered in the next proposition.

Proposition 3.3. *Let S be a closed subset of X, and $x_0 \in S$. Let D be a uniform tangent set to S at the point x_0. Then the following hold true:*

1. *if $c > 0$ is fixed, then $c\,D$ is a uniform tangent set to S at x_0;*
2. *if $D' \subset D$, then D' is a uniform tangent set to S at x_0;*
3. *if D' is another uniform tangent set to S at x_0, then $D \cup D'$ is a uniform tangent set to S at x_0;*
4. *the closure of D is a uniform tangent set to S at x_0;*
5. *$\overline{co}\,D$ is a uniform tangent set to S at x_0;*
6. *if S is convex, then $(S - x_0) \cap M\overline{\mathbf{B}}$ is a uniform tangent set to S at x_0, for every $M > 0$.*

We are going to use the original definition of the Clarke tangent cone in Banach spaces (see, e.g., [20]).

Definition 3.4. *Let S be a closed subset of X, and x_0 belong to S. We say that $v \in X$ is* ***a tangent vector*** *to S at the point x_0 if for every $\varepsilon > 0$, there exist $\delta > 0$ and $\lambda > 0$ such that, for all $x \in S \cap (x_0 + \delta\overline{\mathbf{B}})$, the set $S \cap (x + t(v + \varepsilon\overline{\mathbf{B}}))$ is non empty for every $t \in [0, \lambda]$. The set of all tangent vectors to S at x_0 is called* ***Clarke tangent cone*** *and is denoted by $\widehat{T}_S(x_0)$.*

Theorem 3.2 implies that every uniform tangent set to S at x_0 is contained in $\widehat{T}_S(x_0)$, provided S is a closed subset of a Banach space.

Definition 3.5. *Let Z be a Banach space, and $S \subset Z$. The set S is said to be quasisolid if its closed convex hull $\overline{co}\,S$ has a nonempty interior in its closed affine hull, i.e. if there exists a point $z_0 \in co\,S$ such that $\overline{co}\,(S - z_0)$ has a nonempty interior in $\overline{span}(S - z_0)$, the closed subspace spanned by $(S - z_0)$.*

The following Lagrange multiplier rule is proved in [4]. This assertion can be obtained as a corollary of Theorem 2.2 by taking into account Propositions 3.4 and 3.16 from [3].

Theorem 3.6. *Let us consider the optimization problem,*

$$f(x) \to \min \quad \text{subject to} \quad x \in S,$$

where X is a Banach space, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is a proper lower semicontinuous function, and S is a closed subset of X. Let $\bar{x}$ be a solution of this problem, D_S a uniform tangent set to S at the point $\bar{x}$, and $D_{\mathrm{epi}f}$ a uniform tangent set to epi f *at $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. We assume that the set $D_S \times [-1, 0] - D_{\mathrm{epi}f}$ is quasisolid. Then there exists a*

pair $(\xi,\eta)\in X^*\times \boldsymbol{R}$ *such that*

i/ $(\xi,\eta)\neq(\mathbf{0},0)$*;*

ii/ $\eta\in\{0,1\}$*;*

iii/ $\langle\xi,v\rangle\leq 0$*, for every* $v\in D_S$*;*

iv/ $\langle\xi,w\rangle+\eta r\geq 0$*, for every* $(w,r)\in D_{\mathrm{epi}f}$*.*

To apply this theorem, we consider the following basic problem of calculus of variations,

$$\int_a^b L(x(t),\dot{x}(t))dt\to\min,$$

under the pure state constraints

$$x(t)\in\Phi \text{ for all } t\in[a,b],$$

where Φ is a closed subset of $\boldsymbol{R}^n$, L is Lipschitz continuous with constant Q, and x is absolutely continuous with $\dot{x}\in L^1([a,b];\boldsymbol{R}^n)$. Moreover, the following terminal constraints are imposed: $x(a)=x_a$ and $x(b)=x_b$, where x_a and x_b are two fixed points of Φ.

Let us recall that

$$H:=\big\{x\in L^\infty([a,b];\boldsymbol{R}^n):\ x(t)\in\Phi\big\}.$$

We formulate a necessary optimality condition under the following assumptions:

Assumption A1. For every compact set K of the set Φ, there exists an open neighborhood Ω of the set K, an open convex neighborhood ω of the origin in $\boldsymbol{R}^n$, and a continuously differentiable map $\psi:U\to\boldsymbol{R}^n$, where $U:=\{(x,w):w\in\omega,x\in\Omega\}$, such that the following properties hold true:

i/ $\psi(x,0)=x$, for every $x\in\Omega$;

ii/ $\psi'(x,0)(0,w)=w$, for every $x\in\Omega$ and $w\in\omega$;

iii/ whenever $x\in\Omega\cap\Phi$ and $w\in\hat{T}_\Phi(x)\cap\omega$, the point $\psi(x,w)$ is in Φ.

Assumption A2. Let $D_H(\bar{x})$ be a uniform tangent set to H at $\bar{x}$. For every $\varepsilon>0$, there exists $\delta>0$ such that, for all $(\bar{u},\bar{v})\in S\cap(D_H(\bar{x})\times\bar{\mathbf{B}}_Y)$ and $(x,y)\in((\bar{x},\bar{y})+\delta\bar{\mathbf{B}}_{X\times Y})\cap B$, there exists $(u,v)\in((\bar{u},\bar{v})+\varepsilon\bar{\mathbf{B}}_{X\times Y})\cap S\cap(\hat{T}_H(x)\times Y)$.

Theorem 3.7. *Let* $(\bar{x},\dot{\bar{x}})$ *be a local (in* $L^\infty([a,b];\boldsymbol{R}^n)\times L^1([a,b];\boldsymbol{R}^n)$*) solution of the above written problem, and* $D_H(\bar{x})$ *a uniform tangent set to* H *at the point* $\bar{x}$*. Let Assumptions A1 and A2 be fulfilled. Then there exists* $(\xi,\eta)\in L^1([a,b],\boldsymbol{R}^n)\times L^\infty([a,b],\boldsymbol{R}^n)$ *such that* $(\xi(t),\eta(t))\in\partial L(x(t),y(t))$ *and*

$$\frac{d}{dt}\langle\eta(t),u(t)\rangle\geq\langle\xi(t),u(t)\rangle+\langle\eta(t),\dot{u}(t)\rangle,$$

for every absolutely continuous $u\in D_H(\bar{x})$*, almost everywhere in* $[a,b]$*.*

As a corollary of this result, we obtain in the following assertions.

Corollary 3.8. *Let* $(\bar{x},\dot{\bar{x}})$ *be a local (in* $L^\infty([a,b];\boldsymbol{R}^n)\times L^1([a,b];\boldsymbol{R}^n)$*) solution of the above written problem, and* $D_H(\bar{x})$ *a uniform tangent set to* H *at the point* $\bar{x}$ *which is symmetric, i.e.* $D_H(\bar{x})=-D_H(\bar{x})$*. Let Assumptions A1 and A2 be fulfilled. Then there exists* $(\xi,\eta)\in L^1([a,b],\boldsymbol{R}^n)\times L^\infty([a,b],\boldsymbol{R}^n)$ *such that* $(\xi(t),\eta(t))\in\partial L(x(t),y(t))$ *and, for every absolutely continuous* $u\in D_H(\bar{x})$*, the function* $\langle\eta,u\rangle$ *is absolutely continuous and, for almost all* $t\in[a,b]$*, we have*

$$\frac{d}{dt}\langle\eta(t),u(t)\rangle=\langle\xi(t),u(t)\rangle+\langle\eta(t),\dot{u}(t)\rangle.$$

Corollary 3.9. *Let* Φ *be a* C^2*-smooth manifold, and* $(\bar{x},\dot{\bar{x}})$ *a local (in* $L^\infty([a,b];\boldsymbol{R}^n)\times$

$L^1([a,b];\boldsymbol{R}^n)$) *solution of the above written problem. Then there exists a pair* $(\xi,\eta)\in L^1([a,b],\boldsymbol{R}^n)\times L^\infty([a,b],\boldsymbol{R}^n)$ *such that* $(\xi(t),\eta(t))\in\partial L(x(t),y(t))$ *and the tangent component* η_τ *of* η *is differentiable for almost all* $t\in[a,b]$*. Moreover,*

$$\big(\xi(t)-\dot\eta_\tau(t),\eta(t)-\eta_\tau(t)\big)$$

is orthogonal to the tangent space $T_{(\bar x(t),\dot{\bar x}(t))}T\Phi$ *to the tangent bundle* $T\Phi$ *at the point* $(\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$ *almost everywhere.*

4. A Lagrange multiplier rule based on a variational condition. The starting point for the next definition is the classical idea of "perturbation" and subsequent "correction" of the epigraph of the considered functional, introduced by J.M. Borwein and H.M. Strojwas in [5].

Definition 4.1. *Let* X *and* Y *be Banach spaces, and* $\varphi: X\times Y\to R\cup\{+\infty\}$ *a proper lower semicontinuous function which has finite value at* $(\bar x,\bar y)\in X\times Y$*. It is said that* φ *satisfies the* ***variational condition*** *at* $(\bar x,\bar y,\varphi(\bar x,\bar y))$ *with correcting set* $U\subset X\times Y\times\boldsymbol{R}$ *if there exists a positive real* $\bar\delta>0$ *such that, for every* $\lambda\in[0,\bar\delta]$*, the following inclusion holds true:*

$$\operatorname{epi}\varphi\cap\big((\bar x,\bar y,\varphi(\bar x,\bar y))+\bar\delta\cdot\bar B_{X\times Y\times R}\big)+\lambda\big(\bar B_X,0,0\big)\subset\operatorname{epi}\varphi+\lambda U.$$

Of course, this condition could be trivial if there were no restrictions put on the "correcting set". The following definition is well-known (see, e.g., [8, 7.3]).

Definition 4.2. *Let* X *be a normed space, and* A *a bounded subset of* X*. The nonnegative real*

$$\mu(A):=\inf\left\{r>0:\text{ there exist finitely many balls } B_i \text{ of radius } r \text{ with } A\subset\bigcup_{i=1}^k B_i\right\}$$

is called the ***ball measure of noncompactness*** *of the set* A*.*

Let X and Y be Banach spaces, $\varphi: X\times Y\to\boldsymbol{R}\cup\{+\infty\}$ a lower semicontinuous function, and $L: Y\to X$ a bounded linear operator whose graph is given by

$$S:=\big\{(Ly,y)\in X\times Y:\ y\in Y\big\}.$$

Theorem 4.3. *Let* φ *satisfy the variational condition, where the "correcting set"* $U\subset X\times Y\times\boldsymbol{R}$*, having the form* $U=(U_X,U_Y,U_R)$*, is bounded and such that*

$$\mu\left(U_X-L(U_Y)\right)<1,$$

where μ *denotes the ball measure of noncompactness (in* X*). Moreover, we assume that the cone* $\hat T_{\operatorname{epi}\varphi}(\bar x,\bar y,\varphi(\bar x,\bar y))-S\times(-\infty,0]$ *is dense in* $X\times Y\times\boldsymbol{R}$*. Then the sets* $\operatorname{epi}\varphi$ *and* $(S+(\bar x,\bar y))\times(-\infty,\varphi(\bar x,\bar y)]$ *are tangentially transversal at* $(\bar x,\bar y,\varphi(\bar x,\bar y))$*.*

Consider the optimization problem,

$$\text{(OP)}\qquad \varphi(x,y)\to\min\quad\text{ subject to }\quad(x,y)\in\widetilde S:=(x_0,y_0)+S.$$

Theorem 4.4 (Noncompactness theorem). *In the above setting, let* $(\bar x,\bar y)$ *be a solution of* (OP)*, and the functional* φ *have finite value at* $(\bar x,\bar y)$ *and satisfy the variational condition with a correcting set* U*, having the form* $U=(U_X,U_Y,U_R)$*. Let* U *be bounded and* $\mu(U_X-L(U_Y))<1$*, where* μ *denotes the ball measure of noncompactness (in* X*). Then there exists a triple* $(\xi,\mu,\zeta)\in X^*\times Y^*\times\mathbb{R}$ *such that*

(i) $(\xi,\mu,\zeta)\neq(\mathbf{0},\mathbf{0},0)$*;*

(ii) $\zeta\in\{0,1\}$*;*

(iii) $\langle\xi,u\rangle+\langle\mu,v\rangle=0$*, for every* $(u,v)\in S$*;*

(iv) $\langle\xi,u\rangle+\langle\mu,v\rangle+\zeta w\geq0$*, for every* $(u,v,w)\in\widehat T_{\operatorname{epi}\varphi}(\bar x,\bar y,\varphi((\bar x,\bar y))$*.*

To prove the above theorem, it is sufficient to apply Theorem 2.2 with the Banach space being $X \times Y$, the functional being φ, and the constraint being $S+(x_0, y_0)$. Moreover, let the approximating cone to the epigraph $\operatorname{epi}\varphi$ at $(\bar{x}, \bar{y}, \varphi((\bar{x}, \bar{y}))$ be the corresponding Clarke tangent cone, $\widehat{T}_{\operatorname{epi}\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \varphi((\bar{x}, \bar{y}))$. Note that the Clarke (and Bouligand) tangent cone to the constraint is S. Then Theorem 2.2 is applicable and case (b) is impossible due to Theorem 4.3. The equality in Theorem 4.4(iii) is due to the fact that S is a linear space.

Let us make things less abstract. We are going to apply the Noncompactness theorem to the Banach spaces $X := L^\infty([a,b]; \boldsymbol{R}^n)$ (equipped with the usual essential supremum norm) and $Y := L^1([a,b]; \boldsymbol{R}^n)$ (equipped with the usual L^1-norm), and to the integration operator $L : Y \to X$ defined by

$$(Ly)(t) = \int_a^t y(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Proposition 4.5. *The linear operator $L : Y \to X$ is bounded of norm one. Moreover, if $U \subset Y$ is a weakly compact set, then $L(U)$ is totally bounded.*

As an immediate implication of the above proposition, we obtain a sufficient condition for a correcting set U which has the form $U = U_X \times U_Y \times U_R$, where $U_X \subset X$, $U_Y \subset Y$, $U_R \subset \boldsymbol{R}$ satisfy $\mu(U_X - L(U_Y)) < 1$. The sufficient condition is $U_X \subset M_X + r_X \bar{B}_X$ and $U_Y \subset M_Y + r_Y \bar{B}_Y$, where $M_X \subset X$ is norm compact, $M_Y \subset Y$ is weakly compact, and $r_X + r_Y < 1$. Indeed, then we have

$$\begin{aligned}\mu(U_X - L(U_Y)) &\le \mu(M_X + r_X \bar{B}_X) + \mu\big(L(M_Y) + r_Y L(\bar{B}_Y)\big) \\ &\le \mu(M_X) + r_X + \mu(L(M_Y)) + r_Y \mu\big(L(\bar{B}_Y)\big) \le r_X + r_Y < 1.\end{aligned}$$

Let us consider a process whose dynamics is determined by the following differential inclusion

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ almost everywhere on } [a,b],\ x(a) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

where the multivalued map $F : \boldsymbol{R}^n \rightrightarrows \boldsymbol{R}^n$ has nonempty compact values and is integrally Lipschitz continuous, that is, there exists a summable nonnegative function k on $[a,b]$ with

$$F(t, x') \subset F(t, x) + k(t)\|x' - x\|\mathbb{B}, \quad \text{for each } x', x \text{ from } \mathbb{R}^n,$$

and for almost all $t \in [a,b]$. Then the set of solutions of this differential inclusion starting from the origin can be represented as $S \cap G$, where

$$G := \big\{(x,y) \in X \times Y : (x(t), y(t)) \in \operatorname{gr} F \text{ almost everywhere on } [a,b]\big\}.$$

Let H be a closed subset of X. For example, if Φ is a fixed closed subset of $\boldsymbol{R}^n$, then one can define the set H as

$$H := \{x \in X :\ x(t) \in \Phi \text{ for almost all } t \in [a,b]\}.$$

Let $l : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ be a Lipschitz continuous function, and δ_b a norm one extension to X of the Dirac functional on the space of continuous functions, i.e. $\delta_b(x) = x(b)$ for every $x \in C([a,b], \boldsymbol{R}^n)$. Next, we define $\varphi : X \to \boldsymbol{R}$ as $\varphi(x) := l(\delta_b(x))$, and consider the optimization problem,

$$l(\delta_b(x)) \to \min,$$

under the pure state constraints

$$x(t) \in \Phi \text{ for all } t \in [a,b],$$

where x is a solution of the differential inclusion (1). Using the notations written above,

this problem can be stated as follows,

(OCP) $\qquad \varphi(x) \to \min \quad$ subject to $\quad (x,y) \in G \cap (H \times Y) \cap S.$

We set

$$\psi(x,y) := \begin{cases} \varphi(x), & \text{if } (x,y) \in (H \times Y) \cap G; \\ \infty, & \text{if } (x,y) \notin (H \times Y) \cap G. \end{cases}$$

Theorem 4.6. *In the above setting, let $(\bar{x},\bar{y})$ be a solution to* (OCP)*, H be massive at $\bar{x}$, and the Clarke tangent cone $\widehat{T}_H(\bar{x})$ be finite codimentional. Then there exists a triple $(\xi,\eta,\zeta) \in X^* \times Y^* \times \mathbb{R}$ such that*

(i) $(\xi,\eta,\zeta) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0},0)$*;*

(ii) $\zeta \in \{0,1\}$*;*

(iii) $\langle \xi, u\rangle + \langle \eta, v\rangle = 0$*, for every* $(u,v) \in S$*;*

(iv) $\langle \xi, u\rangle + \langle \eta, v\rangle + \zeta w \geq 0$*, for every* $(u,v,w) \in \widehat{T}_{\mathrm{epi}\psi}(\bar{x},\dot{\bar{x}},\varphi(\bar{x}))$*.*

To apply the above written theorem, we consider two possible cases:

1. Nondegenerate case: If $\hat{T}_G(\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \hat{T}_H(\bar{x}) \times Y$ is dense in $X \times Y$, then (because H and $\hat{T}_H(\bar{x})$ are massive) we obtain subtransversality of the sets G and $(H \times Y)$ at $(\bar{x},\dot{\bar{x}})$, and of their tangent cones at the same point. Hence, $\hat{N}_G(\bar{x},\dot{\bar{x}}) + \hat{N}_H(\bar{x}) \times Y \supset \hat{N}_{G\cap(H\times Y)}(\bar{x},\dot{\bar{x}})$. Using the above inclusion, one can obtain that

$$(\xi,\eta,\zeta) = (\xi_G,\eta,0) + (\xi_H,0,0) + (\langle \lambda, \delta_b\rangle, 0, \zeta),$$

where (ξ_G,η) is normal to G at $(\bar{x},\dot{\bar{x}})$, ξ_H is normal to H at $\bar{x}$, and (λ,ζ) is normal to $\mathrm{epi}\, l$ at $\delta_b(\bar{x})$. Since (ξ,η) is normal to S, one can obtain from here the usual form of the Euler inclusion and of the transversality condition in the Pontryagin maximum principle.

2. Degenerate case: If $\hat{T}_G(\bar{x},\dot{\bar{x}}) - \hat{T}_H(\bar{x}) \times Y$ is not dense in $X \times Y$, then there exists a nontrivial functional μ in X^* such that $(\mu,0)$ separates $\hat{T}_G(\bar{x},\dot{\bar{x}})$ and $\hat{T}_H(\bar{x}) \times Y$. Thus, $(\mu,0)$ is normal to G at $(\bar{x},\dot{\bar{x}})$, and $-\mu$ is normal to H at the point $\bar{x}$.

It is natural to ask when the above situation occurs. At least for pointwise constraint $H = \{x \in X : x(t) \in \Phi \text{ for almost all } t \in [a,b]\}$ and for autonomous differential inclusion, the answer is straightforward: the degenerate phenomenon takes place exactly when the following finite dimensional condition holds true,

$$\mathrm{int}\,(\hat{T}_H(\bar{x})) \cap \{u \in X : \exists v \in Y, (u,v) \in \hat{T}_G(\bar{x},\dot{\bar{x}})\} \neq \emptyset.$$

References

[1] J.-P. Aubin, H. Frankowska. Set-Valued Analysis. Birkhauser, Boston, 1990.

[2] M. Bivas, M. Krastanov, N. Ribarska. On tangential transversality. *J. Math. Anal. Appl.*, **481** (2020), article no. 123445.

[3] M. Bivas, M. Krastanov, N. Ribarska. On strong tangential transversality. *J. Math. Anal. Appl.*, **490** (2020), article no. 124235.

[4] M. Bivas, N. Ribarska, M. Valkov. Properties of uniform tangent sets and Lagrange multiplier rule. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **71** (2018), 875–884.

[5] J.M. Borwein, H.M. Strojwas. Tangential approximations. *Nonlinear Anal.*, **9** (1985), 1347–1366.

[6] F. Clarke. Optimization and Nonsmooth Analysis. SIAM, Philadelphia, 1990.

[7] F. Clarke. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. Springer, London, 2013.

[8] K. Deimling. Multivalued Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[9] D. Drusvyatskiy, A.D. Ioffe, A.S. Lewis. Transversality and alternating projections for nonconvex sets. *Found. Comput. Math.*, **15** (2015), 1637–1651.
[10] A.Y. Dubovitskii, A.A. Milyutin. Extremum problems in the presence of restrictions. *Comput. Math. Math. Phys.*, **5** (1965), 1–80.
[11] R.V. Gamkrelidze. Optimum-rate processes with bounded phase coordinates. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **125** (1959), 475–478.
[12] R.V. Gamkrelidze. Optimal control processes under bounded phase coordinates. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **24** (1960), 315–356.
[13] A.D. Ioffe. Necessary conditions in nonsmooth optimization. *Math. Oper. Res.*, **9** (1984), 159–189.
[14] A.D. Ioffe. On generalized Bolza problem and its application to dynamicoptimization. *J. Optim. Theory Appl.*, **182** (2019), 285–309.
[15] A.D. Ioffe. On necessary conditions in the generalized Bolza problem. *Serdica Math. J.*, **49** (2023), 9–32.
[16] M.I. Krastanov, N.K. Ribarska. Nonseparation of sets and optimality conditions. *SIAM J. Control Optim.*, **55** (2017), 1598–1618.
[17] A.Y. Kruger, D.R. Luke, N.H. Tao. Set regularities and feasibility problems. *Math. Program.*, **168** (2018), 279–311.
[18] L.W. Neustadt. Optimization. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
[19] L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gamkrelidze, E. Mishchenko. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Gordon and Beach, New York, 1986.
[20] R.T. Rockafellar. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions. *Canad. J. Math.*, **32** (1980), 257–280.
[21] R.B. Vinter. Optimal Control. Birkhaüser, Boston, 2010.
[22] R.B. Vinter, G. Pappas. A maximum principle for non-smooth optimal control problems with state constraints. *J. Math. Anal. Appl.*, **89** (1982), 212–232.
[23] J. Warga. Optimal Control of Differential and Functional Equations. Academic Press, New York, 1972.
[24] J. Warga. Optimization and controllability without differentiability assumptions. *SIAM J. Control Optim.*, **21** (1983), 239–260.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

BRAIN-INSPIRED MODELS AND THEIR APPLICATIONS

Petia Koprinkova-Hristova
Institute of Information and Communication Technologies, Bulgarian Academy of Science
e-mail: petia.koprinkova@iict.bas.bg

Even though the contemporary artificial intelligence (AI) became a powerful tool in many areas and even in our everyday life, it still cannot outperform the human brain. The natural intelligence is a result of collaborative work of neural cell ensembles having much more elaborated functionality and connectivity than the artificial neural networks. The paper presents the basic working principles in the brain, neuromorphic computing inspired by them and their applications.

Keywords: artificial intelligence, neural biology, neuromorphic computing

ВДЪХНОВЕНИ ОТ МОЗЪКА МОДЕЛИ И ТЕХНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Петя Копринкова-Христова
Институт по информационни и комуникационни технологии,
Българска академия на науките
e-mail: petia.koprinkova@iict.bas.bg

Въпреки, че съвременния изкуствен интелект (ИИ) стана мощно средство в много области и дори в ежедневието ни, той все още не може да работи по-добре от човешкия мозък. Естествения интелект е резултат от съвместната работа на групи от нервни клетки имащи много по-сложна функционалност и връзки отколкото изкуствените невронни мрежи. Статията представя основните принципи на работа на мозъка, вдъхновените от тях невроморфни изчисления и техни приложения.

Ключови думи: изкуствен интелект, невробиология, невроморфни изчисления

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.018-024

2020 Mathematics Subject Classification: 68Q07, 92C20.

1 Introduction

The contemporary artificial intelligence (AI) relays on artificial neural networks (ANN) inspired by the knowledge about brain structures involved in information processing and decision-making. However, they still do not replicate the brain structure in detail. Although the increased computational power of computers nowadays allows for the implementation of larger and larger ANN models, it is at the expense of enormous energy consumption.

In contrast, our brain possesses computational power of a modern supercomputer having a much more complicated structure in much smaller volume, and consuming much less energy. The current development of neuromorphic architectures opened a new opportunity to replicate brain structures and functionality with lower energy consumption.

This paper presents several basic principles of brain working and its structure on several examples of neuromorphic models and their applications.

2 Brain structure and working principles

Our brain consists of more than 86 billion neural cells [4]. The contemporary neuroscience revealed a lot about their functioning principles and structural connectivity. Figure 1 presents the structure of a typical neural cell briefly called a neuron. It consists of a cell body, dendritic tree and an axon. Each neuron sends information to its neighbors via the axon and receives their signals via its dendrites at connection points called synapses. In ANNs, the neural cell output, y is considered as a sigmoid nonlinear function of the weighted sum of its inputs $x_i, i = 1 \div n$. However, the knowledge from neural biology reveals that the neural cells communicate via sequences of pulses called spikes rather than using continuous signal.

The simplest and widely used spiking neural model is called Leaky Integrate and Fire (LIF) [6] as shown in Figure 2. It considers the cell membrane as a capacitance in an electric circuit. The synapses receive incoming signal as a train of spikes. Each new spike contributes to the total current I in the circuit thus influencing the membrane potential V. When the threshold ϑ is reached the cell emits a spike and returns to its resting state.

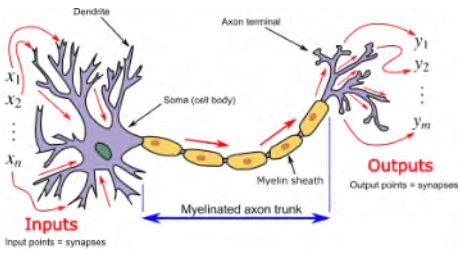


Figure 1. Neural cell structure[1]

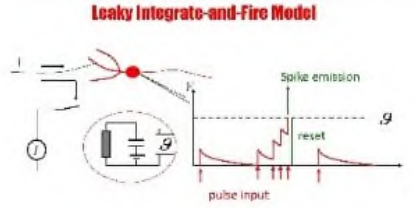


Figure 2. Neuron functionality[2]

[1] By Egm4313.s12 (Prof. Loc Vu-Quoc) - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=72816083.

[2] By Spiking16 - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=97335695.

The moment of spiking of each neuron depends on the frequency of the incoming spikes.

The overall functioning of an ensemble of neural cells depends on the way its individual elements are connected, i.e., on the network topology. In ANNs, the neurons are usually arranged in layers having mainly feedforward connections. In recurrent ANNs (RNNs) feedback connections between layers allow for accounting for past neural states as well. In our brains, the network topology called the connectome, as shown in Figure 3, is rather more complicated allowing for a much more sophisticated way of information processing.

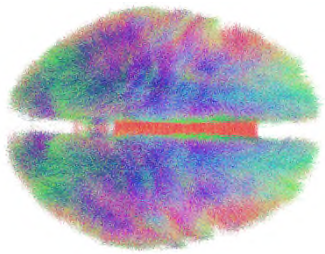


Figure 3. Human brain connectome[3]

The current developments in brain imaging technologies such as Magnetic resonance images (MRI), functional MRI (fMRI) and Magnetoencephalography (MEG) allowed to collect data not only from brain surface, like Electro-encephalographic devices (EEG) but also about deep brain structures, their connectivity and role in sensory information processing and decision-making.

The most important thing, however is to determine not only the topology but also the strength of each connection within a network. It is well known that by proper tuning of these parameters an ANN can learn to mimic quite complicated nonlinear dependence between its input and output variables. However, the ANNs training algorithms are far from the way our brain adapts to the changing environment.

While for ANNs training huge number of examples, computational resources and time are needed, our brain is able to learn from experience in a much faster and energy saving way via a biologically plausible training rule called Spike timing dependent plasticity (STDP) [5]. Figure 4 shows its principles following the Hebbian rule "stable paring of pre- and post-synaptic activity increases the strength of connection".

On this example the pre-synaptic neuron (pre_j) fires before the post-synaptic one (post_i) so the difference between times of spiking $t_j^f - t_i^f$ is negative provoking proportional to it increase of the synaptic strength w^{ij}. If the order of spiking is revers, the synaptic strength should decrease.

Accumulated knowledge about spiking neuron models and brain connectivity allows to develop brain-inspired Spike timing neural network (SNN) models that would be able to solve variety of tasks in the way our brain does. For this aim, there are developed

[3]Andreashorn - Own work, CC BY-SA 4.0, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=41581320`.

[4]Uploaded work by Bi and Poo (1998) from `http://www.scholarpedia.org/article/Spike-timing_dependent_plasticity`.

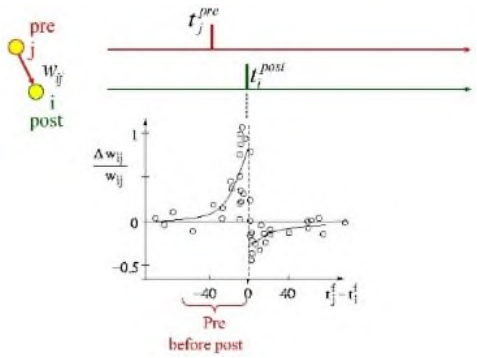


Figure 4. STDP rule[4]

several simulation platforms such as Brian[5], NEURON[6], NEST[7] etc. All these however need huge computational resources to simulate large scale SNN models.

For the aim of accelerating of simulations hardware implementations of SNN models called neuromorphic architectures were recently developed. Some of the most popular are SpiNNaker[8], TrueNorth[9], Loihi[10] etc. These hardware allow for much faster and energy-efficient simulation of large SNN models thus making a step towards their usage in embedded autonomous devices in robotics and many other applications.

3 Examples

Nowadays the brain-inspired models have multiple applications in robotics [1, 2] to enhance robot perception, decision-making, and control; in medicine [8, 12] for precise diagnostics, and neuromorphic sensors; in AI [3, 11] to improve deep learning, pattern recognition, and machine learning and in computing systems [7, 12] via the development of next-generation architectures and large-scale SNNs.

Two of the most important functions of the natural intelligence are to perceive information about the surrounding environment and to make decisions about how to survive in different situations. Here, two examples – of visual information processing and a decision-making system – are presented.

3.1 Visual system

The visual system in our brain, as shown in Figure 5, is widely investigated. Our eyes are the light sensors that transform incoming visual scenes into a neural signal. The photoreceptive cells in the retina detect light changes at each point of the visual scene we observe. They send signals to a deep brain structure called thalamus. It distributes a variety of sensory signals to the areas of the brain cortex for further processing. The part of the thalamus denoted as LGN in Figure 4 is responsible for sending the visual

[5] https://briansimulator.org/
[6] https://www.neuron.yale.edu/neuron/
[7] https://nest-simulator.org/
[8] https://apt.cs.manchester.ac.uk/projects/SpiNNaker/
[9] https://open-neuromorphic.org/blog/truenorth-deep-dive-ibm-neuromorphic-chip-design/
[10] https://www.intel.com/content/www/us/en/research/neuromorphic-computing.html

information to the primary visual cortex V1. There are neurons sensitive to different orientations of objects in the visual scene. Further layers V2 up to MT and LIP areas process the visual information, detecting positions and motions of objects. This process of feature extraction is embedded in the neural cells' specific connectivity. Each cell has so-called receptive field that is the area of the previous hierarchical layer it is connected to. Our brain relays on neurons having variety of receptive fields that filter visual information layer by layer.

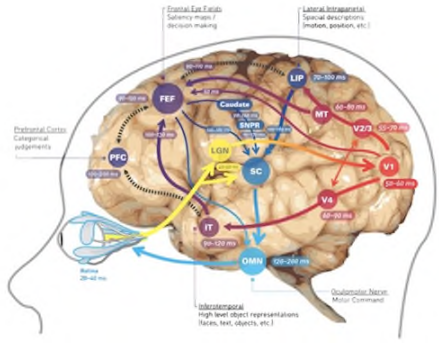


Figure 5. Visual system in the brain[11]

The most complicated visual information processing related to higher level object recognition, decision-making and categorical judgments, is done further in the inferotemporal (IT), frontal eye field (FEF) and prefrontal cortex (PFC), respectively, while deep brain SC area is responsible for sending feedback commands to our eyes via the oculomotor nerve (OMN).

In fact, deep ANNs, like convolutional neural networks (CNN), were inspired by this hierarchical structure. However, unlike CNNs, our brain has a much more complicated connectivity, including feedback and feedforward connections between different hierarchical levels, as well as within them. Besides, the filters in convolutional layers have to be learned by huge number of examples while we are born with a rich bank of natural filters determined by our brain's connectome.

3.2 Decision-making

One of the most important deep structures of our brain is the basal ganglia, shown in Figure 6. It is responsible for the control of precise movements as well as for learning from experience called reinforcement learning (RL). Figure 7 depicts the basal ganglia connectivity with other brain areas. The Striatum area is related to the so-called "value function" in terms of RL theory [10]. Here, we create our "model" of surrounding world in order to predict future outcomes or failures in depending on observations of our environment (sensory information) as well as our previous interactions with it via our actions. The theory states that training of this model is done via the neurotransmitter dopamine that controls the STDP in specific neural connections (dopamine-dependent synapses). Dopamine is produced by the SNc area and it is considered to be the neural analog of

[11] `https://www.reddit.com/r/neuro/comments/46saia/delay_of_visual_processing_in_the_human_brain/`.

the temporal difference (TD) error in the actor-critic RL scheme [10]. It depends on how well we predicted the next reward or punishment from the environment, i.e., how well we learned our lessons from past experience. The SNr and the recurrent GPe-STN structures are responsible for taking the decision in form "Go / Don't Go".

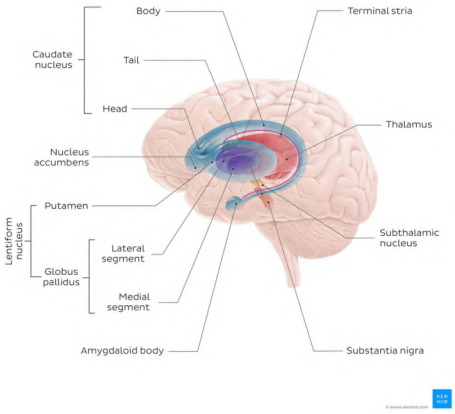


Figure 6. Basal ganglia in the brain[12]

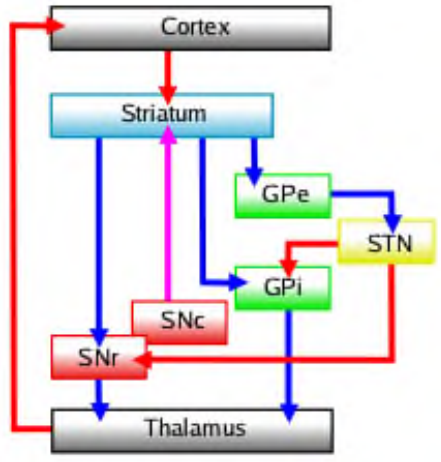


Figure 7. Basal ganglia connectivity[13]

Even though there are developed quite complicated deep RL architectures, they are still not able to outperform our brain's ability for fast adaptation to changes in our environment.

4 Conclusions

The current developments in neuroscience reveal a lot of our brain secrets how we solve problems in everyday life. The contemporary AI learned how to mimic part of this abilities without going deeper inside brain connectome. The involvement of knowledge about brain's connectome and learning mechanisms would contribute to develop a new, closer to the natural intelligence AI.

References

[1] M. Barnell, C. Raymond, M. Wilson, D. Isereau, E. Cote, D. Brow., C. Cicotta. Demonstrating Advanced Machine Learning and Neuromorphic Computing Using IBM's NS16e (2020) *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 1228 AISC, pp. 1-11 DOI: 10.1007/978-3-030-52249-0_1

[2] Z. Cai, X. Li. Neuromorphic Brain-Inspired Computing with Hybrid Neural Networks (2021) 2021 IEEE International Conference on Artificial Intelli-

[12] https://www.kenhub.com/en/library/anatomy/basal-ganglia.

[13] Created by Andrew Gillies - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=22686716.

gence and Industrial Design, AIID 2021, art. no. 9456483, pp. 343-347 DOI: 10.1109/AIID51893.2021.9456483

[3] L. Cheng, Y. Liu. Spiking neural networks: Model, learning algorithms and applications (2018) *Kongzhi yu Juece/Control and Decision*, 33 (5), pp. 923-937 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2017.1444

[4] A. Goriely. Eighty-six billion and counting: do we know the number of neurons in the human brain?, Brain, (2024) awae390, DOI: 10.1093/brain/awae390

[5] Guetig et al. Learning input correlations through nonlinear temporally asymmetric hebbian plasticity (2003) *Journal of Neuroscience* 23, pp. 3697-3714 DOI: 10.1523/JNEUROSCI.23-09-03697.2003

[6] E. M. Izhikevich. Simple Model of Spiking Neurons IEEE Transactions on Neural Networks (2003) 14, pp. 1569-1572

[7] J. Liu, H. Wu. Research hotspots and trends of brain-inspired intelligence (2021) *Chinese Journal of Biomedical Engineering*, 40 (1), pp. 91-98

[8] Y. Lv, H. Chen, Q. Wang, X. Li, C. Xie, Z. Song. Post-silicon nano-electronic device and its application in brain-inspired chips (2022) *Frontiers in Neurorobotics*, 16, art. no. 948386 DOI: 10.3389/fnbot.2022.948386

[9] K. Roy, A. Jaiswal, P. Panda. Towards spike-based machine intelligence with neuromorphic computing (2019) *Nature*, 575 (7784), pp. 607-617 DOI: 10.1038/s41586-019-1677-2

[10] R. S. Sutton, A. G. Barto. Reinforcement Learning: An Introduction, Second Edition, MIT Press, Cambridge, MA (2018)

[11] R.-D. Wang, R. Wang, T.-D. Zhang, S. Wang. A Survey of Research on Robotic Brain-inspired Intelligence (2024) *Zidonghua Xuebao/Acta Automatica Sinica*, 50 (8), pp. 1485-1501 DOI: 10.16383/j.aas.c230705

[12] Y. Wang, J. Lu, M. Gavrilova, R. A. Fiorini, J. Kacprzyk. Brain-Inspired Systems (BIS): Cognitive Foundations and Applications (2018) Proceedings - 2018 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, SMC 2018, art. no. 8616173, pp. 995-1000 DOI: 10.1109/SMC.2018.00177

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

THE PLACE OF MATHEMATICS EDUCATION IN THE WORLD SCIENCE

Kiril Bankov

Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences
e-mail: kbankov@fmi.uni-sofia.bg

The questions of whether mathematics education is a scientific field and, if so, where its place in the world science is, do not have clear answers in many parts of the world. Mathematicians do not unreservedly accept it as a part of the science of mathematics, because mathematics education uses different methods of research; educators do not recognize it either, because the presence of mathematics makes it too unusual for pedagogy and largely incomprehensible. This material examines the world's view on these issues from an organizational and scientific point of view. The basis is the author's impressions and reflections from the 15th International Congress on Mathematics Education (ICME-15), held in the summer of 2024. Based on the overview of a part of the scientific program of the congress, the author provides arguments that mathematics education is a scientific field and it should be considered as part of mathematics.
Keywords: mathematics education, international congress, ICMI, ICME, scientific field

МЯСТОТО НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ОБРАЗОВАНИЕ В СВЕТОВНАТА НАУКА

Кирил Банков

Факултет по математика и информатика, Софийски университет „Св. Климент Охридски“, Институт по математика и информатика, БАН
e-mail: kbankov@fmi.uni-sofia.bg

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.025-036

2020 Mathematics Subject Classification: 97-06.

Въпросите дали математическото образование (обучението по математика) е научна област и ако е такава, къде е нейното място в световната наука, нямат еднозначни отговори в много части на света. Математиците не го приемат безрезервно като част от науката математика, защото в математическото образование се използват различни методи на изследване; педагозите също не го припознават, защото присъствието на математика го прави твърде необичайно за педагогиката и в голяма степен неразбираемо. В този материал се разглежда световното виждане по тези въпроси от организационна и научна гледна точка. В основата са впечатленията и размислите на автора от 15-тия международен конгрес по математическо образование (ICME-15), проведен през лятото на 2024 година. Въз основа на преглед на част от научната програма на конгреса, авторът аргументира тезата, че математическото образование е научна област и тя би трябвало да се разглежда като част от математиката.
Ключови думи: математическо образование, обучение по математика, световен конгрес, ICMI, ICME, научна област.

1 Увод

От 7 до 14 юли 2024 в Сидни, Австралия, се проведе 15-тия международен конгрес по математическо образование, ICME-15 [6]. Участието в такава крупна международна научна проява винаги предизвиква размисли по различни въпроси. Като се има предвид тематиката на конгреса, естествено е да се замислим за мястото на математическото образование в световната наука. В частност, този въпрос засяга мястото на и отношението към научните изследвания по математическо образование в България.

Ако погледнем нашата действителност, ще забележим, че (като оставим настрана някои различия в оттенъците) се използват думите „математическо образование“ или „обучение по математика“ за почти една и съща област от научни изследвания. В англоезичните държави областта, за която говорим, също има различни имена, например: Mathematics education, Mathematics Pedagogy. Подобно е положението и във френско говорещите държави: Enseignement des mathématiques, Pédagogie des mathématiques. Изглежда че след като има разбиране върху съдържанието на научната област, различните имена не са съществен проблем.

По-сериозен е въпросът с мястото на тази научна област. По време на една от дискусиите на конгреса, колеги от някои държави споделиха, че математическото образование не е ясно обособена научна област при тях. Имаха предвид, че математиците не го приемат безрезервно като част от науката математика, защото в математическото образование се използват различни начините на изследване; педагозите също не го припознават, защото присъствието на математика го прави твърде необичайно за педагогиката и в голяма степен неразбираемо.

Да погледнем организационната страна на въпроса в България. От една страна, голяма част от научната дейност по математическо образование, както и подготовката на учители по математика се извършва в математически институции (ИМИ-БАН или математически факултети на някои университети). Също така, Съюзът на математиците в България (СМБ) има многобройни секции от учители или научни работници в математическото образование. От друга страна, според класификатора

на областите на висше образование и професионалните направления „Педагогика на обучението по ... (математика)“ е професионално направление в област на висшето образование „Педагогически науки“. Както се вижда, организационно и у нас математическото образование като че ли „стои на два стола“ (математика и педагогика) като никой „стол“ не го припознава еднозначно като научна област.

2 Международната комисия за преподаване на математика (ICMI)

Ако се интересуваме как е организирано математическото образование на международно ниво, трябва да отбележим наличието и ръководната роля на Международната комисия за преподаване на математика (International Commission on Mathematical Instruction – ICMI), за която заслужава да се кажат малко повече думи [7]. Идеята за учредяване на ICMI е от 1908 година, когато на 4-тия международен конгрес на математиците в Рим се учредява Международна комисия за преподаване на математика с президент Феликс Клайн със следното решение: „Конгресът, след внимателното разглеждане на програмите и методите на преподаване на математика в средните училища на различните нации, признава важността на проблемите и възлага на професорите Клайн, Грйинхил и Фер задачата да сформират международна комисия, която да проучи въпроса и да докладва на следващия конгрес.“ [2]. Няколко години по-рано, през 1899, Анри Фер и Чарлз Лесант инициират в Женева издаване на списанието “l’Enseignement Mathématique” [8], което става официален орган на ICMI. Списанието и до сега се публикува с по един том годишно, в два броя на том, приблизително от 450 страници [5]. То е индексирано в няколко бази данни, включително Web of Science.

Едва 44 години по-късно, през 1952 година се осъществява реорганизация в Международния съюз на математиците (IMU) и ICMI става самостоятелна под-комисия на IMU [3]. В годините от 1960 до 1980, благодарение главно на усилията на Ханс Фройдентал, математическото образование извоюва признание като академична област [1]. През 2007 година тогавашните Президент на ICMI Мишел Артиг и Генерален секретар Бърнард Ходгсън оформят сегашната структура на ICMI, която вече е била инициирана от Мигел Де Гусман и след това Химан Бас и Могенс Нис [4]. Структурата предвижда да се избира Управителен съвет на всеки 4 години по време на провеждането на съответния Международен конгрес по математическо образование. През 2024 година беше избран поредния Управителен съвет на ICMI за периода 2025 – 2028 години.

Според структурата, всяка страна членка се представлява от организацията, която е представляваща страната и в IMU. Освен това, всяка страна трябва да има свой представител в ICMI [7]. Представителите се избират на Общо събрание на ICMI за най-много 2 мандата от по 4 години. Има държави, които не са членки на IMU, но имат представители в ICMI.

3 Международните конгреси по математическо образование (ICME)

Безспорно най-важните форуми на ICMI са международните конгреси по математическо образование (International Congress of Mathematics Education – ICME). Първият такъв конгрес е в Лион през 1969 година и след 1972 те се провеждат на всеки четири години. Тези конгреси са най-големите срещи на общности работещи в математическото образование. В последните няколко конгреса участват около 2500 души. В таблиците е дадена информация за конгресите ICME.

Конгрес	Година	Място
ICME-1	1969	Лион (Франция)
ICME-2	1972	Ексетър (Англия)
ICME-3	1976	Карлсруе (Германия)
ICME-4	1980	Бъркли (САЩ)
ICME-5	1984	Аделаида (Австралия)
ICME-6	1988	Будапеща (Унгария)
ICME-7	1992	Квебек (Канада)
ICME-8	1996	Севиля (Испания)

Конгрес	Година	Място
ICME-9	2000	Токио (Япония)
ICME-10	2004	Копенхаген (Дания)
ICME-11	2008	Монтерей (Мексико)
ICME-12	2012	Сеул (Корея)
ICME-13	2016	Хамбург (Германия)
ICME-14	2021	Шанхай (Китай)
ICME-15	2024	Сидни (Австралия)
ICME-16	2028 (планиран)	Прага (Чехия)

Като търсим мястото на математическото образование в световната наука, трябва да знаем научната му тематика с нейните основни въпроси и проблеми. Изчерпателна информация за това може да се получи от научната програма на конгресите ICME, тъй като в тях е концентриран потенциалът от работещите в тази област. Да спрем вниманието си на някои части от научната програма на ICME-15.

4 Пленарните доклади на ICME-15

Ще започнем с кратък обзор на четирите пленарни доклада на конгреса.

Темата на Джил Адлер от Южна Африка е „Ролята на взаимната връзка в изследванията между „глобалния юг“ и „глобалния север“ за развитието на обучението по математика“. В основата на доклада е разбирането, че изследванията в математическото образование трябва да спомагат за развитието на образованието по целия свят. Надеждна информация е нужна както за ученето и преподаването в социално-икономически и културен контекст, така и в образователните практики по математика в световен мащаб. Обръщайки се към скорошни изследвания върху обучението на учителите по математика и тяхното професионално развитие, се обосновава, че още много трябва да се направи, за глобализацията на математическото образование.

Идо Гал от Израел говори на тема „Какво означава да подготвим нашите въз-

питаници за живота в зряла възраст? Гледни точки породени от обучението по статистика и математика за възрастни“. Като се базира на примери от обучението по статистика и математика, в доклада се застъпва разбирането, че една от целите на преподавателите е да подготвят своите възпитаници за ефективен живот като възрастни. Илюстрирани са четири отделни, но свързани теми, включващи необходимостта от определяне на всеобхватни учебни рамки, подготовка на завършилите за справяне с реални житейски практики, развиване на критичност и критична позиция, както и изграждане у завършилите способността да бъдат критични потребители на автентични текстове. Разглеждането на такива теми може да разшири съществуващите подходи за обучение, но също така то е от съществено значение за създаване на по-ефективни и приобщаващи образователни програми по математика, статистика и изчислително мислене.

Джейсон Шарплъс от Австралия избира темата „Математика на горския пожар“. Основен въпрос е как математиката е била използвана, за да помогне в разбиране на поведението на горските пожари в Австралия, както и за предвиждане на тяхното разпространение. Разгледани са някои от основните математически модели, които традиционно се използват, и как те се комбинират с геометрични понятия за моделиране на разпространението на горските пожари в ландшафта. Обсъжда се как пожарът може да се използва като тема за мотивиране и подобряване на обучението по математика, като същевременно се вплита в живота на коренното население.

Темата на доклада на Рина Зазкин от Канада е „Математиката по пътя между преподаване и изследване“. Съчетават се две гледни точки: тази на обучител на учители по математика, който има за цел да подобри математическите знания на учителите, и тази на изследовател, който проектира задачи с педагогически привкус за разширяване на математическите познания на учителите. Вниманието е насочено върху взаимодействието между преподаването и изследването в математическото образование. Разкрива се как някои дейности в процеса на преподаване са довели до изследователски проекти, както и обратно, резултати от изследвания са използвани за проектиране на задачи и учебна дейност.

Без съмнение, тематиката на четирите пленарни доклада е разностранна. Като се започне от глобализацията на математическото образование (процес, който е характерен за съвременната наука и живот), мине се през нуждата от получаване на практически знания по математика за живота на хората, използване на математически методи при бедствия и тяхното отражение върху обучението в училище и се стигне до важните проблеми на обучението на учители по математика и връзката на преподаването с изследователските процеси.

5 Тематичните работни групи на ICME-15

Разнообразната тематика в математическото образование е обхванатa от така наречените тематични работни групи на конгреса. В ICME-15 има 54 такива групи, които условно може да групираме в 6 направления:

- Учебно съдържание, преподаване и учене на математика;
- Особености на обучението по математика на „специфични“ групи ученици;
- Стратегии за преподаване и изучаване на математика;

- Оценяване и оценъчни изследвания в математическото образование;
- Подготовка на учители по математика;
- Социални, философски и др. аспекти на обучението по математика.

Всяка работна група описва важните теми и проблеми, които се дискутират по време на заседанията. В тези описания се съдържа важна информация за научната тематика на съответните направления в математическото образование.

5.1 Учебно съдържание, преподаване и учене на математика

Обособени са отделни работни групи по: Аритметика, Алгебра, Геометрия, Измерване, Вероятности, Статистика, Дискретна математика и Анализ. Някои от тях са подразделени на възрастови групи ученици. Например, има отделни групи за преподаване на алгебра в прогимназията и в гимназията.

Ето основните дискусионни теми в групата по преподаване на алгебра в гимназията:

- Конструиране на задачи по алгебра (възможности и ограничения на технологиите; насърчаване на разбирането на алгебрични структури; подпомагане на алгебрични разсъждения, както и разбиране на доказателства; нерутинни задачи).
- Знания за преподаване на алгебра (какви педагогически и математически знания са нужни на учителя за преподаване на алгебра; използване на технологии в преподаването; връзка между алгебрата в средното и висшето образование).
- Учене и разбиране на алгебрата от учениците (трудности или типични грешки на учениците, както и придобита от тях компетентност; преход между средно и висше образование при изучаване на алгебра; преминаване от аритметично към алгебрично мислене; оценка на разбирането и алгебричното мислене на учениците).

Работната група по геометрия поставя на дискусия следните въпроси:

- Как да развиваме геометричното мислене в класната стая? Какви са когнитивните процеси, включени в преподаването и изучаването на геометрия? Какъв е приносът на пространствените разсъждения за геометрията и обратно?
- Как се преподава геометрията в различни култури? Какви културни приноси има в преподаването и изучаването на геометрия и как те могат да се изучават?
- Какви връзки можем да направим между преподаването и изучаването на геометрия и други математически области или други предмети? Как се проявяват тези връзки в класната стая?
- Как се подхожда към преподаването и изучаването на геометрия в различни учебни програми? По какво си приличат или се различават? Какви са предимствата и ограниченията на тези учебни програми? Какви са новите подходи за прилагане на учебната програма по геометрия?

От дадените примери по алгебра и по геометрия се вижда, че дискусионните въпроси акцентират върху развиване на способностите на учениците за разбиране, разсъждаване и критично мислене, като на по-заден план остават въпроси като какво да преподаваме или как да се преподава „традиционния“ материал. Това се забелязва в поставените проблеми и в работните групи по другите области на математиката в училище.

Заслужава да се отбележи специално обособената група за обучение по изчислително мислене (computational thinking). През последните 15-тина години в различни страни се наблюдава бързо интегриране на изчислителното мислене в образованието. Тази интеграция има различни форми, например чрез въвеждане на кодиране, програмиране или алгоритми. Понякога те са в самостоятелни учебни програми по компютърни науки, в контекста на математическото образование или чрез мултидисциплинарен подход (т. е. интегрирани в два или повече учебни предмета). Нарастващото търсене на методи за обучение в изчислително мислене в съвременното обучение по математика поставя редица въпроси, които са обект на дискусия в тази група.

5.2 Особености на обучението по математика на „специфични“ групи ученици

В това направление са включени спецификите при обучението по математика както на ученици със специални образователни потребности, така и на талантливи ученици. Тук е и работната група за математически състезания и други подобни предизвикателства.

В групата за изследвания на работата с талантливи деца се дискутират следните въпроси:

- Естеството на математическия талант (какво знаем за него, какви методики да използваме, за да развием таланта чрез подходящо обучение в контекста на различните образователни среди).
- Учениците (как да открием талантливи ученици, как да ги обучаваме, как са свързани математическото творчество и надареността, как се отнасят учениците към надареността).
- Педагогика/Програми/Учители/Родители: (как преподаването може най-добре да насърчи и развие математически талантливите ученици, каква среда, учебни програми, ресурси и дейности могат да накарат учениците да открият и реализират своите математически таланти, каква е ролята на учители, родители и обществото за подкрепата на математическите таланти).

Ето и някои дискусионни теми в групата за математически състезания и креативност.

- Идентифициране и развиване на математическата креативност сред ученици и учители.
- Текущ напредък в национални и международни състезания по математика и подготвителни дейности за тях.

- Създаване на задачи за математически състезания.
- Използване на състезателни задачи за обучение по математика сред общата популация на учениците.
- Ролята на състезанията и математическите предизвикателства в по-широкия образователен контекст.
- Емпирично изследване на състезания по математика и други предизвикателни дейности.

Преди време, в тези групи се представяше главно информация за някаква дейност (например програма за обучение или състезание) съпроводена от няколко примера за демонстрация. Прави впечатление, че на този конгрес видът на презентациите е различен. Акцентът вече е върху представяне и дискусии на изследвания базирани върху експериментални данни от работа на сравнително малки групи изследователи. Например, като се анализират отговори на ученици върху задачи с избираем отговор от математически състезания, може да се открият дистрактори, които се избират поради „разсейващи фактори“, като: подвеждаща математическа интуиция, неадекватни изчисления или частично правилни решения.

5.3 Стратегии за преподаване и изучаване на математика

Работните групи в това направление се занимават с проблеми свързани с ролята на задачите в обучението по математика, стратегии за решаването им, използването на технологии в преподаването, както и различни начини и средства, които да направят изучаването на математиката по-ефективно.

Ето някои от дискусионните теми в групата за съставяне и решаване на математически задачи:

- Изследване на методологични въпроси при съставянето и решаването на математически задачи (качествени, количествени и смесени методи на изследване);
- Връзката между съставянето на задача и нейното решаване;
- Образователни експерименти, фокусирани върху съставянето на математически задачи и решаването им;
- Мястото и ролята на съставянето на задачи и решаването им в учебните програми, и учебниците по математика и учебните практики;
- Обучение на учители за съставяне на математически задачи и решаването им;
- Работа върху съставяне на математически задачи и решаването им във виртуална учебна среда.

Интересно е да се видят и някои от въпроси в групата за разсъждаване, аргументация и доказателство в обучението по математика.

- Теоретични подходи и методи за изследване на когнитивни и дидактически въпроси в преподаването и ученето на разсъждаване, аргументация и доказателство;

- Оценяване, учебна програма, социални или между-културни въпроси, свързани с преподаването и ученето на разсъждаване, аргументация и доказателство;
- Практики в класната стая, насочени към подпомагане в ученето на разсъждаване, аргументация и доказателство;
- Ролята на технологиите в преподаването и ученето на разсъждаване, аргументация и доказателство;
- Ролята на езика и логиката в изграждането и валидирането на разсъжденията, аргументацията и доказателството.

Общото за работните групи в това направление е, че се изследват теоретични и методологични основи на разглежданите стратегии, както и въпроси, свързани с ролята и мястото им в учебните програми, учебниците и училищната практика.

В това направление се изучават и въпроси свързани с влиянието на цифровите технологии в обучението по математика. Дискутират се изследвания на въпроса как технологиите посредничат в получаването на математически знания и как това посредничество променя самите знания. Свързан с това е и въпросът дали и как математическото съдържание, преподавано в училище, се влияе от използването на цифрови технологии, включително и изкуствения интелект.

5.4 Оценяване и оценъчни изследвания в математическото образование

Това направление включва работни групи по оценяване, тестология, изследвания в математическата практика, национални или международни изследвания в математическото образование.

Като пример да разгледаме дискусионните въпроси в групата по оценяване в обучението по математика.

- Теоретични, философски и етични въпроси относно оценяването на знанията и уменията по математика;
- Оценяване в класна стая (формално или неформално оценяване);
- Каква е ролята на учителя по математика при оценяването в класната стая? Как се проявява феноменът „преподаване заради тест“ в различни контексти?
- Как различните видове оценяване влияят върху ученето и мотивацията на учениците? Каква е ролята на обратната връзка за учащия?
- Какво да оценяваме? Как се включва когнитивният аспект? Как се оценява решаването на задачи със свободен отговор?
- Технология на компютърно базирано оценяване по математика;
- Валидност и надеждност на оценяването.

Предлагам на вниманието само общото представяне на разглежданите проблеми в групата за изследвания и разработки в тестването (национално или международно) в обучението по математика: „В работната група обсъждаме национални и

международни оценявания, изпити и тестове, техните общи и специфични характеристики, като вземаме предвид националните програми. Националните стандартизирани оценявания по света стават все повече. Разширява се тяхното присъствие в научните изследвания. Някои страни имат история от много национални оценявания за всяко училищно ниво и те имат огромно влияние върху начина, по който се развиват преподавателските практики и учителските кариери. Тези явления отварят важни дискусионни въпроси.“

В това направление преобладават презентации и дискусии по анализи на проведени изследвания, както и по особености при подготовката на оценъчните инструменти (тестовете). Липсват чисто информативни презентации за организацията и целите на конкретно изследване, както и примерни задачи, включвани в измерителни инструменти.

5.5 Подготовка на учители по математика

Работните групи в това направление разглеждат важни въпроси за основната подготовка на учители по математика (получаването на учителска правоспособност), както и за повишаване на тяхната квалификация по време на работа. Обсъждат се и знанията, които трябва да имат учителите, за да изпълняват професията си.

Например, групата за подготовка на учителите по математика се фокусира около въпроси, свързани с:

- Знанията, които трябват на бъдещите учители по математика и начина, по който ги получават;
- Училищна практика;
- Професионални убеждения и положително отношение към математиката;
- Използване на технологии и други ресурси в дейността на учителя по математика;
- Възможности за реализация.

Важните въпроси какви знания трябва да имат учителите по математика се дискутират в отделна работна група. Ето някои от основните проблеми в нея:

- Концептуализация на знания за обучението по математика в средното училище;
- Измерване на знанията за обучението по математика на бъдещите учители;
- Връзки между знанията за преподаването на математика, преподавателската практика и постиженията на учениците в средното училище;
- Практически изводи за обучението на учители от изследване на знанията за преподаването на математика.

В България научните изследвания в това направление са малко. Положителната страна е, че подготовката на учители по математика у нас се извършва в математическите факултети на някои университети. За съжаление, няма обсъждане на

изследвания, които да покажат до колко начините на подготовка и знанията, които се дават на бъдещите учители, са адекватни на официалната документация за подготовка на учители, както и на изискванията на съвременната училищна среда. Наблюдения върху някои практики за преподаване на математика в училище показват, че има проблеми в подготовката на учители. Нужно е да се проведат насочени научни изследвания в това направление, за да се установят по безспорен начин проблемите и да се пристъпи към тяхното разрешаване.

5.6 Социални, философски и др. аспекти на обучението по математика

Работните групи в това направление обсъждат по-общи проблеми на математическото образование като: същността на математическата грамотност, създаване на учебни програми по математика, научни изследвания по математическо образование.

Например, групата по проблемите на математическата грамотност дискутира по следните проблеми:

- Същност на математическата грамотност;
- Теории за математическата грамотност;
- Какво могат да ни кажат изследванията за преподаването и изучаването на математическа грамотност;
- Бъдещи разработки за математическата грамотност.

Ето и някои от дискусионните теми на групата за създаване на учебни програми.

- Социално-историко-политически анализ на учебното съдържание по математика в училище;
- Процеси в разработването на учебната програма по математика;
- Влиянието на учителите и начините на преподаване върху развитието на учебните програми;
- Въздействие на учебната програма върху учениците.

Дискусиите в работните групи на това направление са фокусирани върху въпроси, които са в основата на математическото образование. Поради естеството им, това са въпроси от общ характер, но важни за научната област.

6 Заключение

Направеният преглед ни убеждава, че математическото образование е ясно обособена научна област с различни направления и разнообразни научно-изследователски въпроси. Дадените примери показват, че голяма част от тези въпроси са специфични за математиката и не са типични за предмета педагогика. Това засилва увереността, че математическото образование би трябвало да се разглежда като част от науката математика. Световната практика в организационно отношение (организацията

ICMI като под-комисия на IMU) подкрепя тази теза. Българската действителност в голяма степен „е в крак“ с това. От гледна точка на тези дадености, може би трябва да осмислим името на научната област „математическо образование“, като я наречем например „педагогическа математика“ (по примера на „приложна математика“ и „изчислителна математика“).

Стимулът за написване на този материал са участията на автора в конгресите ICME. На конгресите, проведени през последните години на миналия век и първото десетилетие на настоящия век, представителността на България беше добра. Участваха между 5 и 10 български учени и практици (учители) и представяха български постижения в областта, с които може да се гордеем. За съжаление, нещата се промениха и в последните издания на ICME българското участие е сведено до минимум. Надявам се, че това ще се промени и скоро ще видим млади български учени да представят на конгресите постиженията си в математическото образование.

Литература

[1] H. Bass, B. R. Hodgson. The International Commission on Mathematical Instruction – What? Why? For Whom. *Notices of the American Mathematical Society* 51 (6), June/July 2004, pp. 639-644.

[2] G. Castelnuovo (Edd.). *Atti del IV congresso internazionale dei matematici*, Vol. I, Roma, 1909, p. 33.

[3] A. G. Howson. Seventy-five years of the International Commission on Mathematical Instruction, *Educational Studies in Mathematics* 15, 1984, pp. 75-93.

[4] M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello. The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 2010, pp. 205–210.

[5] D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B.R. Hodgson, G. Schubring (Eds.) *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique: Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century.* Proceedings of the EM-ICMI Symposium (Geneva, 20-22 October 2000), 2003.

[6] ICME-15, https://icme15.org/

[7] ICMI, https://www.mathunion.org/icmi

[8] l'Enseignement Mathématique, https://www.unige.ch/math/EnsMath/

СЕКЦИЯ А: МАТЕМАТИЧЕСКИ СТРУКТУРИ

SECTION A: MATHEMATICAL STRUCTURES

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

ONE PARAMETRIC REPRESENTATION OF THE GENERALIZED FOCAL CURVE OF A NON-HELICAL SPHERICAL CURVE

Cvetelina Dinkova[1], Radostina Encheva[2], Aynur Ali[3]

Faculty of Mathematics and Informatics,
Konstantin Preslavsky University of Shumen, Shumen, Bulgaria
e-mails: [1]c.dinkova@shu.bg, [2]r.encheva@shu.bg, [3]a.ali@shu.bg

In this paper, we establish relations between Frenet frames and differential-geometric invariants of a non-helical space curve in a three-dimensional Euclidean space and its closely related curve in a four-dimensional Euclidean space. The focal curve of the constructed four-dimensional curve is used to obtain a parametric representation of the generalized focal curve of a spherical curve.
Keywords: Frenet curves, Non-helical curves, Shape curvatures, Euclidean curvatures, Focal curves, Spherical curves

ЕДНО ПАРАМЕТРИЧНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ОБОБЩЕНАТА ФОКАЛНА КРИВА НА СФЕРИЧНА КРИВА, КОЯТО НЕ Е СПИРАЛА

Цветелина Динкова[1], Радостина Енчева[2], Айнур Али[3]

Факултет по математика и информатика,
Шуменски университет "Епископ Константин Преславски", Шумен, България
e-mails: [1]c.dinkova@shu.bg, [2]r.encheva@shu.bg, [3]a.ali@shu.bg

Research is partially supported by Konstantin Preslavsky University of Shumen under grant RD-08-53/22.01.2025.

This research is supported by the Bulgarian Ministry of Education and Science for the second stage of the National Program "Young Scientists and Postdoctoral Students-2" R-1157A/28.10.2024.

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.039-045

2020 Mathematics Subject Classification: 53A04; 51M15.

В тази статия установяваме връзки между векторите на Френе и диференциално-геометрични инварианти на неспирална пространствена крива в тримерно Евклидово пространство и нейната тясно свързана крива в четиримерно Евклидово пространство. Фокалната крива на построената четиримерна крива се използва за получаване на параметрично представяне на обобщената фокална крива на сферична крива.
Ключови думи: Криви на Френе, Неспирални криви, Шейп-кривини, Евклидови кривини, Фокални криви, Сферични криви

1 Introduction

One important problem in the differential geometry of curves is determining the focal curve of a particular Frenet curve. The concepts of a focal curve and focal curvatures of a smooth curve in n-dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$ were first introduced by Uribe-Vargas [14]. The focal curve can be parametrized using the original curve's parametrization, its curvatures, and unit normal vectors. Our investigation is restricted to regular curves of order n in $\mathbb{E}^n$. In other words, we assume that every curve $\boldsymbol{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ (nD-curve) possesses derivatives up to order n, i.e. the curve is of class C^n, and for any $t \in I$ the derivatives $\boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}''(t), \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{(n)}(t)$ are linearly independent vectors in the n-dimensional real vector space $\mathbb{R}^n$. Those curves are named nD-Frenet curves. The differential geometry of space curves is described in more detail in [2, 11]. Any Frenet curve can be determined up to a direct similarity of $\mathbb{E}^n$ by $n-1$ functions called shape curvatures. They are introduced in [4, 5, 6]. Three important classes contain Frenet curves in $\mathbb{E}^3$: non-helical curves, general helices, and circular helices. Izumiya and Takeuchi [13] have determined relations between plane curves and general helices. Ali [1] studies parametric representations of general helices with a given curvature function and a given constant angle between the tangent vectors and a fixed unit vector. Examples of general helices with a unit speed parametrization can be found in [10, 8]. In this work, we will consider only non-helical curves that do not have a constant curvature to torsion ratio. We construct a new curve in $\mathbb{E}^4$ ($4D$-curve) that is associative to a given space curve in $\mathbb{E}^3$. Then we find the focal curve of the corresponding $4D$-curve. The orthogonal projection of the obtained curve in $\mathbb{E}^3$ is called a generalized focal curve of the initial curve. The relations between the differential-geometric invariants of the corresponding curves make it possible to study the properties of one curve via the other and vice versa. The focal curve of any spherical curve degenerates into one point, the centre of the curve's containing sphere. This is the reason why we explore the generalized focal curves of spherical curves. In [7], only the generalized focal curves of Viviani's curve and a spherical helix are considered.

2 Preliminaries

We consider the Euclidean four-space $\mathbb{E}^4$ to be an affine space with column four-dimensional vectors in its corresponding real vector space $\mathbb{R}^4$. Accordingly, the position vector $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ may be used to identify any point $X \in \mathbb{E}^4$. There is a standard scalar (or dot) product of two vectors in the vector space $\mathbb{R}^4$. If $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ and $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ are four-dimensional vectors, then the scalar

product of $\mathbf{U}$ and $\mathbf{V}$ is the real number $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ and the norm of the vector $\mathbf{U}$ is $\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\mathbf{U}\cdot\mathbf{U}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$.

Let $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{E}^4$ be a unit-speed curve of class C^4 defined on an interval $I \subseteq \mathbb{R}$ by a vector-parametric equation

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \big(\gamma_1(s),\, \gamma_2(s),\, \gamma_3(s), \gamma_4(s)\big)^T, \quad s \in I. \tag{1}$$

This suggests that $\boldsymbol{\gamma}'(s) = \dfrac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}(s)$ is a unit vector for each $s \in I$ and that the coordinate functions $\gamma_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$ have continuous derivatives up to order 4. The curve $\boldsymbol{\gamma}$ given by (1) is a unit-speed Frenet curve if the vectors $\boldsymbol{\gamma}'(s)$, $\boldsymbol{\gamma}''(s) = \dfrac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}'(s)$, $\boldsymbol{\gamma}'''(s) = \dfrac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}''(s)$ and $\boldsymbol{\gamma}^{(4)}(s) = \dfrac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma}'''(s)$ are linearly independent for all $s \in I$ or, equivalently, $\det(\boldsymbol{\gamma}'(s), \boldsymbol{\gamma}''(s), \boldsymbol{\gamma}'''(s), \boldsymbol{\gamma}^{(4)}(s)) \neq 0$ for all $s \in I$. According to [12], we can examine four unit vector functions $\mathbf{T}(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s)$, $\mathbf{N}_1(s)$, $\mathbf{N}_2(s)$, $\mathbf{N}_3(s)$ and three real-valued curvature functions $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$, $\kappa_3(s)$. Keep in mind that the requirement that the curve $\boldsymbol{\gamma}$ is a Frenet curve in $\mathbb{E}^4$ is equivalent to the condition that $\boldsymbol{\gamma}$ is a curve of class C^4 with curvatures $\kappa_1(s) > 0$, $\kappa_2(s) > 0$, $\kappa_3(s) \neq 0$.

The unit-speed Frenet curve $\boldsymbol{\gamma}$ defined by (1) has a unit tangent vector $\mathbf{T}(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s)$, and the first, second, and third unit normal vectors of $\boldsymbol{\gamma}$ can be expressed as $\mathbf{N}_1(s) = \boldsymbol{\gamma}''(s)/\|\boldsymbol{\gamma}''(s)\|$, $\mathbf{N}_2(s) = (\mathbf{N}_1'(s) + \kappa_1(s)\mathbf{T}(s))/\kappa_2(s)$, $\mathbf{N}_3(s) = (\mathbf{N}_2'(s) + \kappa_2(s)\mathbf{N}_1(s))/\kappa_3(s)$.

Analogously to the three-dimensional case, there is a unique osculating hypersphere at any point of a Frenet curve $\boldsymbol{\gamma}$ in $\mathbb{E}^4$. The centers of these osculating hyperspheres form a new curve, called a focal curve of $\boldsymbol{\gamma}$. Uribe-Vargas [14] investigated focal curves in arbitrary dimension. It follows from his main result that the unit-speed Frenet curve $\boldsymbol{\gamma}$ given by (1) possesses a focal curve $\boldsymbol{foc}_{\boldsymbol{\gamma}}$ with parametrization

$$\boldsymbol{foc}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) + C_1(s)\mathbf{N}_1(s) + C_2(s)\mathbf{N}_2(s) + C_3(s)\mathbf{N}_3(s), \tag{2}$$

where $\mathbf{N}_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ are the three unit normal vectors of $\boldsymbol{\gamma}$, and the coefficients $C_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, called focal curvatures, can be expressed by the curvatures $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$, $\kappa_3(s)$ of $\boldsymbol{\gamma}$. If $\kappa_i(s)$ are non-constant functions, then the focal curvatures are

$$\begin{aligned} C_1(s) &= \frac{1}{\kappa_1(s)}, \qquad C_2(s) = \left(\frac{1}{\kappa_1(s)}\right)' \frac{1}{\kappa_2(s)}, \\ C_3(s) &= \left(\frac{C_1(s)}{C_2(s)}C_1'(s) + C_2'(s)\right)\frac{1}{\kappa_3(s)} = \left(\frac{\kappa_2(s)}{\kappa_1(s)} + \left[\left(\frac{1}{\kappa_1(s)}\right)' \frac{1}{\kappa_2(s)}\right]'\right)\frac{1}{\kappa_3(s)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be a zero-containing interval, and let $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{E}^3$ be a Frenet curve of class C^4 with an arc-length parametrization and a parametric equation

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \big(x(s),\, y(s),\, z(s)\big)^T, \quad s \in I. \tag{4}$$

According to the above assumptions, for any $s \in I$, the curvature $\varkappa(s)$ of $\boldsymbol{\alpha}$ is a positive real number, the torsion $\tau(s)$ of $\boldsymbol{\alpha}$ is a nonzero real number, and the Frenet frame $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ is well-defined. The unit-speed curve $\boldsymbol{\gamma}$ that is closely related to $\boldsymbol{\alpha}$ is studied in [9]. If $\vec{e}_4$ is the fourth unit coordinate vector in $\mathbb{E}^4$, then the curve $\boldsymbol{\gamma}$ can be

expressed by the equality

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}(s) + \frac{s}{\sqrt{2}}\vec{e}_4, \quad s \in I, \text{ where } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

The suggested curve $\boldsymbol{\gamma}$ is situated on a generalized cylinder with rulings parallel to $\vec{e}_4$ and a base curve $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}$. Using the considered curve is motivated by the fact that the curve $\boldsymbol{\alpha}$ is a non-helical Frenet curve, from which it follows that the curve $\boldsymbol{\gamma}$ has a well-defined regular focal curve. The generalized focal curve of $\boldsymbol{\alpha}$ is determined by the orthogonal projection of this focal curve onto the hyperplane in $\mathbb{E}^4$ that contains the curve $\boldsymbol{\alpha}$. When the curve $\boldsymbol{\alpha}$ is a general helix, this is not the case. Then it is appropriate to apply other related curves.

According to [9, Theorem 3.1], the relations between the Euclidean curvatures $\varkappa$ and τ of a non-helical Frenet curve $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathbb{E}^3$ and the Euclidean curvatures κ_1, κ_2, κ_3 of its associated Frenet curve $\boldsymbol{\gamma}$ in $\mathbb{E}^4$ are

$$\kappa_1(s) = \frac{\varkappa(s)}{\sqrt{2}}, \quad \kappa_2(s) = \frac{\varkappa(s)}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + 2\left(\frac{\tau(s)}{\varkappa(s)}\right)^2}, \quad \kappa_3(s) = -\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\tau(s)}{\varkappa(s)}\right)'}{1 + 2\left(\frac{\tau(s)}{\varkappa(s)}\right)^2}. \tag{6}$$

As per [3, Theorem 1.4.2], the shape curvature $\widetilde{\varkappa}(s) = \left(\frac{1}{\varkappa(s)}\right)'$ and the shape torsion $\widetilde{\tau}(s) = \frac{\tau(s)}{\varkappa(s)}$ of a non-helical Frenet curve $\boldsymbol{\alpha}$ in $\mathbb{E}^3$, and the shape curvatures $\widetilde{\kappa}_1(s) = \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)'$, $\widetilde{\kappa}_2(s) = \frac{\kappa_2(s)}{\kappa_1(s)}$, $\widetilde{\kappa}_3(s) = \frac{\kappa_3(s)}{\kappa_1(s)}$ of its associated Frenet curve $\boldsymbol{\gamma}$ in $\mathbb{E}^4$ are related in the following ways:

$$\widetilde{\kappa}_1(s) = \sqrt{2}\widetilde{\varkappa}(s), \quad \widetilde{\kappa}_2(s) = \sqrt{1 + 2\widetilde{\tau}^2(s)}, \quad \widetilde{\kappa}_3(s) = -\frac{2\widetilde{\tau}'(s)}{\widetilde{\varkappa}(1 + 2\widetilde{\tau}^2(s))}. \tag{7}$$

3 Main results

Based on the results of the previous section, the relations between the Frenet-Seret frame of $4D$-curve $\boldsymbol{\gamma}$ and the differential-geometric invariants of a non-helical $3D$-Frenet curve $\boldsymbol{\alpha}$, parametrized about an arc-length parameter s, are given in the next theorem.

Theorem 1. *Let* (4) *be a parametrization of a unit-speed non-helical Frenet curve* $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{E}^3$ *of class* C^4*, and let* $\widetilde{\varkappa}(s) \neq 0$ *and* $\widetilde{\tau}(s)$ *be the shape curvature and the shape torsion of* $\boldsymbol{\alpha}$*, respectively. Suppose that the curve* $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{E}^4$ *is defined by (5). Then the vector invariants* $\mathbf{T}(s)$*,* $\mathbf{N}_1(s)$*,* $\mathbf{N}_2(s)$*,* $\mathbf{N}_3(s)$ *of the unit-speed* $4D$*-Frenet curve* $\boldsymbol{\gamma}$ *can be expressed by the differential-geometric invariants of* $\boldsymbol{\alpha}$ *with the following equations:*

$$\mathbf{T}(s)=\mathcal{A}\boldsymbol{t}+\frac{\vec{e}_4}{\sqrt{2}},\quad \mathbf{N}_1(s)=\sqrt{2}\mathcal{A}\boldsymbol{n},\quad \mathbf{N}_2(s)=\frac{-\mathcal{A}\boldsymbol{t}+2\widetilde{\tau}(s)\mathcal{A}\boldsymbol{b}+\vec{e}_4/\sqrt{2}}{\sqrt{1+2\widetilde{\tau}^2(s)}},$$
$$\mathbf{N}_3(s)=-\frac{\sqrt{2}\widetilde{\tau}(s)\mathcal{A}\boldsymbol{t}+\sqrt{2}\mathcal{A}\boldsymbol{b}-\widetilde{\tau}(s)\vec{e}_4}{\sqrt{1+2\widetilde{\tau}^2(s)}}, \tag{8}$$

where $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ *is the Frenet frame of* $\boldsymbol{\alpha}$ *and* $\vec{e}_4$ *is the fourth coordinate unit vector in* $\mathbb{E}^4$.

Proof. The derivatives of $\boldsymbol{\gamma}$ up to fourth order are $\boldsymbol{\gamma}'(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'(s),y'(s),z'(s),1)^T$, $\boldsymbol{\gamma}''(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x''(s),y''(s),z''(s),0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}'''(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'''(s),y'''(s),z'''(s),0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}^{(4)}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{(4)}(s),y^{(4)}(s),z^{(4)}(s),0)^T$. They are linearly independent whenever

$$\begin{aligned}\det\Big(\boldsymbol{\gamma}'(s),\boldsymbol{\gamma}''(s),\boldsymbol{\gamma}'''(s),\boldsymbol{\gamma}^{(4)}(s)\Big)&=-\frac{1}{4}\det\big(\boldsymbol{\alpha}''(s),\boldsymbol{\alpha}'''(s),\boldsymbol{\alpha}^{(4)}(s)\big)\\&=-\frac{1}{4}(\varkappa(s))^5(\widetilde{\tau}(s))'\neq 0,\end{aligned}$$

which is true when the Frenet curve $\boldsymbol{\alpha}$ is a non-helical. It is easy to see that $\boldsymbol{\gamma}$ is a unit-speed Frenet curve with a unit tangential vector $\mathbf{T}(s)=\boldsymbol{\gamma}'(s)=\mathcal{A}\boldsymbol{t}+\vec{e}_4/\sqrt{2}$. Then, by applying Frenet-Serret formulas for the curves $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\gamma}$ and replacing the curvatures of $\boldsymbol{\gamma}$ from (6), we obtain (8), where $\widetilde{\tau}(s)=\tau(s)/\varkappa(s)$. □

The next statement gives us the relations between the focal curvatures of the $4D$-Frenet curve $\boldsymbol{\gamma}$, and the Euclidean and the shape curvatures of $\boldsymbol{\alpha}$, parametrized about an arc-length parameter s.

Theorem 2. *Let* (4) *be a parametrization of a unit-speed Frenet curve* $\boldsymbol{\alpha}:I\to\mathbb{E}^3$ *of class* C^4. *Then the focal curvatures* $C_1(s),C_2(s),C_3(s)$ *of the unit-speed* $4D$*-Frenet curve* $\boldsymbol{\gamma}$ *can be expressed by the Euclidean curvatures* $\varkappa(s)>0$, $\tau(s)$, *the shape curvatures* $\widetilde{\varkappa}(s)\neq 0$, $\widetilde{\tau}(s)$ *of the non-helical* $3D$*-Frenet curve* $\boldsymbol{\alpha}$, *and their derivatives by the following equations:*

$$C_1(s)=\frac{\sqrt{2}}{\varkappa(s)},\qquad C_2(s)=\frac{2\widetilde{\varkappa}(s)\widetilde{\tau}(s)}{\tau(s)\sqrt{1+2\widetilde{\tau}^2(s)}},$$
$$C_3(s)=-\frac{(1+2\widetilde{\tau}^2(s))^2+2\left(\left(\frac{\widetilde{\varkappa}(s)}{\tau(s)}\right)'\widetilde{\tau}(s)(1+2\widetilde{\tau}^2(s))+\frac{\widetilde{\varkappa}(s)}{\tau(s)}\widetilde{\tau}'(s)\right)}{\sqrt{2}\widetilde{\tau}'(s)\sqrt{1+2\widetilde{\tau}^2(s)}}. \tag{9}$$

Proof. Using that $\widetilde{\kappa}_1(s)=(1/\kappa_1(s))'$ and $\widetilde{\kappa}_2(s)=\kappa_2(s)/\kappa_1(s)$, from (3) we get $C_1(s)=1/\kappa_1(s)$, $C_2(s)=C_1'(s)/\kappa_2(s)=\widetilde{\kappa}_1(s)/\kappa_2(s)$, and

$$C_3(s)=\left(\frac{C_1(s)}{C_2(s)}C_1'(s)+C_2'(s)\right)\frac{1}{\kappa_3(s)}=\left(\frac{\kappa_2(s)}{\kappa_1(s)}+C_2'(s)\right)\frac{1}{\kappa_3(s)}=\frac{\widetilde{\kappa}_2(s)}{\kappa_3(s)}+\frac{C_2'(s)}{\kappa_3(s)}.$$

After some simplifications and rearrangements, we reach (9) by applying (6) and (7). □

Theorem 3. *Let* (4) *be a parametrization of a unit-speed Frenet curve* $\boldsymbol{\alpha}:I\to\mathbb{E}^3$ *of class* C^4, *and let* $\varkappa(s)>0$, $\tau(s)$, $\widetilde{\varkappa}(s)\neq 0$ *and* $\widetilde{\tau}(s)$ *be the Euclidean curvatures and the*

shape curvatures of $\boldsymbol{\alpha}$*, respectively. Suppose that the curve* $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{E}^4$ *is defined by* (5)*. Then the focal curve of* $\boldsymbol{\gamma}$ *has parametric representation*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{foc}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\beta}(s) + \frac{s - \widetilde{\tau}(s)U(s)}{\sqrt{2}} \cdot \vec{e}_4, \\ \boldsymbol{\beta}(s) &= \boldsymbol{\alpha}(s) + \widetilde{\tau}(s)U(s)\boldsymbol{t} + \frac{2}{\varkappa(s)}\boldsymbol{n} + \left(U(s) + \frac{2\widetilde{\varkappa}(s)}{\tau(s)}\right)\boldsymbol{b}, \end{aligned} \tag{10}$$

where $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ *is the Frenet frame of* $\boldsymbol{\alpha}$*,* $\boldsymbol{\beta}$ *is the generalized focal curve of* $\boldsymbol{\alpha}$*, and*

$$U(s) = \frac{1 + 2\widetilde{\tau}^2(s) + 2\left(\frac{\widetilde{\varkappa}(s)}{\tau(s)}\right)'\widetilde{\tau}(s)}{\widetilde{\tau}'(s)}. \tag{11}$$

Proof. From (2) and Theorems 1 and 2, we get to (10). □

Corollary 1. *Let* (4) *be a parametrization of a unit-speed Frenet curve* $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{E}^3$ *of class* C^4*, and let* $\varkappa(s) > 0$*,* $\tau(s)$*,* $\widetilde{\varkappa}(s) \neq 0$ *and* $\widetilde{\tau}(s)$ *be the Euclidean curvatures and the shape curvatures of* $\boldsymbol{\alpha}$*, respectively. Then the generalized focal curve* $\boldsymbol{\beta}$ *of* $\boldsymbol{\alpha}$ *can be represent as* $\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{foc}_{\boldsymbol{\alpha}}(s) + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(s)$*, where* $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \widetilde{\tau}(s)U(s)\boldsymbol{t} + \boldsymbol{n}/\varkappa(s) + (U(s) + \widetilde{\varkappa}(s)/\tau(s))\boldsymbol{b}$*,* $U(s)$ *is defined by* (11)*, and* $\boldsymbol{foc}_{\boldsymbol{\alpha}}$ *is the focal curve of* $\boldsymbol{\alpha}$*.*

Proof. The proof follows from $\boldsymbol{foc}_{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + \boldsymbol{n}/\varkappa(s) + (\widetilde{\varkappa}(s)/\tau(s))\boldsymbol{b}$ and (10). □

We can assume that the sphere is centred at the origin, without losing the generality. With all that has been discussed so far, and with the well-known equality $0 = \tau/\varkappa + ((1/\varkappa)'/\tau)' = \widetilde{\tau} + (\widetilde{\varkappa}/\tau)'$ which characterizes the spherical curves in $\mathbb{E}^3$, we can arrive at the following theorem:

Theorem 4. *Let* (4) *be a parametrization of a unit-speed non-helical spherical curve* $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{E}^3$ *of class* C^4 *with a Frenet frame* $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$*, and let* $\varkappa(s) > 0$*,* $\tau(s)$*,* $\widetilde{\varkappa}(s) \neq 0$ *and* $\widetilde{\tau}(s)$ *be the Euclidean curvatures and the shape curvatures of* $\boldsymbol{\alpha}$*, respectively. Then the generalized focal curve* $\boldsymbol{\beta}$ *of* $\boldsymbol{\alpha}$ *has parametric equation*

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \frac{\widetilde{\tau}(s)}{\widetilde{\tau}'(s)}\boldsymbol{t} + \frac{1}{\varkappa(s)}\boldsymbol{n} + \left(\frac{1}{\widetilde{\tau}'(s)} + \frac{\widetilde{\varkappa}(s)}{\tau(s)}\right)\boldsymbol{b}.$$

References

[1] A. T. Ali. Position vector of general helices in Euclidean 3-space. *Bull. Math. Anal. Appl.*, **3** (2011), 1–8.

[2] T. F. Banchoff, S. T. Lovett. Differential Geometry of Curves and Surfaces, 2nd ed. CRC/Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL, 2016.

[3] C. L. Dinkova, R. P. Encheva. Some relations between the shape curvatures of a three-dimensional Frenet curve and its associated four-dimensional Frenet curve. *Proceedings of the International Scientific Conference IMEA'2024*, (2024).

[4] R. P. Encheva, G. H. Georgiev. Shapes of space curves. *J. Geom. Graph.*, **7** (2003), 145–155.

[5] R. P. Encheva, G. H. Georgiev. Curves on the shape spere. *Result. Math.*, **44** (2003), 279–288.

[6] R. P. Encheva, G. H. Georgiev. Similar Frenet curves. *Result. Math.*, **55** (2009), 359–372.

[7] G. H. Georgiev. Generalized focal curves of spherical curves. *AIP Conference Proceedings*, **2505** (2022), article no. 070004.
[8] G. H. Georgiev, C. L. Dinkova. Focal curves of geodesics on generalized cylinders. *ARPN J. Eng. Appl. Sci.*, **14** (2019), 2058-–2068.
[9] G. H. Georgiev, C. L. Dinkova. Generalized focal curves of Frenet curves in three-dimensional Euclidean space. *Glob. J. Pure Appl. Math.*, **16** (2020), 891–913.
[10] G. H. Georgiev, R. P. Encheva, C. L. Dinkova. Geometry of cylindrical curves over plane curves. *Appl. Math. Sci.*, **113** (2015), 5637–5649.
[11] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
[12] H. Gluck. Higher curvatures of curves in Euclidean space. *Amer. Math. Mon.*, **73** (1966), 699–704.
[13] S. Izumiya, N. Takeuchi. Special curves and ruled surfaces. *Beitr. Algebr. Geom.*, **44** (2003), 203–212.
[14] R. Uribe-Vargas. On vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves. *Bull. Braz. Math. Soc.*, **36** (2005), 285—307.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

ON A PROBLEM FROM THE BOOK "APPROXIMATION OF FUNCTIONS" BY G. G. LORENTZ

Teodora Zapryanova[1], **Diko Souroujon**[2]

Department of Statistics and Applied Mathematics,
University of Economics, Varna, Bulgaria
e-mails: [1]teodorazap@ue-varna.bg, [2]diko_souroujon@ue-varna.bg

We generalize and give a new solution to one famous problem in approximation theory from the book "Approximation of Functions" by G.G. Lorentz.

Keywords: Finite difference, Moduli of smoothnes, K-functional, Algebraic polynomials, Linear operator

ВЪРХУ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ КНИГАТА "АПРОКСИМАЦИЯ НА ФУНКЦИИ" НА ДЖ. Г. ЛОРЕНЦ

Теодора Запрянова[1], **Дико Суружон**[2]

Катедра "Статистика и приложна математика",
Икономически университет, Варна, България
e-mails: [1]teodorazap@ue-varna.bg, [2]diko_souroujon@ue-varna.bg

Обобщаваме и предлагаме ново решение на една известна задача в теорията на апроксимациите от книгата "Апроксимация на функции" на Дж.Г. Лоренц.

Ключови думи: Крайни разлики, Модули на гладкост, K-функционали, Алгебрични полиноми, Линеен оператор

1. Introduction. Theorems concerning equivalence between K-functionals and moduli of smoothness are well-known results in approximation theory (see, e.g., [1, p. 177], [2, p. 11], [3]). If $D^r g = g^{(r)}$, $X = L_p = L_p[a,b]$ with the usual L_p-norm denoted by $\|\cdot\|_p$, for $1 \leq p < \infty$, or $X = C[a,b]$ with the uniform norm denoted by $\|\cdot\|_\infty$, and $Y \subseteq (D^r)^{-1}(X) = \{g \in X : D^r g \in X\}$, the K-functional has the form

$$K(f,t;X,Y,D^r) = \inf_{g\in Y} \big\{ \|f-g\|_X + t\|D^r g\|_X \big\}.$$

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.046-050

2020 Mathematics Subject Classification: 47A10; 41A25.

The classical moduli of smoothness are defined by

$$\omega^r(f,t)_p = \sup_{0<h\le t} \|\Delta_h^r f\|_p \qquad \text{for } r = 1, 2, \dots \text{ and } 0 \le t \le (b-a)/r,$$

and the finite difference with a fixed step h is given by

$$\Delta_h^r f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{r} (-1)^{r+k} \binom{r}{k} f(x+kh) & \text{if } x, x+rh \in [a,b], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The space AC_{loc}^k is given by

$$AC_{loc}^k = AC_{loc}^k(a,b) = \left\{ g : g^{(1)}, \dots, g^{(k)} \in AC[c,d] \text{ for all } a < c < d < b \right\},$$

where $AC[c,d]$ is the set of absolutely continuous functions on $[c,d]$. As already mentioned, the moduli $\omega^r(f,t)_p$ and $K(f,t^r; L_p, AC_{loc}^{r-1}, D^r)$ are equivalent. For example, Theorem 2.1.1 in [2, Chapter 2] states that (in the case where the weight function $\varphi \equiv 1$), there exist positive constants C and t_0 such that

$$C^{-1}\omega^r(f,t)_p \le K(f,t^r; L_p, AC_{loc}^{r-1}, D^r) \le C\omega^r(f,t)_p,$$

for $f \in L_p(a,b)$, $1 \le p \le \infty$, $0 < t \le t_0$.

Using the equivalence between moduli of smoothness and appropriate K-functionals, we present a solution to the following:

Problem 1. *Let $f \in C[a,b]$ and $r \in \mathbb{N}$. Prove that $\omega^r(f,t)_\infty = 0$ for some real number $t > 0$ if and only if f is a polynomial of degree $r-1$.*

Problem 1 is a generalization of the following problem in [4, p. 52]: *Prove that a function $f \in C[a,b]$ is linear if and only if $\omega^2(f,t)_\infty = 0$ for some $t > 0$.*

We give a solution to Problem 1 in the general case and a new solution in the particular case $r = 2$.

2. Solution to Problem 1. In what follows, we shall use the notation $\omega^r(f,t) = \omega^r(f,t)_\infty$ and $\|\cdot\|$ for the uniform norm on the space $C[a,b]$.

If f is a polynomial of degree $r-1$, then

$\Delta_h f$ is a polynomial of degree $r-2$,

$\Delta_h^2 f = \Delta_h(\Delta_h f)$ is a polynomial of degree $r-3$,

$\dots$

$\Delta_h^{r-1} f = \Delta_h(\Delta_h^{r-2} f)$ is a polynomial of degree 0, i.e. a constant,

$\Delta_h^r f = \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f) \equiv 0$;

hence for all $t > 0$, we have $\omega^r(f,t) = 0$.

Now, let $\omega^r(f,t) = 0$ for some $t > 0$. If

$$K(f,t^r) = \inf_{g \in AC_{loc}^r} \left\{ \|f-g\| + t^r \|g^{(r)}\| \right\},$$

then

$$C^{-1}\omega^r(f,t) \le K(f,t^r) \le C\omega^r(f,t),$$

for some positive constant C, i.e. $K(f,t^r) = 0$ for some $t > 0$. Hence, if n is a sufficiently large natural number, then there exists a function $g = g_n$ such that

$$\|f-g\| \le 1/n \qquad \text{and} \qquad \|g^{(r)}\| \le 1/n, \tag{1}$$

where $g \in C^{r-1}[a,b]$ and $g^{(r-1)} \in AC_{loc}[a,b]$.

Expanding g by Taylor's formula,

$$g(x) = g(x_0) + g^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \cdots + g^{(r-1)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{r-1}}{(r-1)!} + g^{(r)}(\xi)\frac{(x - x_0)^r}{r!},$$

where $x_0 \in (a, b)$, and denoting

$$P_{r-1,n}(x) = g(x_0) + g^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \cdots + g^{(r-1)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{r-1}}{(r-1)!},$$

we have, using (1) with $g = g_n$, for all $x \in [a, b]$,

$$|g_n(x) - P_{r-1,n}(x)| \le \frac{\|g_n^{(r)}\|(b-a)^r}{r!} \le \frac{c}{n}. \tag{2}$$

Now, from (2) and the first inequality in (1), we get, for all $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - P_{r-1,n}(x)| \le |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - P_{r-1,n}(x)| \le \frac{1+c}{n}. \tag{3}$$

Since $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + c)/n = 0$ and $f \in C[a, b]$, we obtain from (3),

$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_{r-1,n}\| = 0. \tag{4}$$

Since the degree of all $P_{r-1,n}$ polynomials is at most $r - 1$, using (4), we will prove that f is also a polynomial of degree at most $r - 1$. Indeed, let

$$P_{r-1,n}(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \cdots + a_{r-1}^{(n)}x^{r-1},$$

where the coefficients $a_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$ depend on n, and let us fix x_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ such that

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_r < b. \tag{5}$$

Then

$$\begin{cases} a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x_1 + \cdots + a_{r-1}^{(n)}x_1^{r-1} = f(x_1) + \varepsilon_1^{(n)} \\ a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x_2 + \cdots + a_{r-1}^{(n)}x_2^{r-1} = f(x_2) + \varepsilon_2^{(n)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x_r + \cdots + a_{r-1}^{(n)}x_r^{r-1} = f(x_r) + \varepsilon_r^{(n)}, \end{cases}$$

for some real numbers $\varepsilon_i^{(n)}$. Since $|\varepsilon_i^{(n)}| = |P_{r-1,n}(x_i) - f(x_i)| \le \|f - P_{r-1,n}\|$, it follows from (4) that

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_i^{(n)} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{6}$$

From (5), the Vandermonde determinant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{r-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_r & x_r^2 & \ldots & x_r^{r-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

does not depend on n. Then

$$a_i^{(n)} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \ldots & x_1^{i-1} & f(x_1) + \varepsilon_1^{(n)} & x_1^{i+1} & \ldots & x_1^{r-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & x_r^{i-1} & f(x_r) + \varepsilon_r^{(n)} & x_r^{i+1} & \ldots & x_r^{r-1} \end{vmatrix}, \qquad i = 0, 1, \ldots, r-1.$$

From (6), it is clear that the following limits exist

(7)
$$\lim_{n\to\infty} a_i^{(n)} = a_i := \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \dots & x_1^{i-1} & f(x_1) & x_1^{i+1} & \dots & x_1^{r-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & x_r^{i-1} & f(x_r) & x_r^{i+1} & \dots & x_r^{r-1} \end{vmatrix}, \qquad i = 0, 1, \dots, r-1.$$

Since the interval $[a, b]$ is bounded, we obtain from (7),

(8)
$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0^{(n)} + a_1^{(n)} x + \dots + a_{r-1}^{(n)} x^{r-1}\right) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{r-1} x^{r-1}.$$

If
$$P_{r-1}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{r-1} x^{r-1},$$
from (4) and (8) we get
$$\lim_{n\to\infty} P_{r-1,n} = f \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} P_{r-1,n} = P_{r-1}.$$
From the uniqueness of the limit, it follows that
$$f(x) = P_{r-1}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{r-1} x^{r-1},$$
i.e. f is a polynomial of degree at most $r-1$. The proof is completed.

Remark 1. *The conclusion that* $\lim_{n\to\infty} P_{r-1,n}$ *is a polynomial of degree* $r-1$ *can be obtained by using the fact that every finite linear subspace of a complex topological vector space is closed, see [6, Theorem 1.21].*

We can formulate the following generalization:

Problem 2. *Prove that if* $f \in C[a, b]$, $r \in \mathbb{N}$ *and* $\omega^r(f, t) = o(t^r)$, *as* $t \to 0+$, *then* f *is a polynomial of degree* $r-1$.

Proof. As in the proof above, we use that moduli of smoothness are equivalent to proper K-functionals:
$$K(f, t^r) = \inf_{g\in AC_{loc}^r} \left\{\|f - g\| + t^r \|g^{(r)}\|\right\} \sim \omega^r(f, t) = o(t^r),$$
so putting $t = 1/n$, we obtain that, as $n \to \infty$,
$$K(f, n^{-r}) = o(n^{-r}).$$
Then for any natural number n, there exists a function $g_n \in C[a, b]$ such that $g_n \in AC_{loc}^r$, $\|f - g_n\| = o(n^{-r})$ and $n^{-r}\|g_n^{(r)}\| = o(n^{-r})$. Hence
$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = 0 \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} \|g_n^{(r)}\| = 0,$$
which is analogous to the inequalities in (1). As in the proof above, we conclude that f is a polynomial of degree no greater than $r-1$. □

3. New solution to Problem 1 in the case $r = 2$. We will prove that if $f \in C[a, b]$ and $\omega^2(f, t) = 0$ for some $t > 0$, then f is a linear function. Without loss of generality, we can assume that $f \in C[0, 1]$. For any natural number n, the Bernstein operator is defined by
$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{for } x \in [0, 1].$$
Theorem 3.2 in [5] (see also [1]) states that the following inequality holds true:
$$|f(x) - B_n(f; x)| \le C\omega^2(f, \sqrt{X/n}),$$

for all $x \in (0,1)$ and some constant $C > 0$, where $X = x(1-x)$. In particular, when $n = 1$,

$$|f(x) - B_1(f;x)| \leq C\omega^2(f, 1/2)$$

for all $x \in (0,1)$. But from the properties of moduli, see [1, p. 45, (7.7)],

$$\omega^2(f, 1/2) = \omega^2\left(f, N\frac{1}{2N}\right) \leq N^2\omega^2\left(f, \frac{1}{2N}\right) = 0,$$

for a sufficiently large natural number N such that $1/2N < t$. Then $\omega^2(f, 1/2) = 0$ and $|f(x) - B_1(f;x)| = 0$, for $x \in [0,1]$, i.e.

$$f(x) = B_1(f;x) = f(0)(1-x) + f(1)x = (f(1) - f(0))x + f(0),$$

is a linear function.

References

[1] R.A. DeVore, G.G. Lorentz. Constructive Approximation. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[2] Z. Ditzian, V. Totik. Moduli of Smoothness. Springer-Verlag, New-York, 1987.

[3] H. Johnen, K. Scherer. On the equivalence of K-functionals and moduli of continuity and some applications. *Lecture Notes in Math.*, **571** (1976), 119-140.

[4] G.G. Lorentz. Approximation of Functions. Chelsea Publishing Company, New York, 1986.

[5] T. Popoviciu. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. *Mathematica Cluj*, **10** (1935), 49-54, (in French).

[6] W. Rudin. Functional Analysis, 2nd edn. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

PROBABILITIES FOR ASYMMETRIC p-OUTSIDE VALUES

Pavlina K. Jordanova
Faculty of Mathematics and Informatics,
Konstantin Preslavsky University of Shumen, Shumen, Bulgaria
e-mail: pavlina_kj@abv.bg

Since 2017, Jordanova and co-authors investigate probabilities for p-outside values and determine their explicit forms in many particular cases. They show that they are closely related to the concept of heavy tails. Tukey's box-plots are very popular and useful in practice. In particular, the relative frequencies for observing a data point in different sections of the box-plot can help practitioners find the exact probability distribution of the underlying random variable. These open the door to working with distribution-sensitive estimators, which can be more accurate, especially in small sample investigations. All these methods, however, suffer from the drawback that they use the interquantile range in a symmetric way. This study gives greater influence on asymmetry in the analysis of the tails of distributions. New theoretical and empirical box-plots and characteristics of the tails of distributions are suggested. The theoretical asymmetric p-outside value functions do not depend on the center and scaling factor of the distribution and do not need existence of moments. Therefore, they are appropriate for comparing the tails of distributions and for estimating the parameters that govern their tail behaviour.

Keywords: heavy-tailed distributions, extremal index estimation.

ВЕРОЯТНОСТИ ЗА АСИМЕТРИЧНИ p-ВЪНШНИ СТОЙНОСТИ

Павлина К. Йорданова
Факултет по математика и информатика,
Шуменски университет "Епископ Константин Преславски", Шумен, България
e-mail: pavlina_kj@abv.bg

От 2017 г. Йорданова и съавтори изследват вероятностите за p-външни стойности и намират техния явен вид в много конкретни случаи. Те показват, че тези вероятности са тясно свързани с концепцията за тежки опашки. Кутиите с мустачки на Тюки са много популярни и полезни на практика. Относителните честоти на събитията дадено наблюдение да попадне в различни техни части допринасят за намирането

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.051-060
2020 Mathematics Subject Classification: 60E05, 62F10.

на точното вероятностно разпределение на наблюдаваната величина. Те правят възможна работата с чувствителни към разпределението оценки, които могат да бъдат по-точни, особено при малки извадки. Всички тези методи, обаче страдат от недостатъка, че използват междуквантилния размах по симетричен начин. Резултатите от това изследване позволяват по-голямо влияние на асиметрията върху анализа на опашките на разпределенията. Предложени са нови техни теоретични и емпирични графики и характеристики. Асиметричните функции на външните стойности не зависят от центъра и коефициента на мащабиране на разпределението и нямат нужда от съществуване на моменти. Те са подходящи за сравняване на опашките и за оценяване на параметрите, които управляват тяхното поведение.

Ключови думи: разпределения с тежки опашки, оценки на екстремалния индекс

1. Introduction. Throughout this work, we consider a sample of independent identically distributed (i.i.d.) observations $X_1, \ldots, X_n$ on a random variable (r.v.) X and the corresponding increasing order statistics $X_{1:n} \le \ldots \le X_{n:n}$. Denote the right-continuous version of the cumulative distribution function (c.d.f.) of X by $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$ and its quantile function (generalized left-continuous inverse) by $F_X^{\leftarrow}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \ge p\}$, $p \in (0, 1]$. We assume that F_X is continuous, $F_X^{\leftarrow}(0) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = 0\}$, and $\sup \emptyset = -\infty$. The empirical p-quantiles can be defined in different ways. We restrict ourselves to the version defined via the empirical c.d.f.,

$$F_n(x) := \begin{cases} 0, & x < X_{1:n}; \\ \dfrac{i}{n}, & x \in [X_{i:n}; X_{i+1:n}); \\ 1, & x \ge X_{n:n}, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Then $F_n(X_{i:n}) = i/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Assume that $F_n^{\leftarrow}(0) = X_{1:n}$ and, for $p \in ((i-1)/n, i/n]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, define the empirical quantile function by

$$F_n^{\leftarrow}(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \ge p\} = X_{\lceil np \rceil:n} = X_{i:n}, \tag{2}$$

where $\lceil a \rceil$ is the ceiling of a, i.e. the smallest integer greater than or equal to a. See, e.g., [2, 5, 10]. The above can be implemented in R using the function *quantile* with parameter $Type = 1$ [9]. Then $F_n^{\leftarrow}(i/n) = X_{i:n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

In 1977-1978, Tukey et al. [11, 8] defined the box-and-whisker plots. In [1], there is a definition for mild and extreme outliers related to similar extremal box-plots. These works define outliers as points isolated to varying degrees from the center of the distribution, without taking into account the exact distribution of the observed r.v. Given a sample of independent observations on a r.v. of a fixed probability type, the authors of [6] compute the probabilities of an observation to be a mild or extreme outlier and suggest to classify the tails of the linear probability types with respect to these probabilities. The latter, compared with Devore's plots for extreme outliers, allows one to determine approximately the distribution of the observed r.v. Later, Jordanova and co-authors [7, 4, 5] generalize these results for arbitrary $p \in (0, 0.5]$. They investigate the probabilities for p-outside values and determine them in many particular cases. All these results suffer from the drawback that they use the interquartile range (IQR) in a symmetric way. More precisely, the midpoint of the interval between the p-th and $(1-p)$-th quantile coincides with the midpoint of the interval between the corresponding left and right p-fences. It

is well-known that the tail behaviour is not obligatory symmetric with respect to the center of the distribution. Here, we give greater influence to asymmetry when analyzing the tails of distributions and improve these results. We suggest new theoretical and empirical asymmetric p-box-plots and corresponding probabilities for asymmetric left and right p-outside values. We then find their explicit forms in the Pareto and Fréchet cases. This allows us to improve the existing classification of distributions in terms of their tail behaviour. Finally, we present how these characteristics can help us find the most appropriate classes of distributions for fitting the corresponding distribution of the observed r.v.

This work mainly considers the right tails of distributions in the case where there are positive probabilities for right p-outside values. There are many cases where these probabilities are zero. In these cases, we do not need to estimate the parameter which governs the tail behaviour. Therefore, these cases are not the subject of this study. Analogous results for the left tails can be easily obtained by multiplying the considered r.v. by -1.

2. Definitions and preliminaries.

Definition 1. *Fix $p \in (0, 0.5]$. We call the* **theoretical asymmetric right p-fence** *the value of*

$$\begin{aligned} R^A(F_X, p) \equiv R^A(X, p) &:= F_X^{\leftarrow}(1-p) + 2\frac{1-p}{p}(F_X^{\leftarrow}(1-p) - F_X^{\leftarrow}(0.5)) \\ &= \frac{2-p}{p}F_X^{\leftarrow}(1-p) - 2\frac{1-p}{p}F_X^{\leftarrow}(0.5) \\ &= F_X^{\leftarrow}(0.5) + \frac{2-p}{p}(F_X^{\leftarrow}(1-p) - F_X^{\leftarrow}(0.5)). \end{aligned}$$

The corresponding function of $p \in (0, 0.5]$ is called the **theoretical asymmetric right fence function**.

Definition 2. *Fix $p \in (0, 0.5]$. We call the* **theoretical asymmetric left p-fence** *the value of*

$$\begin{aligned} L^A(F_X, p) \equiv L^A(X, p) &:= F_X^{\leftarrow}(p) - 2\frac{1-p}{p}(F_X^{\leftarrow}(0.5) - F_X^{\leftarrow}(p)) \\ &= \frac{2-p}{p}F_X^{\leftarrow}(p) - 2\frac{1-p}{p}F_X^{\leftarrow}(0.5) \\ &= F_X^{\leftarrow}(0.5) - \frac{2-p}{p}(F_X^{\leftarrow}(0.5) - F_X^{\leftarrow}(p)). \end{aligned}$$

The corresponding function of $p \in (0, 0.5]$ is called the **theoretical asymmetric left fence function**.

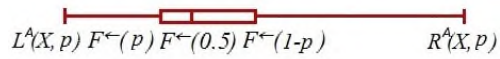


Figure 1: Scheme of asymmetric theoretical box-plot.

Figure 1 depicts an example of the placement of asymmetric fences with respect to the center of the distribution in the case when $p = 0.25$.

Definition 3. *Fix $p \in (0, 0.5]$. We denote by*

$$p_{A,R,p}(X) \equiv p_{A,R,p}(F_X) := \mathbb{P}(X > R^A(F_X, p))$$

the probability that a r.v. X exceeds the theoretical asymmetric right p-fence of its distribution, and call it the **probability for asymmetric right p-outside value**. *The corresponding function $p_{A,R,p}(X)$ of $p \in (0, 0.5]$ is called the* **theoretical asymmetric right outside value function**.

Definition 4. *Fix $p \in (0, 0.5]$. We denote by*

$$p_{A,L,p}(X) \equiv p_{A,L,p}(F_X) := \mathbb{P}(X < L^A(F_X, p))$$

the probability that a r.v. X is less than the theoretical asymmetric left p-fence of its distribution, and call it the **probability for asymmetric left p-outside value**. *The corresponding function $p_{A,L,p}(X)$ of $p \in (0, 0.5]$ is called the* **theoretical asymmetric left outside value function**.

The main but easy to prove property of these probabilities is that, for any constants $a \in \mathbb{R}$ and $b > 0$,

$$p_{A,L,p}(X) = p_{A,L,p}\left(\frac{X+a}{b}\right) \quad \text{and} \quad p_{A,R,p}(X) = p_{A,R,p}\left(\frac{X+a}{b}\right). \tag{3}$$

This means that they do not depend on the center and scaling factor of the distribution. Therefore, they are very suitable for comparison of the tails of distributions and estimation of the coefficients which govern the tail behaviour. Here again we must clarify that if the scaling is negative, then we have to change our considerations, and instead of the left tail the results are for the right tail and vice versa. The most important case is $p_{A,L,p}(-X) = p_{A,R,p}(X)$, because $p_{A,L,p}(-bX) = p_{A,R,p}(X)$, for any $b > 0$.

Another interesting property is that these probabilities are invariant with respect to exceedances of the distribution. More precisely, for all $p \in (0, 0.5]$ and $t \in \mathbb{R}$ such that $\mathbb{P}(X < t) > 0$,

$$p_{A,L,p}(X - t|X > t) = p_{A,L,p}(X|X > t), \quad p_{A,R,p}(X - t|X > t) = p_{A,R,p}(X|X > t).$$

Remark. The asymmetric outside values depend on the distribution of the considered r.v. An observation can be an asymmetric p-outside value with respect to (w.r.t.) a distribution, and for the same p, not be an asymmetric p-outside value w.r.t. another probability law. In this way, one can chose the probability type that fits the data in the best way.

By plugin the estimators (1) and (2) in the above four definitions, we obtain the corresponding empirical counterparts.

Definition 5. *Fix $p \in (0, 0.5]$. The* **empirical asymmetric right p-fence** *is*

$$\begin{aligned} R_n^A(p) &:= F_n^{\leftarrow}(1-p) + 2\frac{1-p}{p}(F_n^{\leftarrow}(1-p) - F_n^{\leftarrow}(0.5)) \\ &= \frac{2-p}{p}F_n^{\leftarrow}(1-p) - 2\frac{1-p}{p}F_n^{\leftarrow}(0.5) \\ &= F_n^{\leftarrow}(0.5) + \frac{2-p}{p}(F_n^{\leftarrow}(1-p) - F_n^{\leftarrow}(0.5)). \end{aligned}$$

The corresponding function of $p \in (0, 0.5]$ is called the **empirical asymmetric right fence function**.

Definition 6. *Fix $p \in (0, 0.5]$. The* **empirical asymmetric left p-fence** *is*

$$\begin{aligned} L_n^A(p) &:= F_n^{\leftarrow}(p) - 2\frac{1-p}{p}(F_n^{\leftarrow}(0.5) - F_n^{\leftarrow}(p)) \\ &= \frac{2-p}{p}F_n^{\leftarrow}(p) - 2\frac{1-p}{p}F_n^{\leftarrow}(0.5) \\ &= F_n^{\leftarrow}(0.5) - \frac{2-p}{p}(F_n^{\leftarrow}(0.5) - F_n^{\leftarrow}(p)). \end{aligned}$$

The corresponding function of $p \in (0, 0.5]$ is called the **empirical asymmetric left fence function**.

Definition 7. *Fix $p \in (0, 0.5]$. We call the* **empirical asymmetric right (or left) p-outside values** *the observations X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ that are bigger (or smaller) than $R_n^A(p)$ (or $L_n^A(p)$).*

Definition 8. *Fix $p \in (0, 0.5]$. The relative frequency of the observations X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ that are bigger (or smaller) than $R_n^A(p)$ (or $L_n^A(p)$) is called the* **plug-in estimator of the probability for asymmetric right (or left) p-outside value**. *We denote them by $\hat{p}_{A,L}(p)$ (or $\hat{p}_{A,R}(p)$).*

Analogously to the results in [5, Section 3.3], it can be shown that under relatively general conditions the empirical asymmetric right(left) p-fences are asymptotically unbiased, asymptotically normal, weakly consistent, and asymptotically efficient estimators for the corresponding theoretical asymmetric right(left) p-fences. Moreover, the latter plug-in estimators are weakly consistent and, under mild conditions, are asymptotically unbiased and asymptotically efficient estimators for the corresponding probabilities for asymmetric p-outside values.

3. Particular cases. Probabilities for extreme outliers (or "0.25-outside values") for the probability distributions considered in this section are computed in [7, 4, 5]. Here, we determine theoretical asymmetric fence functions and theoretical asymmetric outside value functions for four particular cases: exponential, Pareto, Fréchet, and log-logistic. We consider $p \in (0, 0.5]$ and, due to property (3), without lost of generality, we chose the simplest parametric form of the considered linear probability types.

Exponential l-type. Let X be a r.v. with c.d.f. $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ for $x \geq 0$, and $F_X(x) = 0$ otherwise. Then $F_X^{\leftarrow}(p) = -\log(1-p)$ and $R^A(X, p) = -(2-p)\log(p)/p - 2(1-p)\log(2)/p$. In this case, $L^A(X, p) = -(2-p)\log(1-p)/p - 2(1-p)\log(2)/p$. The plots of $p_{A,R,p}(X) = p^{(2-p)/p}4^{(1-p)/p}$ and $p_{R,p}(X)$, see [3, 5], are presented in Figure 2. For $p \in (0, p_0]$, where p_0 is the solution of $(2-p)\log(1-p) + 2(1-p)\log(2) = 0$, i.e. $p_0 \approx 0,4041$, we have $p_{A,L,p}(X) = 0$. When $p \in (p_0, 0.5]$, we have $p_{A,L,p}(X) = 1 - (1-p)^{(2-p)/p}4^{(1-p)/p}$. In particular, $p_{A,R,0.25}(X) = 1/256 \approx 0.0039$.

Pareto l-type with positive shape parameter $\xi = \alpha^{-1} > 0$. In this case, X is a r.v. with c.d.f. $F_X(x) = 1 - x^{-1/\xi}$ for $x \geq 1$, and $F_X(x) = 0$ otherwise. Then $F_X^{\leftarrow}(p) = (1-p)^{-\xi}$ and $R^A(X, p) = (2-p)/p^{1+\xi} - (1-p)2^{\xi+1}/p$. Now, $L^A(X, p) = (2-p)/(p(1-p)^{\xi}) - (1-p)2^{\xi+1}/p$. The plots of $p_{A,R,p}(X) = ((2-p)/p^{1+\xi} - (1-p)2^{\xi+1}/p)^{-1/\xi}$ and $p_{R,p}(X)$, see [3, 5], for different values of the shape parameter ξ, are presented in Figure 3. We observe that the larger the parameter ξ, the greater these probabilities are. This corresponds to the well-known result from extreme value theory that the greater the parameter ξ, the heavier the right tail of the distribution. Analogously, for $p \in (0, p_0]$, where p_0 is the solution of $(2-p)(1-p)^{-\xi} - 2^{\xi+1}(1-p) = p$, we have $p_{A,L,p}(X) = 0$,

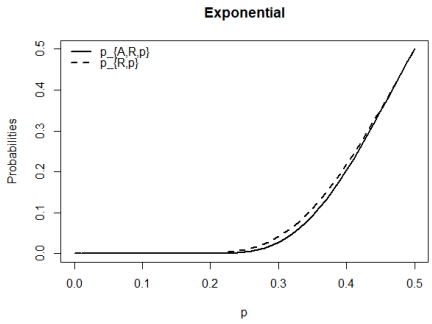


Figure 2: $p_{A,R,p}(X)$ (solid line) and $p_{R,p}(X)$ (dashed line) in the exponential case.

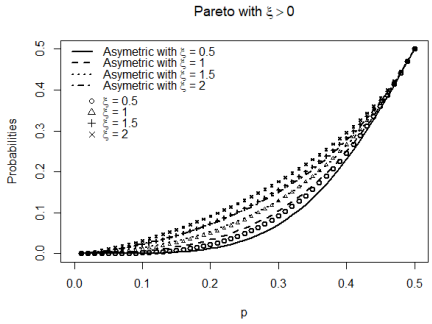


Figure 3: $p_{A,R,p}(X)$ and $p_{R,p}(X)$ in the Pareto cases.

and $p_{A,L,p}(X) = 1 - ((2-p)/(p(1-p)^{\xi}) - (1-p)2^{\xi+1}/p)^{-1/\xi}$, for $p \in (p_0, 0.5]$.

Fréchet l-type with parameter $\alpha > 0$. Let us now consider a r.v X with c.d.f. $F_X(x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}$ for $x \geq 0$, and $F_X(x) = 0$ otherwise. In this case, the quantile function is $F_X^{\leftarrow}(p) = (-\log(p))^{-1/\alpha}$. Therefore, Definitions 1 and 2 entail

$$L^A(X,p) = \frac{(2-p)}{p}(-\log(p))^{-\frac{1}{\alpha}} - 2\frac{1-p}{p}(\log(2))^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$R^A(X,p) = \frac{(2-p)}{p}(-\log(1-p))^{-\frac{1}{\alpha}} - 2\frac{1-p}{p}(\log(2))^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

In this case, $L^A(X,p) \geq 0$ if and only if $(2-p)(-\log(p))^{-1/\alpha} \geq 2(1-p)(\log(2))^{-1/\alpha}$ if and only if $(-\log(2)/\log(p))^{1/\alpha} \geq 2(1-p)/(2-p)$ if and only if $\log(-\log(2)/\log(p)) \geq \alpha \log(2(1-p)/(2-p))$ if and only if $\alpha \geq \log(-\log(2)/\log(p))/\log(2(1-p)/(2-p))$. The last consideration means that if we denote by $\alpha_0 := \log(-\log(2)/\log(p))/\log(2(1-p)/(2-p))$, then for $\alpha \in (0, \alpha_0]$, we have $p_{A,L,p}(X) = 0$, and for $\alpha > \alpha_0$, letting p_0 be the solution of $(2-p)(-\log(p))^{-1/\alpha} = 2(1-p)(\log(2))^{-1/\alpha}$, we have, for $p \in (0, p_0]$, that $p_{A,L,p}(X) = 0$ and, for $p \in (p_0, 0.5]$,

$$p_{A,L,p}(X) = \exp\left\{-\left(\frac{1}{p}(-\log(p))^{-\frac{1}{\alpha}} - \frac{1-p}{p}(\log(2))^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha}\right\}.$$

Analogously, we obtain $R^A(X,p) \geq 0$, for all $\alpha > 0$ and $p \in (0, 0.5]$. Therefore,

$$p_{A,R,p}(X) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{(2-p)}{p}(-\log(1-p))^{-\frac{1}{\alpha}} - 2\frac{1-p}{p}(\log(2))^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha}\right\}.$$

In this case, the plots of $p_{A,R,p}(X)$ and $p_{R,p}(X)$ (the latter is defined in [3, 5]) as functions of p and for different values of the parameter α could be seen in Figure 4. We observe that the smaller the parameter α, the greater these probabilities are and the heavier the right tail of the distribution.

Log-logistic l-type with parameter $\alpha > 0$. Let X be a r.v. with c.d.f. $F_X(x) = 1/(1+x^{-\alpha})$ for $x \geq 0$, and $F_X(x) = 0$ otherwise. This c.d.f. corresponds to $F_X^{\leftarrow}(p) = (p/(1-p))^{1/\alpha}$, $R^A(X,p) = (2-p)((1-p)/p)^{1/\alpha}/p - 2(1-p)/p$ and $L^A(X,p) = (2-$

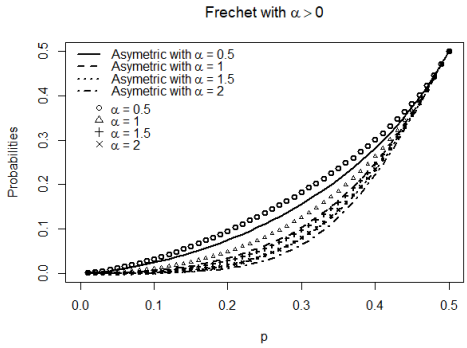


Figure 4: $p_{A,R,p}(X)$ and $p_{R,p}(X)$ in the Fréchet cases.

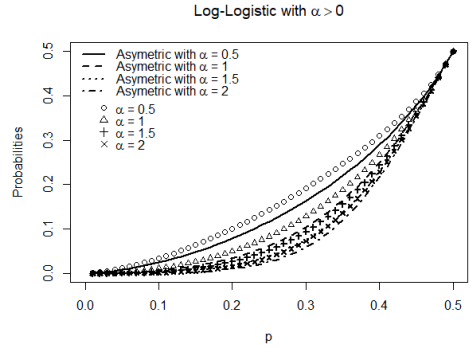


Figure 5: $p_{A,R,p}(X)$ and $p_{R,p}(X)$ in the Log-Logistic cases.

$p)(p/(1-p))^{1/\alpha}/p - 2(1-p)/p$. The latter means that $L^A(X,p) \geq 0$ if and only if $\alpha \geq \alpha_0 \geq 0$, where $\alpha_0 := \log(p/(1-p))/\log(2(1-p)/(2-p))$. Thus, $p_{A,L,p}(X) = 0$, for all $p \in (0, 0.5]$, when $\alpha \leq \alpha_0$. If $\alpha \geq \alpha_0$ and p_0 is the solution of the equation $(p/(1-p))^{1/\alpha} = 2(1-p)/(2-p)$, then $p_{A,L,p}(X) = 0$ when $p \in (0, p_0]$, and

$$p_{A,L,p}(X) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2-p}{p}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 2\frac{1-p}{p}\right)^{-\alpha}} \quad \text{when } p \geq p_0.$$

Analogously, we obtain $R^A(X,p) \geq 0$, for all $\alpha > 0$. Therefore, for all $p \in (0, 0.5]$,

$$p_{A,R,p}(X) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2-p}{p}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 2\frac{1-p}{p}\right)^{\alpha}}.$$

The last probability, together with $p_{R,p}(X)$, are plotted in Figure 5. They confirm that the tail behaviour of the log-logistic distribution is very similar to the one of Pareto and Fréchet distributions.

4. A new classification of linear probability types with respect to their tail behaviour. It is well-known that in the case where it exists, the tail index governs the tail behaviour of the corresponding probability c.d.f. independently of the location and scale parameters. The same is true for the probabilities for asymmetric right p-outside values. However, these probabilities allow us to insert a larger class of distributions in this partial ordering for any fixed p. Here, we fix $p = 0.25$. To simplify our considerations, we discuss only absolutely continuous distributions with infinite supports.

Using the results in the previous section, we obtain that, for all distributions in the exponential linear probability type, the probability of asymmetric 0.25-outside values is $p_{A,R,p}(X) \approx 0.0039$. Analogously, we could compute that for the Gumbel linear type it is ≈ 0.0015, and for the logistic case it is ≈ 0.0005. The dependence of the probabilities for asymmetric 0.25-outside values on the parameter $\alpha = 1/\xi$ within the set of positive-Weibull, Hill-Horror (see, e.g., [5] for the definition), and the considered distributions is presented in Figure 6. In this plot, the exponential distribution appears as positive-

Weibill with parameter $\alpha = 1$.

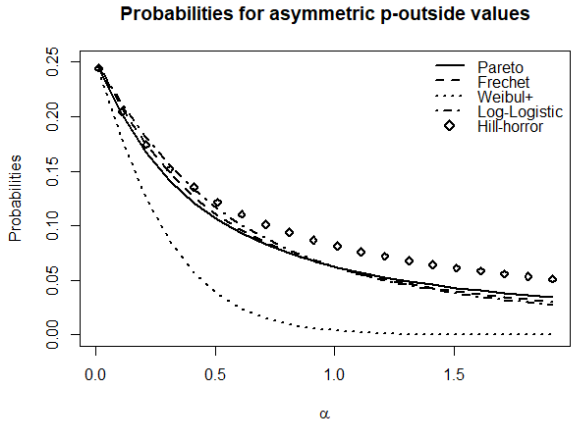


Figure 6: Dependence of $p_{A,R,p}(X)$ on α.

The classification, based on the probabilities for asymmetric 0.25-outside values, confirms the corresponding well-known results based on the concepts of light- and heavy-tailed distributions and the extremal index. Its advantage is that it is more detailed, and therefore, more useful in practice. It outperforms the popular concept of kurtosis insofar as in many of the considered cases the kurtosis does not exist.

5. Two distribution-sensitive estimators of the parameters which govern the tail behaviour. Simulation study. Here, we assume that we have a sample of i.i.d observations, that there is at least one observation which is larger than the empirical asymmetric right p-fence, and that $R_n^A(p) > 1$. Thus, we are working given $X_{n:n} > R_n^A(p) > 1$. Depending on the values of the plug-in estimators of $p_{A,R,p}(X)$ and $p_{A,L,p}(X)$, we choose the most appropriate probability types for modelling the observed r.v. Then, analogously to the method of moments and by using the expected equality between the large sample estimates and the theoretical values of $p_{A,R,p}(X)$, we express the unknown parameter. In this way, we obtain different formulae for the estimators. In order to simplify the computations, empirical asymmetric right p-fence can be used if needed. Finally, we can use some goodness of fit test in order to chose the best model. It is clear that in order to apply this algorithm, we need the explicit form of $p_{A,R,p}(X)$.

We consider two cases and obtain the following distribution-sensitive estimators.

Case 1. If the observed r.v. X is $Pareto(\alpha)$, $\alpha > 0$ distributed, then we apply

$$\widehat{\alpha}_{Par,n}(p) = -\frac{\log\left(\widehat{p}_{A,R}(p)\right)}{\log\left(\widehat{R}_n^A(p)\right)}.$$

Case 2. For $X \in Fréchet(\alpha)$, $\alpha > 0$ the corresponding estimator is

$$\widehat{\alpha}_{Fr,n}(p) = -\frac{\log\left(-\log\left(1-\widehat{p}_{A,R}(p)\right)\right)}{\log\left(\widehat{R}_n^A(p)\right)}.$$

The best value of p seems to be around the middle of the interval $(0, 0.5]$, because in this case the sensitivity of $p_{A,R,p}(X)$ with respect to the different probability laws is the

Table 1: Empirical results.

Distribution of X.		n	$\hat{\alpha}_{Par,n}$		$\hat{\alpha}_{Frech,n}$		Better estimator
			Mean	St. Dev.	Mean	St. Dev.	
$Pareto(\alpha)$	$\alpha = 0.5$	30	0.5434	0.1318	**0.5318**	0.1341	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		100	0.5147	0.0692	**0.5024**	0.0707	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		1000	**0.5011**	0.0205	0.4887	0.0210	$\widehat{\alpha}_{Par,n}$
		10000	**0.5002**	0.0065	0.4877	0.0066	$\widehat{\alpha}_{Par,n}$
	$\alpha = 1$	30	1.0339	0.2339	**1.0209**	0.2366	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		100	1.0345	0.1544	**1.0229**	0.1571	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		1000	**1.0033**	0.0445	0.9917	0.0453	$\widehat{\alpha}_{Par,n}$
		10000	**1.0004**	0.0141	0.9889	0.0144	$\widehat{\alpha}_{Par,n}$
	$\alpha = 2$	30	**1.8935**	0.3993	1.8764	0.4005	$\widehat{\alpha}_{Par,n}$
		100	2.0760	0.3316	**2.0655**	0.3352	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		1000	**2.0109**	0.1029	2.0012	0.1042	$\widehat{\alpha}_{Par,n}$
		10000	**2.0009**	0.0317	1.9912	0.0321	$\widehat{\alpha}_{Par,n}$
$Frechet(\alpha)$	$\alpha = 0.5$	30	0.5621	0.1469	**0.5492**	0.1485	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		100	0.5293	0.0747	**0.5159**	0.0760	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		1000	0.5151	0.0218	**0.5014**	0.0223	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		10000	0.5138	0.0069	**0.5001**	0.0070	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
	$\alpha = 1$	30	1.0482	0.2376	**1.0351**	0.2399	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		100	1.0522	0.1645	**1.0407**	0.1672	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		1000	1.0147	0.0462	**1.0032**	0.0471	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		10000	1.0117	0.0143	**1.0002**	0.0146	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
	$\alpha = 2$	30	**1.8662**	0.3918	1.8507	0.3923	$\widehat{\alpha}_{Par,n}$
		100	2.0789	0.3330	**2.0699**	0.3362	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		1000	2.0192	0.1068	**2.0109**	0.1080	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$
		10000	2.0095	0.0332	**2.0012**	0.0335	$\widehat{\alpha}_{Fr,n}$

best one. Therefore, this section ends with $p = 0.25$. First, we made n independent observations from a $Pareto(\alpha)$ distribution and, separately, n independent observations from a $Frechet(\alpha)$ distribution, for different values of $\alpha \in \{0.5, 1, 2\}$ and $n = 30, 10^2, 10^3, 10^4$. We then repeated these experiments $m = 10^4$ times. In this way, we calculated 10^4 values of $\hat{\alpha}_{Par,n}$ and $\hat{\alpha}_{Frech,n}$, their means and standard deviations. The results are given in Table 1. Analogously to [6], we observe that for distributions with heavier tails, our approach gives better results.

6. Conclusive remarks and open problems. In this work, we have shown that the suggested classification of linear probability types with respect to their tail behaviour refines the well-known classification based on the extremal index in the cases where it exists. It outperforms the role of kurtosis. The corresponding estimators have a relatively fast rate of convergence. However, their biggest drawback is that they are distribution-sensitive. Therefore, choosing the most appropriate probability type is an important preliminary step before estimating the parameters that govern the tail behaviour.

Acknowledgements. The author would like to express her appreciation for the reviewers' in-depth comments, suggestions, and corrections, which have greatly improved

the manuscript.

References

[1] J.L. DeVore. Probability and Statistics for Engineering and the Sciences. Brooks/Cole Publishing Company, 1995.

[2] R.J. Hyndman, Y. Fan. Sample quantiles in statistical packages. *Am. Stat.*, **50** (1996), 361–365.

[3] P.K. Jordanova. Probabilities for p-outside values – General properties. *AIP Conf. Proc.*, **2164** (2019), article no. 020002.

[4] P.K. Jordanova. Probabilities for p-outside values – Particular cases. *AIP Conf. Proc.*, **2172** (2019), article no. 100004.

[5] P.K. Jordanova. Probabilities for p-Outside Values and Heavy Tails. Konstantin Preslavsky Publishing House, Shumen, 2020.

[6] P.K. Jordanova, M.P. Petkova. Measuring heavy-tailedness of distributions. *AIP Conf. Proc.*, **1910** (2017), article no. 060002.

[7] P.K. Jordanova, M.P. Petkova. Tails and probabilities for extreme outliers. *AIP Conf. Proc.*, **2025** (2018), article no. 030002.

[8] R. McGill, J.W. Tukey, W.A. Larsen. Variations of box plots. *Am. Stat.*, **32** (1978), 12–16.

[9] R Core Team and others. R: A Language and Environment for Statistical Computing. Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013.

[10] R.J. Serfling. Approximation Theorems of Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2009.

[11] J.W. Tukey. Exploratory Data Analysis. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1977.

СЕКЦИЯ Б: МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ И ИНФОРМАТИКА

SECTION B: MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

WAYS TO INTRODUCE OPTIMIZATION ALGORITHMS AND MATHEMATICAL MODELING IN THE SCHOOL MATHEMATICS COURSE

Elitsa Atanasova

South-West University, Blagoevgrad, Bulgaria
e-mail: eliatanasova@swu.bg

The main motive of this dissertation and the purpose of the study are to arouse students interest through the STEM classrooms, to show the ways of solving everyday problems (for example, in the economy, agriculture, tourism, etc.) with mathematical methods and models. The subject of the study is the educational cognitive activity of 9th- and 10th-grade students in an interactive educational environment during lessons focused on new knowledge and exercises in mathematics and the self-preparation afterwards. The first hypothesis is that teaching in STEM classrooms will increase students interest in learning mathematics. The second hypothesis is that the classic method of teaching students in the 9th and 10th grades in secondary school—that is, with chalk and a blackboard—remains more effective.
Keywords: optimization algorithms, mathematical modelling, STEM cabinets, mathematical tasks

НАЧИНИ ЗА ВЪВЕЖДАНЕ НА ОПТИМИЗАЦИОННИ АЛГОРИТМИ И МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Елица Атанасова

Югозападен университет, Благоевград, България
e-mail: eliatanasova@swu.bg

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.063-068

2020 Mathematics Subject Classification: 97D50, 97Kxx, 97Mxx.

Основният мотив на дисертацията и целта на изследването е да събуди интереса на учениците чрез СТЕМ класните стаи, да покаже начините за решаване на ежедневни проблеми (например в икономиката, селското стопанство, туризма и др.) с математически задачи и модели. **Предмет на изследването** е учебно-познавателната дейност на учениците от 9-и и 10-и клас в интерактивна образователна среда по време на уроците за нови знания и упражнения по математика и самоподготовката след това. Първата хипотеза е, че преподаването в СТЕМ класни стаи ще повиши интереса на учениците към изучаването на математика. Втората хипотеза е, че класическият пример за обучение на ученици в 9-и и 10-и клас в средното училище остава по-ефективен - тоест с тебешир и черна дъска.

Ключови думи: алгоритми за оптимизация, математическо моделиране, СТЕМ кабинети, математически задачи

1 Introduction

The existence of large, complex macrosystems necessitates the creation of a general theory for their management. So far, the solution of this problem is limited to the field of research of individual classes of such systems or their subsystems - industrial enterprises, branches, economy, military complex, etc.

In 1939, a brochure published at St. Petersburg University, authored by 27-year-old professor L. C. Kantorovich, was dedicated to "Mathematical methods for organization and production planning" [5]. This seemingly modest work laid the foundation for mathematical programming.

Mathematical programming (optimization) has as its subject the theoretical research and development of effective numerical methods for solving classes of extreme problems related to the optimization of decision-making in the economy, technology, and other spheres [1].

The essence of this research is the optimization process and mathematical modeling. Through these, it will be demonstrated how to solve everyday tasks with low transportation costs or create a large amount of production, with minimal costs. Optimization is a purposeful activity to obtain the best result. The object of the optimization is the human activity for a certain period - the time for conducting the research. Mathematical modeling —the research work —is not related to the research objects themselves, but to their models. The latter are divided into experimental and theoretical. The last are the mathematical models.

The study contains three important points. The first involves introducing students to the optimization problems to pique their interest. Many problems of our daily life (for example, in economics, agriculture, tourism, etc.) are solved with mathematical methods and models. This will be of great interest to students.

The second part aims to show how mathematical models are made to solve these real-life problems. This is not an easy task at all. It is important to show that many different problems from diverse fields lead to one or similar mathematical models.

The third part aims to show and justify different algorithms and methods for optimization tasks. For example, the transportation problem is solved with potential method and distribution method.

Tasks formulated at the set goal:

- Conduct a literature review of the advantages and disadvantages of secondary school education.
- Analyze the main components of teaching mathematics in secondary schools and for effectively conducting lessons focused on new knowledge and exercises.
- Analyze and compare the software products and technologies that could be used in the learning process for the relevant discipline.
- Model and implement an organizational model for mathematics education, in which interactive learning methods will be used during lessons focused on exercises and new knowledge, with specially selected software products and technologies supporting student self-training.
- Conduct an experiment to highlight the advantages and disadvantages of the organizational model.

2 Methods

The pedagogical research includes observation and surveying of students in experimental learning. The survey will be anonymous and all results will be analyzed, and the conclusions they lead to will be described. Sample questions in the survey are:

1. How would you compare traditional mathematics teaching in a classroom with teaching in a STEM classroom?
2. Do you think that the subject *Mathematics* will have a practical application in your further studies and in the future implementation on the labor market?
3. Is the knowledge from the subject *Mathematics* used in the other subjects?

The survey aims to explore students' opinions on the quality of mathematics education in a classical teaching style (chalk and blackboard) or with the help of multimedia information technologies. Determining which one is more effective, in their opinion, is the aim of the study.

The study will include an experimental group and a control group. The experimental group will consist of students who study math with new information technology and tools in a STEM classroom, and the control group will consist of students who study math with classic methods with blackboard and a chalk.

3 Related Work

This topic, *Ways to Introduce Optimization Algorithms and Mathematical Modeling into the School Math Course*, was developed by Julia Roberts, a math teacher at Cupertino High School in the Fremont Union High School District, in collaboration with Mikel Kochenderfer, Ph.D., professor of aeronautics and astronautics at Stanford University [3]. Their work, *Mathematical Optimization*, is a five-unit high school course comprising 56 lessons. The first three units are non-calculus based, requiring only algebra; the last

two units require completion of Calculus AB. All units utilize the Julia programming language to teach students how to apply basic coding techniques to solve complex and relevant mathematical problems. These *Mathematical Optimization* lessons were written in 2014 by Julia Roberts, in conjunction with Dr. Mikel Kochenderfer, through a grant from the National Science Foundation. They were edited, updated, and converted into Julia notebooks in 2015 by Renee Trochet, a math teacher at Eastside College Preparatory in East Palo Alto, also in conjunction with Dr. Kochenderfer and funded by the NSF. The goals of these lessons are:

- to increase high school students' exposure to current mathematical topics, including optimization and programming;
- to increase the number and diversity of students interested in STEM fields;
- to better prepare students for future STEM studies.

4 Linear Optimization Problem

Allocation and transportation problems are types of linear optimization problems, and all concepts and results related to duality in linear optimization apply to them [2, 3, 4, 7].

These problems are a linear optimization problem that can be solved using the simplex method. However, specialized methods have been developed for it, which consider its specificity and are therefore much more efficient than the simplex method.

When implementing the various methods for solving these problems, rectangular tables and related concepts are used. Each rectangular table has rows and columns and consists of cells. Each cell is characterized by a pair of indices (i, j): the index i indicates the row number, and the index j - the column number in which the cell is located [7].

5 Examples of Optimization Problems

Next, we will consider two examples of optimization problems and their mathematical models, which relevant to our study.

5.1 Example 1: Prepare feed mixtures using the lowest price criterion.

Develop a mathematical model for the task.

Task. The daily ration for animal feed consists of hay, silage, and concentrates and must contain at least 2000 g of protein, 120 g of calcium, and 40 g of vitamins. The nutrient content per kilogram of each feed is given in grams in the following table:

Nutrients/ Products	Hay	Silage	Concentrates
Proteins	50	20	180
Calcium	6	4	3
Vitamins	2	1	1

The ration should contain no more than 12 kg of hay, 20 kg of silage, and 16 kg of concentrates. The price per kilogram of each feed is as follows: hay – 3 BGN, silage – 2

BGN, and concentrates – 5 BGN. The goal is to compose a feed mixture that meets the daily ration requirements at the lowest cost.

Mathematical model. Let x_1, x_2, x_3 be respectively the quantities (in kilograms) of hay, silage and concentrates making up the feed mixture, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Then the mathematical model is:

$$L(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min.$$

Under conditions

$$\begin{gathered} 50x_1 + 20x_2 + 180x_3 \geq 2000, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 120, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 40, \\ 0 \leq x_1 \leq 12, \\ 0 \leq x_2 \leq 20, \\ 0 \leq x_3 \leq 16. \end{gathered}$$

5.2 Example 2: Allocation of sowing posts.

Develop a mathematical model for the task.

Task. Four types of agricultural crops (K_1, K_2, K_3 and K_4) are to be produced in quantities a_1, a_2, a_3 and a_4 tons respectively. Three plots of land (P_1, P_2 and P_3) with areas of b_1, b_2 and b_3 acres are available for sowing. The average yield of the j-th crop ($j = 1, 2, 3, 4$) planted on one hectare of the i-th plot ($i = 1, 2, 3$) is a_{ij} tons:

Plot/ Crop	K_1	K_2	K_3	K_4
P_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
P_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
P_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}

The profit from the sale of one ton of crops K_1, K_2, K_3 and K_4 is respectively c_1, c_2, c_3 and c_4 BGN, respectively.

The objective is to determine how to sow the available land with the crops to meet the specified requirements and maximize profit.

Mathematical model. Let us denote by x_{ij} that area of the plot P_i, $i = 1, 2, 3$, which should be sown with the crop K_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Then the sowing plan $\{x\}$ is given by the following table (matrix):

Plot/ Crop	K_1	K_2	K_3	K_4
P_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
P_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
P_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

$$L(x) = (a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + a_{31}x_{31}).c_1 + (a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + +a_{32}x_{32}).c_2 +$$
$$+(a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} + a_{33}x_{33}).c_3 + (a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24} + +a_{34}x_{34}).c_4 \to \max.$$

Under conditions [1]:

$$a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + a_{31}x_{31} \geq a_1,$$

$$
\begin{gathered}
a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{32}x_{32} \geq a_2, \\
a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} + a_{33}x_{33} \geq a_3, \\
a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24} + a_{34}x_{34} \geq a_4, \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq b_1, \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq b_2, \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq b_3, \\
x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{gathered}
$$

Remark. These two examples, one from animal husbandry and the other from crop production, illustrate how diverse practical problems can be solved using the same mathematical model.

Conclusion. The transportation problem, possessing the property of yielding integer optimal solutions for integer production and demand values, serves as a powerful modeling tool. This characteristic allows diverse "non-transport" problems to be effectively represented by the transportation model [1]. As demonstrated by the feed mixture and crop planting examples, a wide range of real-world scenarios can be effectively modeled and optimized using linear programming techniques like those used in solving the transportation problem. This approach resonates with the pedagogical strategy employed in the educational resources developed by Roberts, Kochenderfer, and Trochet [6], which similarly emphasize the link between theoretical concepts and practical applications, equipping students with valuable tools for addressing optimization challenges across various disciplines.

References

[1] Мирчев, И. Оптимиране. Алгоритмичен подход, Университетско издателство „Неофит Рилски“, 1999.
[Mirchev, I. Optimization. Algorithmic approach, University Publishing House "Neofit Rilski", 1999. (in Bulgarian)]

[2] Chvátal, V. Linear Programming. W.H. Freeman and Company, 1983.

[3] Dantzig, G. B. Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1991.

[4] Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. Introduction to Operations Research. McGraw-Hill Education, 2015

[5] Канторович, Л. В. Математические методы организации и планирования производства, 1939
[Kantorovich, L. V. Matematicheskie metody organizatsii i planirovaniia proizvodstva, Leningrad State University, 1939. (in Russian)]

[6] Roberts, J., & Kochenderfer, M. Mathematical Optimization Lessons, 2014, `https://web.stanford.edu/group/sisl/k12/optimization/`.

[7] Стефанов, С. Количествени методи в управлението, Благоевград 2003 г.
[Stefanov, S. Kolichestveni metodi v upravlenieto, Blagoevgrad, 2003. (in Bulgarian)]

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

REVOLUTIONIZING PEER-TO-PEER ENERGY TRADING WITH BLOCKCHAIN TECHNOLOGY

Vitali Atias[1], Angel Georgiev[2], Vladimir Valkanov[3]
Paisii Hilendarski University of Plovdiv, Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv, Bulgaria
e-mails: [1]vitali@uni-plovdiv.bg [2]angel.georgiev@uni-plovdiv.bg, [3]vvalkanov@uni-plovdiv.bg

This paper examines the application of blockchain technology in the energy sector, particularly in peer-to-peer (P2P) energy trading, which is a way for users with distributed energy resources (DERs) to exchange energy with each other without relying on a centralized authority. Blockchain technology is an innovative and disruptive tool that can enable P2P energy transactions and smart contracts, and improve the efficiency, transparency, security, and sustainability of energy services. However, blockchain technology adoption also faces many challenges and barriers, such as the technical maturity and scalability of blockchain solutions and the integration of blockchain with other technologies. The paper aims to provide an overview of the literature on blockchain technology in the energy sector and to analyze the main application areas, benefits, challenges, and opportunities of blockchain technology in this field. In addition, it presents a theoretical model showcasing a P2P energy trading system utilizing blockchain technology.

Keywords: blockchain, peer-to-peer, distributed energy resources, energy trading, Internet Of Things, Smart Contracts, Decentralized Systems, Energy Management

ПРЕДСТАВЯНЕ НА ИНОВАТИВНИ ИДЕИ В ТЪРГОВИЯТА С ЕНЕРГИЯ МЕЖДУ РАВНОПОСТАВЕНИ ПАРТНЬОРИ С БЛОКЧЕЙН ТЕХНОЛОГИЯ

Витали Атиас[1], Ангел Георгиев[2], Владимир Вълканов[3]
Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", Факултет по математика и информатика, България, град Пловдив, Бул. България 236
e-mails: [1]vitali@uni-plovdiv.bg [2]angel.georgiev@uni-plovdiv.bg, [3]vvalkanov@uni-plovdiv.bg

В този документ се разглежда приложението на блокчейн технологията в енергийния сектор, по-специално в търговията с енергия между равнопоставени потребители (P2P), която е начин потребителите с разпределени енергийни ресурси (DER)

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.069-077
2020 Mathematics Subject Classification: 68M14, 68U35, 68N01, 68P20.

да обменят енергия помежду си, без да разчитат на централизиран орган. Блокчейн технологията е иновативен и революционен инструмент, който може да даде възможност за P2P енергийни транзакции и интелигентни договори и да подобри ефективността, прозрачността, сигурността и устойчивостта на енергийните услуги. Приемането на блокчейн технологията обаче се сблъсква и с много предизвикателства и пречки, като например техническата зрялост и мащабируемостта на блокчейн решенията и интегрирането на блокчейн с други технологии. Статията има за цел да направи преглед на литературата относно блокчейн технологията в енергийния сектор и да анализира основните области на приложение, ползите, предизвикателствата и възможностите на блокчейн технологията в тази област. В допълнение, той представя теоретичен модел, показващ P2P система за търговия с енергия, използваща технологията блокчейн

Ключови думи: Блокчейн, Равнопоставен обмен, Разпределени енергийни ресурси, Търговия с енергия, Интернет на нещата, Умни договори, Разпределени системи, Управление на енегрията

1. Introduction. The emergence of blockchain technology has unlocked new opportunities across various industries, including the energy sector. This technology, which serves as the foundation for digital currencies, has the potential to transform energy trading and exchange. According to a government and private sector report, blockchain technologies have the potential to revolutionize various sectors by eliminating intermediaries, promoting transparency [9]. The focus of this paper is the utilization of blockchain technology in peer-to-peer (P2P) energy trading. We must emphasize that this paper is researching the technological approach, considering that the infrastructure and the law in the country, where it will be implemented, allow this.

One of the areas where blockchain technology can have a significant impact is renewable energy sources (RES) are rapidly transforming energy systems, driven by privatization, sector unbundling, and policy initiatives. However, these RES face challenges due to their fluctuating nature and dependence on weather conditions. This necessitates more flexibility measures, such as fast-acting supply, demand response, and energy storage services, for safe operation and stability. The transformation is further amplified by distributed energy resources (DERs) and the impending digital era marked by the widespread deployment of smart meters [2]. Peer-to-peer energy trading, an emerging approach, enables users with DERs to trade energy directly, reducing the need for centralized authorities. This method can improve efficiency, transparency, and sustainability of energy services. However, implementing such a system is not without its challenges.

To address these challenges, blockchain technology can provide a decentralized and secure solution. With its decentralized nature and ability to execute smart contracts, it has the potential to revolutionize P2P energy trading by addressing several challenges, including the need for secure and transparent transactions. Blockchain technology is increasingly being used in energy commodity trading, where transactions are packaged into blocks and settled using a common market mechanism. Blockchain technology can help companies achieve unprecedented efficiency, lower transaction costs, and reduce risks, ultimately improving the efficiency of energy commodity trading [10]. It can also disrupt market operations, enhance the control of distributed energy systems, and affect

revenues and tariffs. Blockchain can facilitate communication within smart devices, data transmission, and asset management while protecting privacy and identity. However, blockchain adoption faces challenges including technical maturity, stakeholder interests, incentive mechanisms, regulatory frameworks, and integration with other technologies like IoT, AI, and smart contracts. It is important to understand the current and future prospects of blockchain technology in the energy sector [10].

Therefore, blockchain technology can enable a new paradigm of energy trading that is more efficient, transparent, and sustainable. Distributed ledger technologies and smart contracts allow energy generators to trade with consumers and retailers without middlemen. Autonomous trading agents find the best deals and record agreements in the blockchain, executing them on time. Payments are automated, and transaction data is accessible through a single point of access, the distributed ledger. However, implementing blockchain technology in the energy market would require significant regulatory changes and could impact the role of intermediaries, such as brokers, exchanges, and trading agencies. Despite the potential for blockchain to transform the energy market structure, overcoming significant technical challenges and roadblocks is necessary to realize this vision in practice [2].

This paper provides a theoretical review of the current literature on the application of blockchain technology in the energy sector, with the aim of answering the following research question:

- How does blockchain technology enable peer-to-peer energy trading in decentralized networks?

This paper explores how blockchain technology can enable P2P energy trading. It also proposes a theoretical model of a blockchain-based P2P energy trading. The paper is structured as follows: Section 2 gives a background on blockchain technology. Section 3 explains the main features of P2P energy trading. Section 4 presents the proposed model of a blockchain-based P2P energy trading. The conclusion summarizes the main findings, contributions, and limitations of the paper and suggests some directions for future research.

2. Blockchain Technology. Blockchain is decentralized Distributed Ledger Technology that stores digital information securely spread across all nodes connected in a peer-to-peer (P2P) network. It contains a continuously expanding record of transactions in their chronological order. In other words, it is a ledger that can contain digital transactions, data records, and executables. The language should be precise and unambiguous to avoid confusion. It is essential to adhere to metrics, units, and standardized language when working with blockchains. Transactions are grouped into larger formations known as blocks, which are time-stamped and cryptographically linked to previous blocks to create a chain of records that establishes the sequence of events or the 'blockchain'. In addition to describing the data structure, the system assigns a unique identifier to each block. The term is also widely used in literature to describe digital consensus architectures, algorithms, or domains of applications built on such architectures [5, 7].

Some of the characteristics of blockchain include:

- No tampering - The fundamental aspect of blockchain is its immutability. It cannot be modified or tampered with due to its unique ledger, called the 'blockchain'.

Transactions are added to the chain in chronological order using blocks. The consensus mechanism plays a vital role in ensuring the integrity of the chain. It is highly impractical to make changes to many blocks due to the associated high costs. Consider the blockchain networks such as Bitcoin and Ethereum, which operate using Proof of Work (PoF) consensus mechanism. With just 51% of the computing power, all blocks can be regenerated to tamper with data. However, it is not possible to destroy the data. The needs of players with significant computing power are prioritized through this practical design, which improves the dependability of data on the blockchain.

- Hash functions and cryptography - this revolves around a mathematical function that takes any input and produces a fixed-size output for the specific parameter. This computation converts the information into a bit string format called hash. Such functions possess collision resistance, meaning that no two inputs can lead to the same output. This safety measure allows for retaining the input value, given the extreme difficulty in undoing the outcome and retrieving the original data.

- Smart Contract - Smart contracts are user-defined programs that dictate writing rules in the ledger. They are executable programs, capable of making modifications and triggered automatically when specific conditions, such as an agreement, are met between the transacting parties. Contractual terms are encoded in computer language to ensure legal obligations and conditions are met. Smart contracts are tamper-proof and self-enforcing, providing significant advantages such as eliminating middlemen. This reduces the need for transaction, contracting, enforcement, and communication.

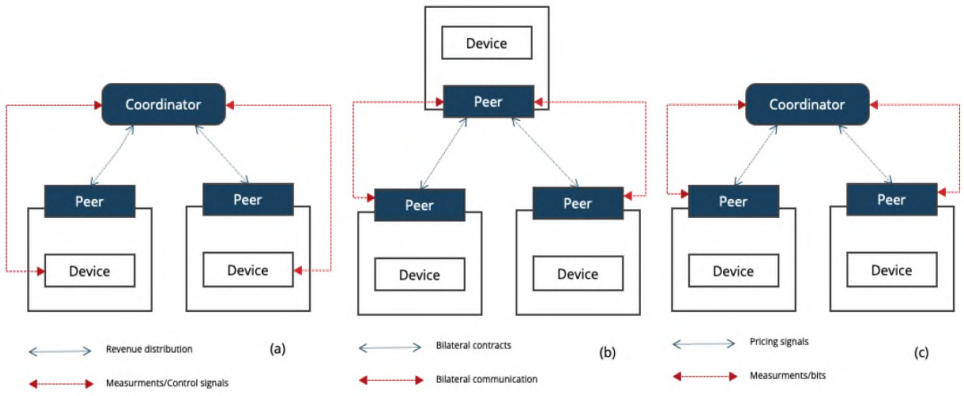
- Decentralization - No third party or central node is involved in validating transactions, reducing costs, and avoiding performance issues. Consensus algorithms ensure consistency and integrity. While different blockchains offer varying degrees of decentralization based on their policies, no node can exert complete control as all nodes maintain the blockchain information.

- P2P network transactions - It is also known as Distributed Ledger Technology (DLT), utilizing a P2P network to secure data through cryptographic functions. The system is transparent and immutable. This approach follows a logical sequence and avoids excessive jargon, maintaining a formal tone and precise word choice. Consistency is maintained throughout, adhering to specific industry standards and metrics. Non-essential fillers have been removed, resulting in a concise and grammatically correct document. This approach facilitates energy transfer between customers.

3. P2P energy trading. P2P energy trading is a groundbreaking approach in the modern power system, enabling users with distributed energy resources (DERs) to exchange energy without a centralized authority. This innovative model offers numerous advantages, such as pollution reduction, cost savings, resource allocation optimization, and support for climate action initiatives. However, it also presents several challenges, including maintaining market stability, coordinating with external markets, and safe-

guarding user privacy and autonomy. Therefore, the task of designing suitable market arrangements for P2P energy trading is both critical and complex [6, 12].

A central consideration in the market design for P2P energy trading is the degree of centralization. As illustrated in Figure 1, the market can be classified into three types based on the role and function of the coordinator: centralized, decentralized, and distributed. In centralized markets, a coordinator determines the energy transactions and prices for the users, using the information gathered from them. While this market type can optimize the social welfare of the entire P2P community, it demands extensive computation and communication and may infringe on the privacy and autonomy of the users. On the other hand, decentralized markets lack a coordinator, and users trade directly with each other, guided by their individual preferences and strategies. This market type safeguards user privacy and autonomy and offers greater scalability and reliability, but it may also lead to lower efficiency, increased uncertainty, and network congestion. Lastly, distributed markets feature a coordinator who indirectly influences users by transmitting pricing signals, rather than directly controlling their devices or transactions. This market type strikes a balance between user efficiency and privacy and offers improved visibility and predictability of market outcomes for network operators [12]. Despite these potential benefits, implementing blockchain technology in the energy market would require significant regulatory changes and could impact the role of intermediaries, such as brokers, exchanges, and trading agencies. Overcoming significant technical challenges and roadblocks is necessary to realize this vision in practice [2, 8].



4. Blockchain-based P2P energy trading. In peer-to-peer (P2P) energy trading, blockchain technology can be used to execute payment transactions. These transactions, which record the payer, payee, and payment amount, can be initiated and securely logged on a decentralized ledger. This is achieved by using smart contracts, which are pieces of programming code that implement rules for calculating energy payments based on the energy tariff spot price and the energy usage recorded by smart meters. These contracts act as agents that can be triggered at certain points in time, effectively replacing intermediaries or a central authority [5, 11].

A peer-to-peer (P2P) energy trading system using blockchain technology is composed of several integral components. The User Interface (UI), which could be a website or an

app, allows users to track their energy usage and manage energy trades. The Smart Meter Interface, an IoT device, communicates with smart meters and initiates transactions when energy sharing begins. Smart contracts on the blockchain are self-executing and contain the terms of the energy tariff and payment calculations. Transaction Processing is a system that verifies transactions and creates blocks of them. The Blockchain Miner validates these blocks and adds them to the blockchain, and then disseminates them to the network. The Blockchain is a distributed ledger that logs all transactions. The Consensus Mechanism is a protocol that ensures network nodes agree on the validity of transactions. Selecting the appropriate consensus mechanism is critical for the system's efficiency, scalability, and security. Proof of Work (PoW), though highly secure, is unsuitable due to its excessive energy consumption, which contradicts the sustainability goals of the energy market. Instead, Proof of Stake (PoS) or Delegated Proof of Stake (DPoS) are more suitable for energy trading systems as they offer significantly lower energy consumption, faster transaction validation, and scalability. Practical Byzantine Fault Tolerance (PBFT) is another option for smaller, localized energy trading networks, providing high throughput and energy efficiency. A hybrid approach combining PoS and PBFT could also be considered, enabling scalability for larger networks while maintaining security and performance for smaller segments. Layer 2 solutions, such as rollups or state channels, can further enhance scalability and reduce on-chain congestion by handling microtransactions off-chain. The Security Module is a cryptographic component that secures transactions. For a critical resource market like energy, robust security measures are essential to protect the system from attacks. Smart contracts should employ advanced cryptographic techniques such as Zero-Knowledge Proofs (ZKPs) to ensure transaction privacy while maintaining transparency. Homomorphic encryption can secure sensitive energy consumption data while allowing computations on encrypted data. Furthermore, a multi-signature protocol can add an additional layer of security, requiring multiple stakeholders to validate critical operations. To prevent Sybil attacks and maintain the integrity of the network, identity verification mechanisms can be implemented, such as public-private key cryptography. The Database stores all transaction data and user information. The API Gateway directs client requests to microservices and manages authentication. Microservices are small, independent services that implement specific business capabilities. Finally, the Message Broker facilitates asynchronous communication between microservices. This architecture enables a decentralized, secure, and transparent system for P2P energy trading.[6]

The transaction processing in a peer-to-peer (P2P) energy trading system involves several steps, as illustrated in Figure 2. Initially, energy sharing commences between prosumers and consumers in a P2P trading manner. As soon as the energy sharing starts, payment transactions are initiated through smart contracts. These smart contracts parse the tariff and energy import/export to calculate the payment price. Following this, the transaction record, which includes the block producers' identification, payer ID, payee ID, and payment amount, becomes part of a list of many transaction records. This list is then encrypted using homomorphic encryption or zero-knowledge proof, forming a block. Subsequently, a blockchain miner validates the block of transactions and produces a candidate block, which is broadcast to all nodes on the network. All network nodes validate the transactions using a consensus mechanism. Miners generally check the corresponding accounts and whether participants have sufficient funds. If they do, the transactions are

authenticated and validated by the network. The Merkle tree structure plays a central role in maintaining data provenance within a blockchain by creating a hierarchical structure of hashed data. Each node in the Merkle tree represents a hash of its children, ensuring the integrity of the entire dataset and enabling efficient verification of data consistency and provenance across the decentralized network. This hashed value will keep track of changes in the prosumers Blockchain, making sure that every appending to the data will be caught [1]. Finally, a blockchain is created by linking blocks together through the hash and common block signatures, effectively maintaining a complete list of all past records in a linked list. Additionally, decentralized networks can enhance resilience by distributing nodes across geographic regions, ensuring operational continuity even in case of local outages. Fault-tolerant mechanisms such as automatic failover and checkpointing can prevent data loss during major system disruptions. Distributed storage solutions like IPFS can store historical energy usage data efficiently while reducing reliance on a single point of failure.[4] [3]

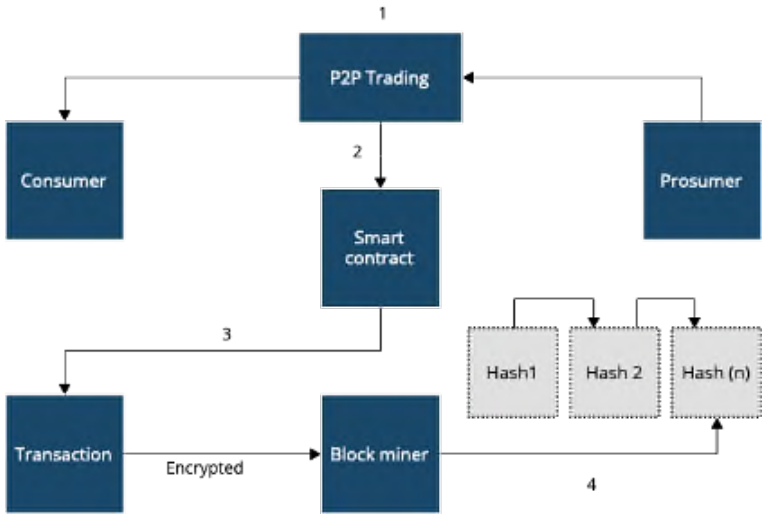


Fig. 2. Adaptation of blockchain-based P2P trading. [11]

This architecture allows for a decentralized, secure, and transparent system for P2P energy trading. It eliminates the need for intermediaries, reduces transaction costs, and enables real-time settlement of energy trades. By addressing critical challenges such as scalability, energy efficiency, security, and resilience, this system ensures a robust and sustainable solution for the future of energy trading.

4. CONCLUSION AND FUTURE DEVELOPMENTS. With the introduction of blockchain technology, the energy sector is undergoing considerable disruption. This decentralized, transparent, and immutable technology has the potential to transform the energy sector, particularly in the context of peer-to-peer (P2P) energy trade. It enables direct interaction between energy providers and customers, democratizing the market and maximizing resource usage. However, the application of blockchain in P2P energy trade is fraught with challenges, including scalability, energy consumption, le-

gal and regulatory frameworks, and user acceptability. To unlock the full potential of blockchain technology in P2P energy trading, future research should focus on addressing these obstacles through innovative solutions. For instance, selecting and optimizing suitable consensus mechanisms such as Proof of Stake or Practical Byzantine Fault Tolerance will be critical to ensure energy efficiency and scalability. Developing robust security protocols, including Zero-Knowledge Proofs, homomorphic encryption, and multi-signature approaches, can enhance resilience and protect this critical resource market from vulnerabilities. Enhancing scalability with Layer 2 technologies, improving energy efficiency with consensus mechanisms like Proof of Stake, and developing frameworks to align blockchain applications with existing energy regulations are critical areas of exploration. Moreover, user-friendly interfaces and educational initiatives will be essential to drive broader adoption and trust in blockchain-based systems.

Finally, to fully realize the promise of blockchain technology in the energy sector, a multi-pronged approach comprising technological innovation, regulatory reform, and active stakeholder engagement is required. Collaborative efforts between governments, energy providers, and technology developers will be essential to building robust frameworks that support blockchain adoption while ensuring environmental sustainability, energy equity, and economic viability. This study provides an overview of the application of blockchain technology in P2P energy trading. The insights on consensus mechanisms and security challenges presented here should serve as a foundation for further investigation into more specialized and technical implementations. Therefore, this work should be viewed as a starting point for understanding the role of blockchain in P2P energy trading, and further research is needed to gain a more comprehensive understanding of this complex field.

References

[1] J. Ackermann, M. Meier. Blockchain 3.0 - The next generation of blockchain systems. Accessed: Dec. 09, 2023. [Online]. Available: `https://www.researchgate.net/publication/327672110_Blockchain_30_-_The_next_generation_of_blockchain_systems`

[2] M. Andoni et al. Blockchain technology in the energy sector: A systematic review of challenges and opportunities, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 100, pp. 143–174, Feb. 2019, doi: 10.1016/J.RSER.2018.10.014.

[3] C. Fan, H. Khazaei, and P. Musile. BPET: A Unified Blockchain-Based Framework for Peer-to-Peer Energy Trading, *Future Internet*, vol. 16, no. 5, p. 162, May 2024, doi: 10.3390/fi16050162.

[4] A. M. A. Haque, M. M. Hasan, M. S. Hossain. Blockchain, Data Protection and P2P Energy Trading: A Review on European Legal Perspective, *Sustainability*, vol. 14, no. 23, p. 16305, Dec. 2022, doi: 10.3390/su142316305.

[5] Y. Lv. Transitioning to sustainable energy: opportunities, challenges, and the potential of blockchain technology, *Frontiers in Energy Research*, vol. 11, Sep. 2023, doi: 10.3389/fenrg.2023.1258044.

[6] P. Maya, P. A. Salam. A review of peer-to-peer transaction loss and blockchain: challenges and drivers in the roadmap to a low-carbon future, *Frontiers in Energy Research*, vol. 12, Jul. 2024, doi: 10.3389/fenrg.2024.1397975.

[7] S. Peng. Blockchain for big data AI, IoT and Cloud perspectives, 1st Edition. CRC Press, 2022.

[8] M. K. Thukral. Emergence of blockchain-technology application in peer-to-peer electrical-energy trading: a review, *Clean Energy*, vol. 5, no. 1, pp. 104–123, Mar. 2021, doi: 10.1093/ce/zkaa033.

[9] M. Walport (ed). Distributed ledger technology: beyond block chain - GOV.UK. Accessed: Nov. 04, 2023. [Online]. Available: https://www.gov.uk/government/news/distributed-ledger-technology-beyond-block-chain.

[10] Q. Wang, M. Su. Integrating blockchain technology into the energy sector — from theory of blockchain to research and application of energy blockchain, *Comput Sci Rev*, vol. 37, p. 100275, Aug. 2020, doi: 10.1016/J.COSREV.2020.100275.

[11] P. Wongthongtham, D. Marrable, B. Abu-Salih, X. Liu, G. Morrison. Blockchain-enabled Peer-to-Peer energy trading, *Computers & Electrical Engineering*, vol. 94, p. 107299, Sep. 2021, doi:10.1016/J.COMPELECENG.2021.107299.

[12] Y. Zhou, J. Wu, C. Long, W. Ming. State-of-the-Art Analysis and Perspectives for Peer-to-Peer Energy Trading, *Engineering*, vol. 6, no. 7, pp. 739–753, Jul. 2020, doi: 10.1016/J.ENG.2020.06.002.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

FUNCTIONAL MODEL OF PROS DATA COLLECTION SYSTEM

Todor Branzov[1], **Tsvetelin Zaevski**[2]

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences
e-mails: [1]tbranzov@math.bas.bg, [2]t_s_zaevski@math.bas.bg

The article presents an analysis of the documentation and research articles on 8 of the most widely used contemporary methodologies for collecting patient reported outcomes (PRO) data. Based on this analysis, a universalized functional model for collecting PRO data is proposed, which aims to identify the main system roles and present a view independent of a specific methodology, thus facilitating easier software information systems development.
Keywords: functional modeling, digital healthcare, distributed systems, PRO data

ФУНКЦИОНАЛЕН МОДЕЛ НА СИСТЕМА ЗА СЪБИРАНЕ НА ДАННИ ДОКЛАДВАНИ ОТ ПАЦИЕНТИТЕ

Тодор Брънзов[1], **Цветелин Заевски**[2]

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките
e-mails: [1]tbranzov@math.bas.bg, [2]t_s_zaevski@math.bas.bg

В статията е представен анализ на документацията и изследвания на 8 от най-използваните съвременни методики за събиране на данни докладвани от пациентите (ДДП). На базата на този анализ е предложен универсализиран функционален модел на система за събиране на ДДП, който цели да бъдат идентифицирани основните системни роли и да предложи изглед независим от конкретна методика.

Ключови думи: функционално моделиране, дигитално здравеопазване, разпределени системи, PRO данни

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.078-083

2020 Mathematics Subject Classification: 68M14.

Introduction. Medical institutions have been collecting, storing and analyzing clinical and administrative data for decades. These data are used by medical staff in the treatment of patients. In addition, they are of key importance for the implementation of modern health technologies, the assessment of the quality of provided services and the planning of resources.

The introduction of approaches and concepts of healthcare, oriented towards the value for the patients and the pursuit of optimization of related costs, created a need for modeling and estimating this value. To achieve this goal, it is necessary to supplement the administrative and clinical data collected by medical professionals with data reported directly by the patients (Patient Reported Outcome – PRO). This type of data reflects the patient's own assessment and his subjective perception of the condition and quality of life she leads. The integration of these three pillars of data – administrative, clinical and PRO – provide a basis for a better assessment of the effectiveness of the applied treatment by the medical staff. Managers, funding organizations and state administrative bodies have better understanding of the outcomes in general that can aid the decision-making process regarding the effectiveness of the health technologies and the overall benefit that the healthcare system provides to patients and society. This is especially important for healthcare systems based on the principle of solidarity and operating predominantly with public funds, such as those in the European Union, including the Bulgarian healthcare system.

Patient-reported outcomes data is collected from patients without interpretation by healthcare professionals. These data include patients' subjective assessments of their health status, quality of life, and the impact of treatment on their daily activities. PRO data is used to provide information about health outcomes from the patient's perspective and serve as a complement to objective clinical indicators collected by healthcare professionals. PRO include data of various structures describing physical and emotional state, pain, fatigue, mobility, social activities, and the patient's ability to perform daily tasks. They are collected through specialized tools such as standardized surveys, questionnaires, and using various technical means such as paper, web and mobile applications.

The integration of PRO into health information systems shows significant potential to improve the quality of healthcare by promoting an individualized approach to the patient and supporting decision-making by expanding the availability of relevant and accessible information. This contributes to improving the overall quality of care and increasing patient satisfaction, while also enabling a more accurate assessment of the effectiveness of various health interventions [1]. According to a systematic review of 76 recent studies, the collection of PRO data was found as an effective way to assess the impact of treatment on patients and improve the outcomes in 43 to 71% (according to the specific use of PRO data) of the studies [2].

To enable the use of PRO data, standardized methodologies (under the umbrella term patient-reported outcome measurements – PROMs) have been developed and used in practice in the recent decades. The focus of the methodologies is on the structure of the data and their interpretation by specialists and managers. One common feature is that both the management and technical implementation of PROMs collection are described as recommendations and good practices. The design of the collection and delivery process is left to the engineering teams, which indicates a search for maximum flexibility on the part of the creators of the methodologies. As a result, descriptions of

functional models and processes are informally considered as part of the reports with examples of implementation cases.

One of the main challenges in the use of PRO data, noted by the research community, is the technical integration of the relevant software solutions into existing health information systems [3]. The studies also propose approaches, such as the use of standardized data exchange interfaces (e.g., HL7 FHIR), as well as the development of integration modules that facilitate interoperability between PRO modules and other components of the health information systems [4, 5].

This paper presents an analysis of 8 of the most widely used modern methodologies for collecting PRO data. Based on this analysis, a functional model of a software system for collecting and storing PRO data is proposed, with aim to identify the main user roles and propose a view that is independent of a specific methodology or questionnaire. The motivation for proposition of the model is to facilitate easier software information system development and system-to-system integration.

Analysis of leading methodologies for collecting PRO data. The standard technique of documentation analysis from information systems requirements engineering was used to examine 8 leading methodologies, created and introduced into practice and healthcare systems in the period from 1990 to 2020. For each methodology, the characteristics described in the main and supporting documentation were analyzed for the presence of a comprehensive data collection process, timeline, key moments and actors in the process. Reports on implementations of PRO collection systems were analyzed, as well as independent studies of implemented systems, processes, applied architectures and approaches to data collection using software information systems.

International Consortium for Health Outcomes Measurement (ICHOM). ICHOM develops standard sets of measures based on clinical and patient research and covering various medical conditions. Each condition includes specific measures such as physical function, pain, fatigue and emotional state, described in "vocabularies" that provide a model of the patient's health status [6]. The measures are structured in frameworks that cover both general health indicators and condition-specific indicators. The frameworks are accompanied by a detailed timeline that indicates key points at which certain data should be collected. This timeline can be used as a basis for a data collection process, but the frameworks do not contain a formal requirement and description of such a process. Actors are defined implicitly in the descriptions and explicitly in the dictionaries for each of the diagnoses.

EuroQol Five-Dimension Scale (EQ-5D). EQ-5D is a quality-of-life measurement tool that has been introduced and used since the 1990s. It consists of five main dimensions covering mobility, self-care, usual activities, pain and discomfort, and anxiety and depression. The EQ-5D is designed to be easy to use and understand by patients and can be applied to different populations and medical conditions [7]. The EQ-5D does not contain a data collection process description. Actors descriptions can be derived from the so-called "management model", which describes four possible approaches to data collection.

Patient-Reported Outcomes Measurement Information System (PROMIS) PROMIS was developed by the National Institutes of Health (NIH) and is a dynamic system for collecting PROMs through computer-adapted questionnaires. PROMIS includes a set of measurements that cover physical, mental and social health. The structure

of PROMIS is built on three main domains: physical health (including physical function, pain and fatigue), mental health (including emotional state, anxiety, depression) and social health (including social relationships, social role and satisfaction with social support). The questionnaires were designed to be as adaptable as possible by using computer-adaptive questionnaires (CATs), which dynamically select questions depending on the patient's previous responses [8]. The methodology does not contain a description of a data collection process, but accompanying documents describe good practices in its application. Actor descriptions can be extracted from these documents, with the main ones being "patient" and "proxy" to help complete the questionnaires.

Short Form-36 (SF-36). The SF-36 is a standardized questionnaire that measures quality of life as a function of the physical and emotional state of patients. It contains 36 questions structured into eight domains: physical health, emotional well-being, social relationships, role in society, pain, fatigue, general health, and daily functioning. Each of these domains provides information about the patient's condition and the impact of various health interventions on his or her quality of life [9]. This instrument does not contain instructions for particular data collection process or actors in it. An online implementation of the questionnaire is available on the developers' website.

Health Utilities Index (HUI). The HUI is a collection of standardized measures used to assess health status and quality of life. It includes measures such as pain perception, mobility, emotional state, and social function. The HUI has been discussed as particularly suitable for long-term studies and evaluation of health interventions [10]. The documentation contains an informal description of a data collection process with at least two actors – patient and "proxy", who replaces the patient in completing the questionnaires.

SF-12 Health Survey. The SF-12 is a shortened version of the SF-36 and is also designed to measure quality of life through physical and psychological components. The SF-12 is popular when quick and less extensive collection of data about the patient's health is needed [11]. Like the SF-36, this instrument does not contain data collection process or actors instructions.

Nottingham Health Profile (NHP). The NHP is a questionnaire used to measure the physical, emotional and social health of patients. It contains six sections: energy, pain, emotional reactions, sleep, social isolation and physical abilities. The NHP is one of the earliest instruments, available since the 1970s and is still popular in Europe [12]. The instrument does not contain data collection process or actors instructions.

Clinical Outcomes in Routine Evaluation (CORE). CORE was developed to assess the mental health of patients in a clinical setting. CORE-OM is one of the most widely used outcome measurement tools in the mental health context [13]. The tool does not contain data collection process or actors instructions.

Functional model for collecting PRO data proposition. The proposed functional model is based on the results of the previously described analysis of the methodologies and is developed by extracting common features and synthesizing them into a model of user roles (derived from the common characteristics of the actors in the analyzed data collection processes) and groups of functionalities. The technique applied for modeling functionalities is a standard UML diagram of user roles and cases ("use case diagram"), (Fig. 1).

The following system roles have been identified:

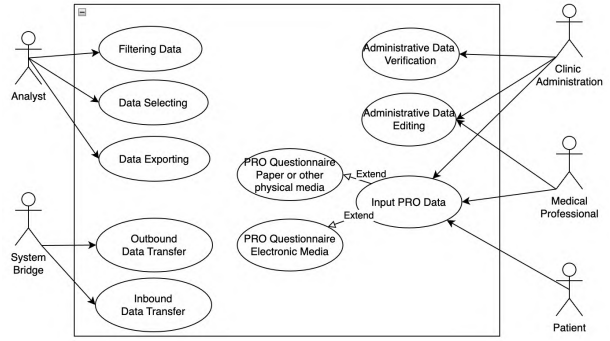


Fig. 1. PRO Data Collection System – Use Case Diagram

- Patient – this role inputs PRO data into the system, on his/her own behalf or on behalf of the patient, if acting as a "proxy".
- Medical Professional – this role inputs PRO data into the system as a patient assistant (applicable to certain diagnoses and methodologies) and edits administrative data if needed.
- Analyst – this role analyzes PRO data for the purposes of management of the healthcare system and determining the effectiveness of care.
- Clinic Administration – this role verifies and edits administrative patient data in the system as needed. The role can input PRO data into the system, either as a patient assistant or data by the patient on a paper (or other physical media) questionnaire.
- System Bridge – this role establishes a connection with other systems or modules and has the ability to download data from the system or upload data to it.

The model allows design of systems in which one user can have more than one role. That enables implementation of more sophisticated or specific scenarios, inherent in some of the methodologies – e.g. a medical professional who is also an analyst.

Discussion and conclusion. The proposed model of the functionalities is verified against the characteristics of each of the described methodologies, through repeated analysis of the documentation and checks for contradictions. The described functionalities allow for the implementation of a complete process for collecting and analyzing PRO data using any of the selected methodologies.

An important feature of the "Patient" role, which should be reflected in the implementation of the system, is the possibility of filling out the questionnaire not directly by the patient, but by a "proxy". According to some of the methodologies, the "proxy" is an extension of the patient that may have some unique characteristics. For example, in HUI methodology there is a difference in the questionnaires, if they are filled out by the patient or by a proxy. There is no discrete role of proxy modeled, however, since the functionalities are the same as those of the patient.

The "System Bridge" role is not described in any of the methodologies, but was added to allow integration with other systems. The argumentation is based on the research of the implementations case studies and the proposed reference models of systems of systems, especially the keystone "Advancing the Collection and Use of Patient-Reported

Outcomes through Health Information Technology" report [4].

One natural path of development of the results is to broaden the model with UML sequence and data flow diagrams to both make the model more sophisticated and to further the claim for universality and measurement methodology independence. Another path to add even more value is to supplement with descriptions and proposition of several of the key business processes involved in PRO data collection. An empirical approbation of the models is also planned to be exercised through prototyping a software system based on these designs and implementing it in the practice of one medical organization.

References

[1] M. E. Porter, E. O. Teisberg. Redefining Health Care: Creating Value-based Competition on Results. Harvard Business Press, 2006.

[2] J. M. Bonsel, A. J. Itiola, A. S. Huberts, G. J. Bonsel, H. Penton. The use of patient-reported outcome measures to improve patient-related outcomes – a systematic review. *Health Qual. Life Outcomes*, **22** (Nov. 2024), p. 101, https://doi.org/10.1186/s12955-024-02312-4.

[3] C. A. Harle et al. Overcoming barriers to implementing patient-reported outcomes in an electronic health record: a case report. *J. Am. Med. Inform. Assoc. JAMIA*, **23**, no. 1 (Jan. 2016), 74–79, https://doi.org/10.1093/jamia/ocv085.

[4] Advancing the Collection and Use of Patient-Reported Outcomes through Health Information Technology, 2021. Accessed: Dec. 15, 2024. [Online]. Available: https://aspe.hhs.gov/sites/default/files/private/pdf/259016/ONCPROFinalReportFinal.pdf.

[5] E. Basch, C. Snyder. Overcoming barriers to integrating patient-reported outcomes in clinical practice and electronic health records. *Ann. Oncol.*, **28**, no. 10 (Oct. 2017), 2332–2333, https://doi.org/10.1093/annonc/mdx506.

[6] M. E. Porter, S. Larsson, T. H. Lee. Standardizing Patient Outcomes Measurement. *N. Engl. J. Med.* **374**, no. 6 (Feb. 2016), 504–506, https://doi.org/10.1056/NEJMp1511701.

[7] M. Herdman et al. Development and preliminary testing of the new five-level version of EQ-5D (EQ-5D-5L). *Qual. Life Res. Int. J. Qual. Life Asp. Treat. Care Rehabil.*, **20**, no. 10, (Dec. 2011), 1727–1736, https://doi.org/10.1007/s11136-011-9903-x.

[8] D. Cella et al. The Patient-Reported Outcomes Measurement Information System (PROMIS) developed and tested its first wave of adult self-reported health outcome item banks: 2005–2008. *J. Clin. Epidemiol.*, **63**, no. 11 (Nov. 2010), 1179–1194, https://doi.org/10.1016/j.jclinepi.2010.04.011.

[9] J. E. Ware, C. D. Sherbourne. The MOS 36-item short-form health survey (SF-36). I. Conceptual framework and item selection. *Med. Care*, **30**, no. 6 (Jun. 1992), 473–483.

[10] D. Feeny et al. Multiattribute and single-attribute utility functions for the health utilities index mark 3 system. *Med. Care*, **40**, no. 2 (Feb. 2002), 113–128, https://doi.org/10.1097/00005650-200202000-00006.

[11] J. Ware, M. Kosinski, S. D. Keller. A 12-Item Short-Form Health Survey: construction of scales and preliminary tests of reliability and validity. *Med. Care*, **34**, no. 3 (Mar. 1996), 220–233, https://doi.org/10.1097/00005650-199603000-00003.

[12] S. M. Hunt, J. McEwen, S. P. McKenna. Measuring health status: a new tool for clinicians and epidemiologists. *J. R. Coll. Gen. Pract.*, **35**, no. 273 (Apr. 1985), 185–188.

[13] M. Barkham, N. Gilbert, J. Connell, C. Marshall, E. Twigg. Suitability and utility of the CORE-OM and CORE-A for assessing severity of presenting problems in psychological therapy services based in primary and secondary care settings. *Br. J. Psychiatry*, **186**, no. 3 (Mar. 2005), 239–246, https://doi.org/10.1192/bjp.186.3.239.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

CLOUD-BASED CORPORATE TRAINING MODEL BASED ON BPMN BUSINESS PROCESS DIAGRAMS

Lilyana Rusenova[1], **Elena Somova** [2]

"St. Kliment Ohridski" Sofia University and University of Plovdiv "Paisii Hilendarski"
e-mails: [1]lrusenova@fmi.uni-sofia.bg, [2]eledel@uni-plovdiv.bg

The paper presents an attempt for corporate training using cloud infrastructure and business process models. A cloud-based corporate hierarchy model and an approach for designing and implementing corporate training with the possibility of partial or complete implementation of the organizational development strategy are proposed. The training is built on the basis of the business processes in the organization, for their visualization, diagrams using BPMN standard are developed. To organize comprehensive employee training, a training course using BPMN diagrams is also modeled.

Keywords: Corporate Training, Cloud Corporate Training, BPMN Business Process Modeling

ОБЛАЧЕН МОДЕЛ НА КОРПОРАТИВНО ОБУЧЕНИЕ, БАЗИРАН НА BPMN ДИАГРАМИ НА БИЗНЕС ПРОЦЕСИ

Лиляна Русенова[1], **Елена Сомова**[2]

СУ „Св. Климент Охридски“ и ПУ „Паисий Хилендарски“
e-mails: [1]lrusenova@fmi.uni-sofia.bg, [2]eledel@uni-plovdiv.bg

Статията представя един опит за корпоративно обучение, използващо облачна инфраструктура и модели на бизнес процеси. Предложени са облачен модел на корпоративна йерархия и подход за проектиране и реализация на корпоративно обучение с възможности за частична или цялостна имплементация на организационната стратегия за развитие. Обучението е изградено на основата на бизнес процесите в организацията, за онагледяването на които се използват диаграми, разработени с BPMN стандарт. За организиране на цялостно обучение на служителите се предлага учебен курс също моделиран чрез BPMN диаграми.

Ключови думи: Корпоративно обучение, Корпоративно обучение в облака, BPMN моделиране на бизнес процеси

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.084-090
2020 Mathematics Subject Classification: 97P30.

1 Introduction

In today's dynamic professional life, corporations cannot rely on training their employees only from educational institutions, which are unable to offer the necessary specific training quickly and affordably [4]. This is the reason why corporate training is consolidating its positions and entering state institutions and the private sector.

Corporate learning is a term that refers to the process of training and developing human resources in an organization [6], taking into account the organizational context and using all opportunities for formal, informal and self-directed learning, so as to improve their overall performance in the workplace [1]. Organizations offering corporate training usually formulate topics of a general nature – induction training for newly hired employees, leadership development, marketing strategies, data analysis, cybersecurity, project management, conflict resolution, workplace ethics, etc. [13], and they do not have a mechanism for partial or complete implementation of the organizational strategy for personnel development. Corporate training programs must meet the specific needs of the organization, increasing its competitive advantage and be adapted to the profile and specificity of the organization.

There are a number of problems that need to be overcome when developing and conducting corporate training: corporations may be located in different geographical areas and time zones; employees are not experienced with software training platforms; and it is necessary to clearly define the goals of the training [11] by the management staff, and then to interpret them unambiguously by the trainees. In large organizations (corporations) with many employees, the unification of the performance of job activities is a difficult task. For many corporations, the style of employees' work is their trademark (branding identity), representing their corporate identity. The problem is provoked by the differences in the individual personality characteristics of employees, as a result of which they interpret the goals and vision of the organization differently [5]. It is necessary to find an approach that allows for unambiguity in interpreting the requirements for the employee's work performance, the sequence and style of performing work activities and the expected outcomes, which will ensure partial or complete implementation of the corporate development strategy.

The goal of this paper is to present a methodology and approach for designing and implementing a corporate learning environment that solves this problem. To achieve this goal, it is necessary to conduct a study of the approaches and methods for training personnel in large organizations, the tools used, good practices in training professionals, the possibilities for unifying training for related management levels, roles and professional groups in the organization.

Section 2 presents the existing approaches in implementing corporate training. Section 3 offers an approach for rapidly implementing a low-cost and customized corporate learning environment using cloud infrastructure and BPMN diagrams of business processes. The Conclusion emphasizes the contributions of the study.

2 State of the Art

Corporate training needs appropriate pedagogical techniques and tools namely online learning tools and systems, games and simulations, business skills development, course-

ware design and classroom tools and systems [4], to be adequately applied to achieve strategic organizational goals [10]. Organizations use various methods and software tools to implement corporate training for personnel [9]. There are several approaches for training employees in the organization based on: specialized software training systems, software systems developed according to individual requirements and specifications of the organization, and functionalities provided by cloud platforms.

The first approach, through specialized training systems, is based on software platforms such as Corporate Learning Management System (CLMS), Learning Management Systems (LMS), Content Management Systems (CMS), and Intelligent Tutoring Systems (ITS) [14]. All of them are software applications for administration, documentation, tracking, reporting and delivery of e-learning courses or training programs [7].

Representatives of this group are EdApp, TalentLMS, iSpring Learn, SuccessFactors Learning, AhaSlides, etc. [12], [6]. The advantages of these systems are: user friendly user interface; functionalities for creating learning content and learning activities, including templates for creating unified learning units; opportunities for structuring personalized learning paths; built as mobile and/or web applications, providing flexibility in terms of time and place for accessing learning content; opportunities for integration with other learning systems; usage of gamification for training; tracking the progress of the learner; and statistics on the success of training.

These systems also have a number of disadvantages such as: high purchase price, maintenance and customization, high level of technical literacy of users, necessary prior training of users to familiarize with the interface and their capabilities, limitation in functionalities specific to a particular professional field and insufficient volume of stored data when choosing a version with free or partially paid access.

The second approach, through specific training systems, is applied in large organizations that have their own IT departments and have resources for software development, maintenance and updating [8].

The advantages of this type of system are: narrowly specialized to the necessary corporate functionalities, constant and reliable support, timely update ensured, complete integration with the internal technological infrastructure, and full similarity with the corporate profile.

In addition, we should also note the following disadvantages: large financial investment and a long period for design, development and implementation, as well as the need for a highly qualified team for support and training of personnel to work with system functionalities, compared to purchasing a ready-made solution.

The third approach is based on cloud services that are free or on the principle of "pay only for what is used".

The approach has many advantages in terms of access and support of training: intuitive and easy access to training content, a short period for integration into the technological infrastructure of the organization, a faster and more effective way to implement training with minimal initial financial investment and a small or completely absent IT team. This approach allows the use of web resources of different types – multimedia content created with various software products, groups of professional communities in social networks, virtual classrooms for synchronous training, augmented and virtual reality, etc. Other advantages of this type of training are retaining the attention of learners with multiple multimedia and interactive learning activities; the possibility of rapid scalability

in terms of the number of users and the space used for learning resources; personalization and adaptability to the individual characteristics of the learner; ensuring an individual approach to training; and opportunities for asynchronous and synchronous communication between the trainer and learners.

Disadvantages of the third approach are: lack of specialized functionalities and interface reflecting the professional profile of the corporation; partial or complete lack of opportunities to adjust, change and adapt the learning paths and learning activities to the current training needs in the context of the professional field; and a relatively slow procedure for updating the learning path and training materials.

The most widely used systems based on cloud services are: Coursera, Udemy, EdEx, MOOC, Medium, Futurelearn, Udacity, Skillshare, NPTEL, Swayam, OpenEdu.ru, Class Central, Preply, etc.

The three approaches considered use an electronic environment for learning, which is a basic toolkit for corporate training. A significant drawback of software tools for corporate training, in all three approaches, is the lack of methodology and functionalities for implementing the organizational development strategy, part of which is personnel training and development. The currently existing e-learning systems do not offer functionalities and mechanisms for partial or complete implementation of this strategy.

3 Approach for Corporate Training in Cloud Environment

We consider the activity of the organization as a set of business processes performed in the organization. Each employee performs their job duties in a specific context of the workplace at different levels of the organizational hierarchy, which we will call a **role** (corporate role). The paper proposes an approach for representing business processes for the respective roles in a given corporation through standardized BPMN diagrams and their application for training employees in a cloud environment. Comprehensive training will be implemented through training courses, also presented through BPMN diagrams, which illustrate the learning paths of the trainees.

3.1 Corporate training design

The management team sets development goals, which arise the training tasks in line with the organizational strategy. The tasks are related to the quality improvement of the employee performance. Each task is associated with one or more business processes corresponding to it. An employee with management functions defines a model of each business process, illustrated by a BPMN diagram. The diagram allows for an unambiguous representation of the business process structure and the expected performance from its participants. The corporate hierarchy in a given organization is modeled by a tree structure of roles. One or more business processes are attached to each role. For each role, training is defined as a learning path, the components of which are related to the study of the attached business processes.

This approach to structuring training allows for partial or complete implementation of the development strategy, depending on the degree of detail of the business processes and the specifics of the organization.

Two types of training are conducted in organizations – horizontal and vertical. **Hor-**

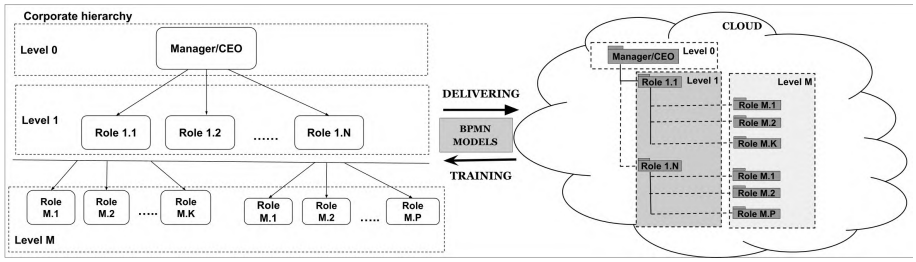


Figure 1: Corporate hierarchy implemented in the cloud

izontal training aims to develop the knowledge and skills of employees in their current role, so that they perform their work activities in accordance with the corporate strategy. This training is applied to newly hired employees and employees who are assigned new tasks.

Vertical training aims to support the career growth of "talented" employees in order to prepare them for a role at the next, higher level in the corporate hierarchy.

Horizontal training is the most often conducted, where each employee can train with learning resources attached to their role in the corporate hierarchy. If vertical training is required, selected learning resources corresponding to the higher-level role for which the employee needs to be trained, are additionally attached to the current learning resources.

3.2 Model of corporate hierarchy in the cloud

In the practical implementation of the proposed approach, the analogy of the tree-like corporate hierarchy with the hierarchy of folders and files in the cloud space is used. It is proposed to create a file hierarchy with learning resources that corresponds to the corporate one. The functionalities of cloud-based platforms, allowing the definition of rights for sharing, management and access to resources by analogy with the rights of different roles in the corporation, are used. Each employee, depending on their role and level in the organizational hierarchy, has different rights to access learning resources.

The manager of a given level creates learning resources for the roles located in the lower levels of the hierarchy and attaches the resources to them. The approach offers a concept according to which each manager will define and periodically update the structure and content of the business processes taking place in the level of the organization that he manages, ensuring their full compliance with the corporate strategy.

For experimental technical implementation, the Google Workspace cloud environment was used. Google Disc capabilities were used to create a hierarchy of folders and share resources with one or more users with different access rights to the information.

3.3 Learning approach based on business process modeling

A key point in achieving the set learning objectives in corporate training is a clear, unambiguous and correct understanding of the components by the learner that make up the business process. To achieve this clarity, it is important to find an explicit representation of the business process, which can then be illustrated through a graphical representation. In practice, various notations for visual representation of business processes are used.

For our purposes, the BPMN notation [3] was assessed as the most suitable, as it

has a number of advantages in representing business processes: BPMN is universal and standardized, allows the representation of all types of business processes – simple and complex; easy to read, because it is intended for business users, not IT specialists; has opportunities for understandable, simplified and unambiguous presentation of different levels of detail of business processes; each business process can be presented in a different aspect through a diagram, suitable for training the different employee roles; and the diagrams can be quickly and easily updated in sync with the changes undertaken in the corporate development strategy.

Corporate business process diagrams

Each role in the organization can participate in one or more business processes, which are modeled uniquely as BPMN diagrams. Each BPMN diagram represents the sequence of activities of a given corporate role, including in collaboration with other roles within or outside the organization. Thus, for each role in the organizational structure, a set of process diagrams (including subprocesses), which are interpreted as learning materials, is offered.

Diagrams as a learning path

For each role in the organization, learning resources are organized in a learning path, creating a complete learning course as a BPMN process diagram, composed of multiple subprocesses, each representing a business process related to the employee's role. The course diagram represents the appropriate order for studying these business processes.

Training through executable diagrams

BPMN diagrams can be used for training in a static or dynamic mode. In the static approach, the diagram is presented as an illustrative image that does not have interactive capabilities. In the dynamic approach, appropriate software, allowing interactive visualization of the workflow from the diagram, is integrated. The cloud-based tool bpmn.io [2] used in the study is a free project of Camunda and provides functionalities for easy and convenient creation and editing of BPMN diagrams, as well as for dynamic simulation of the workflow in the diagram. Such cloud platforms have built-in capabilities for integration into other web tools, which allows extreme flexibility in terms of use and adaptation to the specific professional profile of the company.

4 Conclusion

Corporate training is assessed as successful when it partially or fully implements the organizational development strategy. At present, there are no established good practices in this direction that offer a solution and satisfactory results. The paper examines three different approaches for corporate training, presenting their advantages and disadvantages in terms of their possibilities for implementing the corporate development strategy. The analysis outlines the need for an approach that offers a suitable solution. In this regard, a design (model and methodology) of corporate training based on the business processes taking place in the organization is proposed. To achieve an unambiguous explicit representation, BPMN diagrams which are interpreted as learning paths, are used. The organization is considered as a set of employees, each of whom has a specific workplace context, called a role. For each role in the organization, learning paths are attached, illustrating through diagrams the business processes in which the role participates. The visualization of process diagrams is in two modes – static and dynamic. The proposed

approach for corporate training is based on cloud infrastructure and the hierarchical representation of the corporation's structure, which makes it relatively inexpensive to use, quick to implement, and easy and convenient for employees to use.

References

[1] M. Atanasova. Training and development of human resources in organizations – theory and practice (in bulgarian). *Avangard Prima, Sofia*, 2015.

[2] bpmn.io.

[3] Business process model and notation (bpmn).

[4] L. Freifeld. 2023 training industry report. *Training, https://trainingmag.com/2023-training-industry-report/*, 2023.

[5] S. Magomedova, S. Musaeva, Ispalieva S. Modern trends in the organization and the choice of personnel training methods (in russian). *Regional problems of economic transformation, p. 97-106, DOI: 10.26726/1812-7096-2021-8-97-106*, 2022.

[6] D. McIntosh. List of corporate learning management systems. *eLearning Industry*, 2024.

[7] Ch. Pappas. The top elearning statistics and facts for 2015 you need to know. *eLearning Industry, https://elearningindustry.com/elearning-statistics-and-facts-for-2015*, 2021.

[8] G. Pashev, L. Rusenova, G. Totkov. Application of business process modeling systems in the automation of administrative procedures for on-the-jobs training (in bulgarian). *Proceeding of the National Conference "Education and Research in the Information Society", Plovdiv, May, 2019, p. 095-104*, 2019.

[9] R. Peicheva-Forsait. E-learning - theory, practice, aspects of pedagogical design (in bulgarian). *Sofia University Journal for E-learning*, 2010.

[10] D. Ponomarev. Corporate training of software testers as a pedagogical problem (in russian). *Vestnik of Immanuel Kant Baltic Federal University. Series: Philology, Pedagogy, Psychology, 4, p. 103-114, DOI: 10.5922/vestnikpsy-2024-4-10*, 2024.

[11] T. Shendel and S. Yarkova. Evaluation of the effectiveness of staff training: methodological aspect (in russian). *Krasnoyarsk Science, 10(1), p. 106-123, DOI: 10.12731/2070-7568-2021-10-1-106-123*, 2021.

[12] Software as a service / cloud learning management systems, elearning industry.

[13] A. Tran. 15+ types of corporate training examples for all industries — 2024 reveals. *AhaSlides, https://ahaslides.com/bg/blog/corporate-training-examples/ What-is-Corporate-training-and-why-use-it*, 2024.

[14] N. Žarić, S. Šćepanović, A. Balota, D. Strujić. Application and using corporate learning management systems in it companies. *The Seventh International Conference on eLearning (eLearning-2016), 29 – 30 September 2016, Belgrade, Serbia*, 2016.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

NUMERICAL STUDY OF THE HAZARDOUS FACTORS OF A FIRE IN A PASSENGER RAILWAY CAR

Valentin Chochev[1], Svilena Arabadzhieva[2]

Faculty of Fire Safety and Civil Protection, Academy of the Ministry of Interior, Sofia, Bulgaria
e-mails: [1]vchochev@abv.bg, [2]ssarab@mail.bg

This report presents the results of a numerical modelling of a fire in a typical Bulgarian State Railways passenger compartment railway car using the PyroSim software product. The created numerical model was previously verified through experiments conducted on different scales. This study examines two scenarios of fire development – with the compartment door closed and with the compartment door open, in which the fire occurred. The obtained dependencies of the change in time of two of the dangerous fire factors – loss of visibility and carbon monoxide concentration, which in this case are the most dangerous, were analysed. The obtained results show what is the maximum time for evacuation from the railway car. With the compartment door closed, passengers have about 80 seconds more to evacuate under favourable conditions from the corridor of the railway car.

Keywords: fire modelling, FDS, CFD field model, passenger railway car

ЧИСЛЕНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОПАСНИТЕ ФАКТОРИ НА ПОЖАР В ПЪТНИЧЕСКИ ЖЕЛЕЗОПЪТЕН ВАГОН

Валентин Чочев[1], Свилена Арабаджиева[2]

Факултет „Пожарна безопасност и защита на населението“, Академия на Министерството на вътрешните работи, София, България
e-mails: [1]vchochev@abv.bg, [2]ssarab@mail.bg

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.091-100

2020 Mathematics Subject Classification: 76-10, 80-10.

Настоящият доклад представя резултатите от проведено числено моделиране на пожар в типичен за Българските държавни железници пътнически купеен железопътен вагон чрез използване на програмния продукт PyroSim. Създаденият числов модел е предварително верифициран чрез проведени експерименти в различен мащаб. В настоящото изследване са разгледани два сценария на развитие на пожара – при затворена и при отворена врата на купето, в което е възникнал пожарът. Анализирани са получените зависимости на изменението на два от опасните фактори на пожар във времето – загуба на видимост и концентрация на въглероден оксид, които в конкретния случай са най-опасни. Получените резултати показват какво е максималното време за провеждане на евакуацията от обема на вагона. При затворена врата на купето пътниците имат около 80 секунди повече да се евакуират при благоприятни условия през коридора на вагона.

Ключови думи: моделиране на пожар, FDS, CFD полеви модел, пътнически купеен вагон

Introduction

Fires in passenger rolling stock are rare. They are 1.89% of all serious rail accidents in the European Union, less than 2.00% of all rail accidents in the Republic of Bulgaria and only 0.06% of all fires occurring on the territory of the Republic of Bulgaria. However, they can have serious consequences, raise public concern about the safe operation of the railway system and cause unexpected changes in it. A clear example of this is the fire that occurred on 28 February 2008 on the Sofia – Kardam train, in which nine people died and nine others were injured. After the fire, a sharp decline in passenger confidence in the fire safety of passenger rolling stock was reported, and all couchette cars were withdrawn from operation [2].

The presence of many passengers, limited evacuation options, and difficult access for fire safety and civil protection services to some parts of the railway infrastructure aggravate the situation in the event of a fire. This necessitates a detailed study of the development of fires.

A number of studies have been conducted worldwide in the field of fire safety of rolling stock. The common methods for studying the spread of fires and smoke are full-scale and reduced-scale experiments, numerical and analytical methods. Full-scale experiments of fires in passenger cars are rare, as they are expensive, time-consuming and complex to perform. Reduced-scale experiments can be considered as an alternative, but the results obtained in them cannot be fully converted to the results of real fires. This is due to the lack of complete similarity between the model and the real experiments. Theoretical methods are too limited and useful only in simple geometries. These limitations, together with the great revolution in computer processing capability, have convinced researchers to use numerical modelling as a powerful tool for studying fire phenomena in recent years [7].

The analysis found that over 75% of the experiments and studies conducted were in air-conditioned, open (saloon) railway cars. Studies with compartment passenger railway cars, which are typical of railway transport in the Republic of Bulgaria, are rare (passenger railway cars, type B84 are most commonly used in Bulgarian railways [2]).

Of all the hazardous factors in a fire, smoke toxicity and its spread pose the great-

est risk to humans. The maximum permissible value for carbon monoxide is $1.16.10^{-3}$ kg/m^3, for oxygen – 0.226 kg/m^3, and for hydrogen cyanide – 23.10^{-6} kg/m^3. They are considered to be most critical when involved in a fire in a closed volume, such as a railway car, as there is a greater chance of oxygen deficiency, leading to incomplete combustion and a larger amount of these gases [9, 10]. It has been found that despite the toxicity of hydrogen cyanide, it is only a minor contributor to death in the presence of carbon monoxide [1]. It is carbon monoxide/dioxide and hydrogen cyanide that are the main products when burning polyurethane foam, which is the main material used for seats in railway transport.

The dynamics of fire and the change in temperature (as one of the dangerous factors of fire) in the compartment volume of a passenger railway car, type B84, are analysed in a comprehensive full-scale real experiment in [3]. The results are compared with a simulation model based on the theoretical approach, using FDS, version 6. The comparison of the results indicates that the created model is adequate.

In [3], the dynamics of a fire in the volume of a passenger railway car, type B84, with the door of the compartment in which the fire occurs open is analysed. Among leading fire safety specialists, there is a discussion about how the dynamics of a fire in the car would change if it developed with the door of the compartment closed and how this would affect the evacuation time of passengers. In light of the above discussions, the aim of the present study is to analyse and compare the toxicity of smoke during a fire and its spread within a conventional railway car, in order to understand the complex dynamics of smoke generation and accumulation in two development options: with the door of the compartment in which the fire occurs open and with the door of the compartment in which the fire occurs closed. For this purpose, numerical modelling techniques were used in the present study, the details of which are discussed in the next section.

Numerical modeling

Numerical modelling is performed using the PyroSim software product of Thunderheat engineering, for which an academic license was obtained. PyroSim is designed to complement the Fire Dynamics Simulator (FDS). FDS is a powerful fire simulator that was developed at the National Institute of Standards and Technology (NIST) in the USA. FDS models can predict smoke, temperature, carbon monoxide and other substances during fires. The software has been successfully verified against various experimental studies, and the data obtained from FDS simulations have been widely applied in fire safety engineering practice [2]. FDS simulates fire scenarios using computational fluid dynamics (CFD) optimized for low-velocity, thermally driven flow.

Mathematical model for predicting fire dynamics

FDS solves the Navier–Stokes equations numerically, where their partial derivatives for conservation of mass, momentum and energy are approximated as finite differences and the solution is updated in time and space, based on a three-dimensional rectangular structured grid. The three-dimensional Navier–Stokes equations, together with the mass conservation equation, are solved iteratively for the turbulent and transient flow in the railway car. Equation (1) controls the time step throughout the simulation, according to the Courant, Friedrichs and Lewy (CFL) conditions [8]:

(1) $$\Delta t = \frac{5.\sqrt[3]{\delta x \delta y \delta z}}{\sqrt{g.H}}.$$

The combustion models are calculated at each time step. The flow turbulence is modelled using the Large Eddy Simulation (LES) model. In this study, a field fire model implemented using the PyroSim program was used. The field fire model is based on the following equations [5, 8]:

- Mass conservation equation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}.(\rho u_j) = 0,$$

where: ρ – density, kg/m^3; t – time, s; u – projection of the velocity vector along the x-axis in Cartesian coordinates, m/s.

- Momentum conservation equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial h_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i,$$

where: p – dynamic pressure, Pa; g – gravitational acceleration, m/s^2.

For Newtonian fluids, the viscous stress tensor is defined as follows:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij},$$

where: μ – laminar dynamic viscosity, Pa.

- Energy conservation equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j h) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\lambda}{c_p}.\frac{\partial h}{\partial x_j}\right) - -\frac{\partial \dot{q}_j^R}{\partial x_j},$$

$$h = h_0 + \int_{T_0}^{T} c_p dT + \sum_k Y_k H_k,$$

$$c_p = \sum_k Y_k c_{p,k},$$

where: Y_k – static enthalpy of the mixture; H_k – heat of formation of the k-th component; Cp – heat capacity of the mixture at constant pressure; $\dot{q}_j^R$ – flux of radiation energy in the direction x_j; λ – coefficient of thermal conductivity, W/m.K.

- Chemical component conservation equation k:

$$\frac{\partial}{\partial T}(\rho Y_k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_j Y_k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho D \frac{\partial Y_k}{\partial x_j}\right) + S_k.$$

- Equation of state of an ideal gas:

$$p = \rho R_0 T \sum_k \frac{Y_k}{M_k},$$

where: R_0 – universal gas constant; T – absolute temperature, $^\circ K$; M_k – molar mass of the kth component.

Using the above equations, a local equilibrium is obtained. These equations fully describe laminar flows.

As mentioned above, polyurethane foam is the most widely used material for seats in railway transport. The numerical model incorporates data on the properties of polyurethane foam used for seats in type B84 passenger railway car from [4] as well as from [6], the main ones of which are: density – 106 kg/m^3; specific heat capacity – 1,7 kJ/kg.K; thermal conductivity – 0,05 W/m.K; heat of combustion – 2,54E+4 kJ/kg; soot yield– 0,113 g/g; carbon monoxide yield – 0,024 g/g.

To confirm the gas species after the multiphase reaction, the components of each element were calculated using the stoichiometric balance equation. Due to limitations in the use of FDS, nitrogen was balanced against N_2. This is shown in equation (2).

$$C_xH_yO_zN_v + v_{O_2}CO_2 \rightarrow v_{CO_2}CO_2 + v_{H_2O}H_2O + v_{CO}CO + v_S Soot + v_{N_2}N_2 \tag{2}$$

The molar mass of the fuel is calculated using equation (3) as shown below. Since FDS assumes that carbon black is composed of carbon and hydrogen [11], the molecular mass of carbon black reduces to equation (4).

$$m_F = x.m_C + y.m_H + z.m_O + v.m_N \tag{3}$$

$$m_S = X_H.m_H + (1 - X_H).m_c \tag{4}$$

The stoichiometric coefficients for carbon monoxide and soot are calculated using equation (5).

(5)

$$v_{CO} = \frac{m_F}{m_{CO}}.Y_{CO} : v_S = \frac{m_F}{m_S}.Y_s \tag{5}$$

To calculate the unknown coefficients, the known atomic balances are arranged in matrix form as shown in equation (6).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{CO_2} \\ v_{H_2O} \\ v_{N_2} \\ v_{O_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x - v_{CO} - v_S\,(1 - X_H) \\ v_{H_2O} \\ v_{N_2} \\ v_{O_2} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

The stochiometric coefficients are as follows: $v_{CO_2} = 1,9791$; $v_{H_2O} = 0,3845$; $v_{CO} = 0,0441$; $v_s = 0,3099$; $v_{N_2} = 0,1000$; $v_{O_2} = 2,7234$.

Digital model of a passenger railway car and boundary conditions

A passenger railway car type B84 was adopted as the basis for developing the numerical model (Fig. 1), with which a real full-scale experiment was carried out, described in [3].

Main characteristics of the model: length of the car – 24,200 mm; height of an empty car from the main rail – 4,050 mm; width of the car with the lining in the lower window section – 2,960 mm; width of the windows – 14,000 mm; height of the windows 950 mm; width of the doors - 700 mm; height of the doors 1,900 mm.

[2pt]

Interior equipment: seats – textile upholstery and polyurethane foam filling with

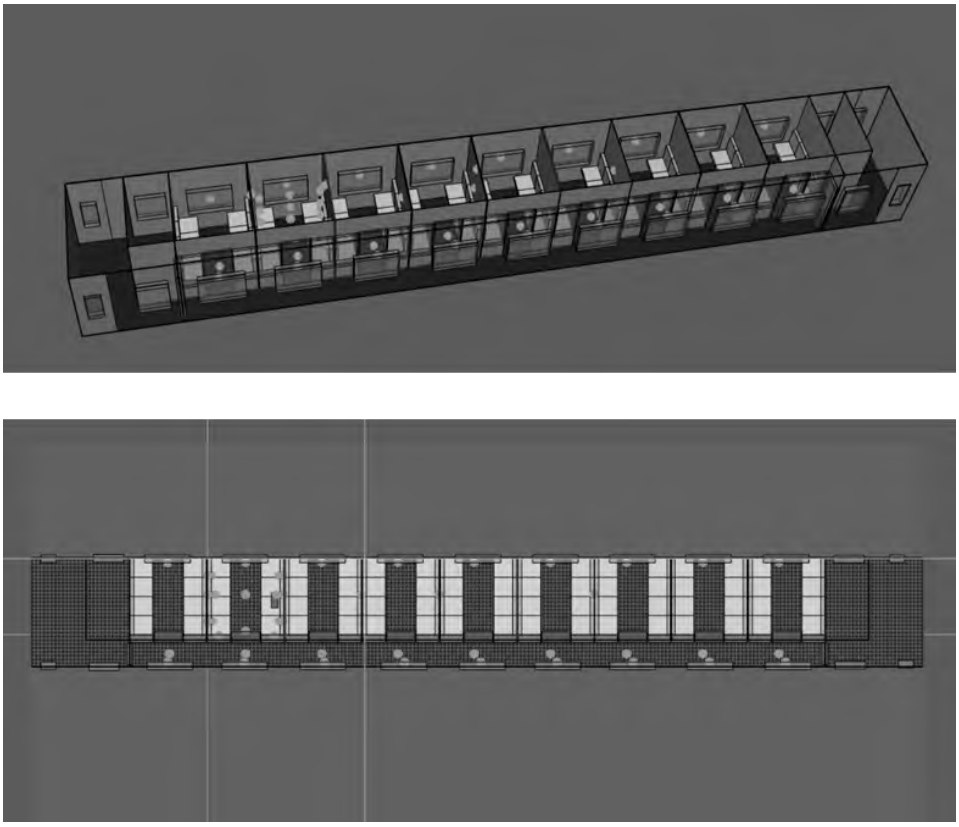


Fig. 1 Digital model of a second-class compartment railway car, type B84 (the grey dots are sensors for measuring T, CO, CO_2, O_2 and visibility)

a density of 106 kg/m^3; interior partitions – made of veneered particle boards with a thickness of 18 mm.

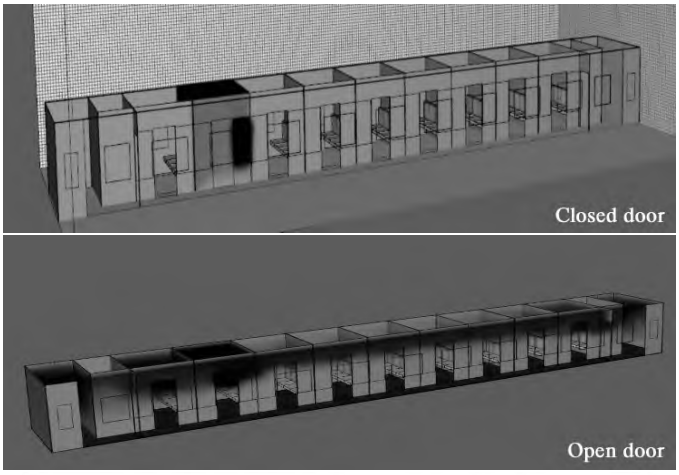
When modelling the fire, the following scenario was adopted: a fire in compartment No. 2 is considered, developing in a closed volume, limited by the calculation area; the compartment door is open/closed; the compartment windows are closed; the combustible load consists of standard seats and partitions used in a railway car, type B84.

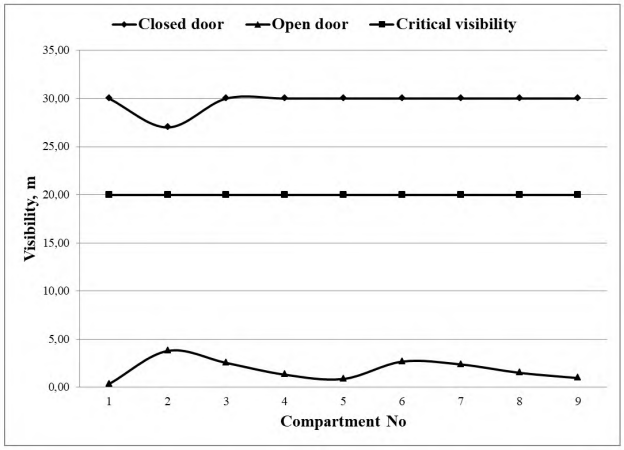
The following initial conditions were assumed in the modelling: initial temperature of the environment is 11°C; the ignition source is activated at time t = 0 s; the combustion source is a source of typical ignition due to deliberate arson or vandalism, (e.g., a newspaper ignited for 3 minutes), with an average power of 7 kW, producing a heat flux of 25 to 30 kW/m^2 in accordance with Annex A of BDS EN 45545-1. The ignition model is a paper cushion, defined in UIC 564-2 – Code of the International Union of Railways, with dimensions of 0.39 × 0.17 m; the duration of the impact of the ignition source on the seats is 180 seconds; the glazing of the compartment window and doors at the initial moment of the fire is solid.

The domain is a space with a length of 23 m, a width of 10 m and a height of 10 m.

The computational grid consists of 2,340,000 with dimensions of 0.1x0.1x0.1 m. In order to record the data on temperature, concentration of carbon monoxide, carbon dioxide, oxygen and visibility in compartment No. 2, 45 pcs. sensors are placed. 45 pcs of sensors are placed also in the corridor of the car, in front of the door of each compartment, at a height of 1.70 m (average height of a person). The duration of the simulation is 600 s. The glazing of the windows of the compartment, corridor and doors is destroyed when the temperature of the environment in the glazing zone reaches 300°C.

Main results

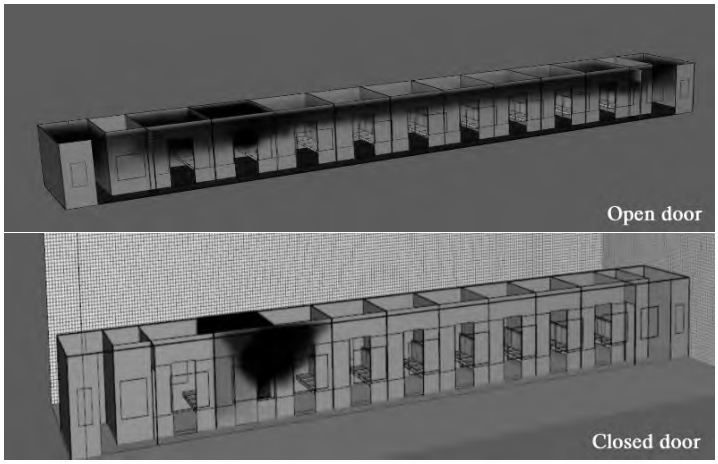


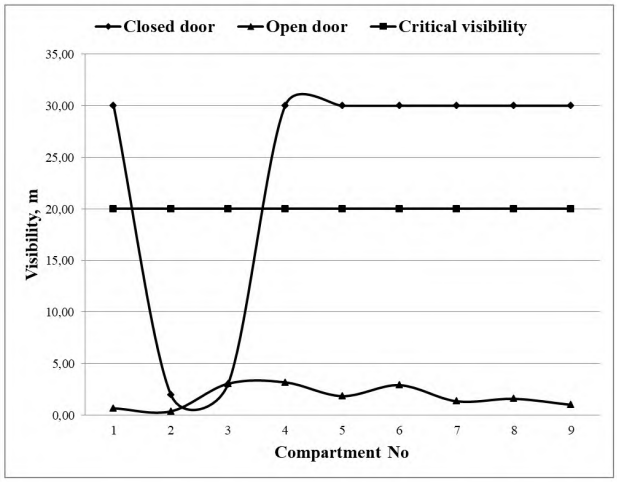


(a) 87 s

When analysing the spread of smoke gases and the change in visibility in the corridor of the railway car, it can be seen that 87 seconds after the occurrence of combustion in compartment No. 2 (Fig. 2a) the visibility with the closed door of compartment No. 2 is above the critical 20 m, while as the fire develops with the door open it is already below the critical for normal movement of people. At 89 seconds, (Fig. 2b), at the moment of destruction of the glazing of the door of compartment No. 2, the visibility in the area

of compartments No. 2 and 3 sharply drops below the critical one, due to the release of combustion products into the corridor, while in the rest of the car it is above the critical one.

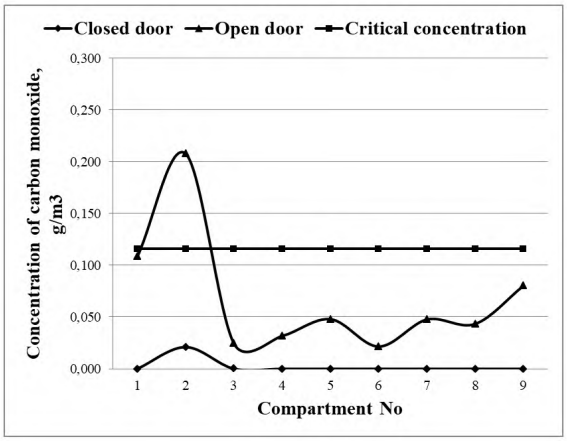




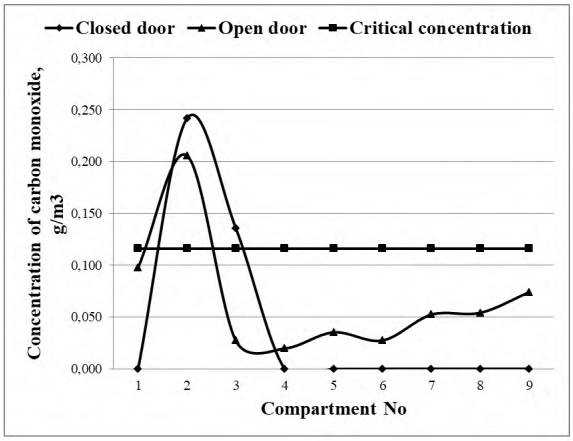
(b) 89 s

Fig. 2. Spread of smoke products of fire and change in visibility in the carriage corridor at (a) 87 s and (b) 89 s

Tracking the change in the concentration of carbon monoxide, it is evident that at 87 seconds (Fig. 3a) its concentration with the open door of compartment No. 2 is 0.208 g/m^3, which is above the critical value for people of 0.116 g/m^3, while with the closed door it is below the critical one. At 89 seconds (Fig. 3b) the concentration of carbon monoxide in the area of compartment No. 2 in both variants of fire development is above the critical one, with the one with the initially closed door having a value of 0.242 g/m^3 and being higher than that with the open door. These results may be due to the fact that with the closed door of the compartment, combustion proceeds in a lack of oxygen as incomplete combustion with the release of a larger amount of carbon monoxide.



(a) 87 s



(b) 89 s

Fig. 3 Carbon monoxide concentration at (a) 87 s and (b) 89 s

Conclusions

Due to the increasing number of fires in railway transport, a better understanding of fire dynamics and the spread of toxic combustion products is needed to reduce life-threatening effects on people. The danger of smoke in the event of a fire in a railway carriage compartment is fundamental for passengers.

The present study, conducted through numerical studies and the results obtained, show that the condition of the doors of the compartment in which the fire occurred affects the visibility and concentration of carbon monoxide in the corridor of the railway car.

With the door of the compartment in which the fire occurred closed, passengers

have about 80 s more time to evacuate under favorable conditions in the corridor of the carriage, without reduced visibility and dangerous concentrations of carbon monoxide.

The results of this study can be used in the development of practical guidelines and standard operating procedures for the actions of service personnel during the evacuation of passengers in cases of fire in compartment railway carriages.

References

[1] Y. Alarie. Toxicity of Fire Smoke, *Critical Reviews in Toxicology*, Vol. 32, (2002), 264–282;

[2] С. Арабаджиева. Изследване динамиката на развитие на пожар в ж.п. вагони, Дисертация за придобиване на ОНС „доктор", Академия на МВР, (2024) [S. Arabadzhieva. Izsledvane dinamikata na razvitie na pozhar v zh.p. vagoni, Disertatsiya za pridobivane na ONS „doktor", Akademiya na MVR, (2024) (in Bulgarian)]

[3] V. Chochev, S. Arabadzhieva. Real full-scale experiment and numerical simulation of a fire in a compartment of a passenger railway car. A comparative analysis, *Engineering Sciences*, LIX, No. 4, (2022), 57-67;

[4] V. Chochev, S. Arabadzhieva, M. Protic. Modeling of fire in a coupe with a closed door in rolling stock, *Scientific Journal Safety Engineering*, vol. 11, (2021), 15-21;

[5] И. Елисеев, А. Фомин, О. Войтенок. Математическая модель динамики распространения опасных факторов пожара в двухэтажных пассажирских вагонах, *Научно–технический журнал. Технические средства противодействия терроризму*, Серия 16, (2018), 37–42 [I. Eliseyev, A. Fomin, O. Voytenok. Matematicheskaya model' dinamiki rasprostraneniya opasnykh faktorov pozhara v dvukhetazhnykh passazhirskikh vagonakh, *Nauchno–tekhnicheskiy zhurnal. Tekhnicheskiye sredstva protivodeystviya terrorizmu*, Seriya 16, (2018), 37–42 (in Russian)]

[6] M. Hurley, D. Gottuk, J. Hall, K. Harada, E. Kuligowski, M. Puchovsky, J. Torero, J. Watts, C. Wieczorek. Handbook of Fire Protection Engineering, 5th ed., Springer, New York, NY, USA, 2016;

[7] A. Kazemipour. Investigation of Fire Growth and Spread in a Model-Scale Railcar Using an Applied Approach, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, Vol. 9, No. 1, (2016), 279-292;

[8] K. McGrattan, R. McDermott, M. Vanella, S. Hostikka, J. Floyd. Fire Dynamics Simulator: User's Guide, 6th ed.; NIST—National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, USA, 2020;

[9] A. Stec. Fire Toxicity – The Elephant in the Room, *Fire Safety Journal*, 91, (2017), 79–90;

[10] A. Stec, T. Hull, D. Purser, J. Purser. Fire Toxicity ssessment: Comparison of Asphyxiant Yields from Laboratory and Large Scale Flaming Fires, *Fire Safety Science*, 11, (2014), 404–418;

[11] Updated FDS Combustion and Fuel Composition Calculators. Available online https://www.thunderheadeng. com/2015/09/updated-fds-combustion-and-fuel-composition-calculators.

СЕКЦИЯ В: ОБРАЗОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

SECTION C: EDUCATION IN MATHEMATICS AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

TRAINING ON HAMING CODE WITH THE HELP OF DIDACTIC TOOLS – METHODOLOGICAL AND HISTORICAL ASPECTS

Daniel Denev
Faculty of Technical Sciences
Konstantin Preslavsky University of Shumen, Shumen, Bulgaria
e-mail: d.denev@shu.bg

Though the teaching of Hamming codes has not lost its relevance and remains an essential part of the error control codes theory, it is a tool without which modern communication and computer science students can hardly be prepared. This abstract is a survey of the historical development of Hamming codes with a focus on the role of Richard Hamming and the post-Richard Hamming periods in this respect. Their close connections to the error-free transmitting of data and the storage of data in the digital-era are examined. Furthermore, methods are presented to teach such a complex material using didactic tools for the successful development of the students. The most important point of the study is the training through innovative disciplines, such as data transmission. The main goal is to become a mass practice in universities and schools, so that it is not only a novelty, but also to be a motivation for undertaking practical projects.

Keywords: Hamming codes, didactic tools, data transmission

ОБУЧЕНИЕ ПО КОД НА ХЕМИНГ С ПОМОЩТА НА ДИДАКТИЧНИ ИНСТРУМЕНТИ – МЕТОДОЛОГИЧНИИ ИСТОРИЧЕСКИ АСПЕКТИ

Даниел Денев
Факултет по технически науки,
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“, Шумен, България
e-mail: d.denev@shu.bg

Въпреки че преподаването на кодове на Хеминг не е загубило своята релевантност и остава съществена част от теорията на кодовете за контрол на грешките, то е инструмент, без който съвременните студенти по комуникации и компютърни науки трудно могат да бъдат подготвени. Това резюме е преглед на историческото развитие

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.103-108

* Тази статия е разработена в рамките на проекти № РД-08-133/02.02.2024 и № РД-08-110/31.01.2024 по Фонд научни изследвания на ШУ „Епископ Константин Преславски“ за 2024.

2020 Mathematics Subject Classification: 94B05, 94B99, 97U50, 68N99.

на кодовете на Хеминг с акцент върху ролята на Ричард Хеминг и периодите след него. Разгледани са тесните връзки с предаването на данни без грешки и съхранението на данни в цифровата ера. Освен това са представени методи за преподаване на такъв сложен материал с помощта на дидактически средства за успешното развитие на ученици и студенти. Най-важният момент от проучването е обучението чрез иновативни дисциплини, като тази по предаване на данни. Основната цел е да се превърне в масова практика в университетите и училищата, така че да не е само новост, но и да присъства като мотивация за предприемане на проекти за практически упражнения.

Ключови думи: кодове на Хеминг, дидактически средства, предаване на данни

Въведение. Кодовете за откриване и корекция на грешки играят ключова роля в съвременния дигитален свят. Тази статия представя компютърна дидактична програма за обучение по код на Хеминг, която улеснява разбирането на концепцията за корекция на грешки чрез интерактивни инструменти. Ще бъдат разгледани методологични аспекти и връзки с историческите методи на обучение. Обучението по теория на кодовете е ключов елемент в подготовката на специалисти по информационни технологии и комуникации. Кодът на Хеминг, създаден през 1950 г. от Ричард Хеминг, е сред първите практични методи за откриване и корекция на грешки. Той намира приложение в широк спектър от области, включително комуникационни мрежи, цифрова електроника и съвременни системи за съхранение на данни. През последните десетилетия използването на компютърни технологии в обучението открива нови възможности за ефективно преподаване на този сложен материал. Модерните студенти, израснали в ерата на цифровите технологии, предпочитат интерактивните методи на обучение пред традиционните. Традиционният подход често затруднява студентите в усвояването на преподавания материал. Въвеждането на интерактивни симулационни програмни модели в образователния процес позволява на студентите да възприемат материала по по-удобен и привлекателен за тях начин. Един от основните приоритети на университетите днес е развитието на съвременно образование чрез внедряване на интерактивни образователни софтуерни инструменти, които предоставят на студентите гъвкавост да учат по всяко време, на всяко място и чрез всяко интерактивно устройство. [1, 3, 5, 6]

Теоретична основа на кода на Хеминг. Кодът на Хеминг представлява един от най-известните методи за корекция на единични грешки. Математическата му основа се базира на използването на проверочни разряди за откриване и коригиране на грешки. Основната идея на кода на Хеминг е да добавя излишна информация към данните, която позволява на системата да открива и коригира единични грешки. Алгоритъмът включва изчисляване на проверочни битове, които осигуряват идентификацията на грешките в предаваната информация. Например, при кодиране на 4-битов блок се добавят 3 проверочни бита, които осигуряват възможност за корекция на всяка единична грешка. Областите на приложение на кодовете на Хеминг са посочени на фиг. 1.

Методи на преподаване по код на Хеминг. Традиционните методи на преподаване разчитат на теоретични обяснения и решаване на примери на дъската. Модерните технологии обаче предлагат значителни предимства чрез използването



Фиг. 1. Приложение на кодовете на Хеминг

на интерактивни симулации и програми за визуализация. Например, компютърната програма за код на Хеминг позволява на студентите да виждат процеса на кодиране и декодиране в реално време, като визуализацията и интерактивните упражнения служат за подобряване на разбирането. Съчетаването на теоретични и практически упражнения повишава ефективността на обучението.

Код на Хеминг. Коригиращ групов $(n,\ k)$ код, в който матрицата на проверките $M(n,k)$ има $r = (n-k)$ реда и $(2r-1)$ стълба. Информационните и контролните разряди са разделени и може да се посочи мястото им в кодовата комбинация. Всички r-разрядни двоични последователности са ненулеви – $d_0 = 3$. Може да откриват двойни грешки. Може да изправят всички единични грешки. Коригиращото число указва номера на изкривеният елемент в кодовата комбинация. Броят на разрядите на коригиращото число е r. За да може да се посочи всеки сгрешен елемент, трябва: $r > \log_2(n+1)$.

Формиране на разряд. Тези елементи се формират в предавателя при предаване на кодовата комбинация. Оригиналната поредица битове е: $x_1x_2x_3x_4x_5...$,

Контролните разряди се разполагат на 1, 2, 4, 8.... позиции в предаваната кодова комбинация. Броят на контролните битове се определя от: $r = n-k$ и $r\ > \log_2(n+1)$

Контролните битове се получават:

$b_1 = a_1 = a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} \oplus a_{13}...$,

$b_2 = a_2 = a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11}...$,

$b_3 = a_4 = a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13}...$,

$b_4 = a_8 = a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13}...$,

Предаваната поредица битове (кодовата комбинация) е: $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$

Предавана поредица	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	...
Информационни и кодови елементи	b_1	b_2	x_1	b_3	x_2	x_3	x_4	b_4	x_5	x_6	...

Коригиращо число на Хеминг. Получаваната поредица битове (кодовата комбинация) е: $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$....

Коригиращото число (r) показва кой бит е сгрешен при предаването и трябва да се инвертира.

$$r = E_rE_{r-1}\ldots.E_2E_1$$

$E_1 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 \oplus a_7 \oplus a_9 \oplus a_{11} \oplus a_{13} \oplus a_{15} \oplus a_{17} \oplus a_{19} \oplus a_{21}...$,

$E_2 = a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus a_{18} \oplus a_{19} \oplus a_{22}...,$
$E_3 = a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{20} \oplus a_{21} \oplus a_{22}...,$
$E_4 = a_8 \oplus a_9 \oplus a_{10} \oplus a_{11} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{14} \oplus a_{15} \oplus a_{24} \oplus a_{25}...,$
$E_5 = a_{16} \oplus a_{17} \oplus a_{18} \oplus a_{19} \oplus a_{20} \oplus a_{21} \oplus a_{22} \oplus a_{23} \oplus a_{24} \oplus a_{25}...,$
$E_6 = a_{32} \oplus a_{33} \oplus a_{34} \oplus a_{35} \oplus a_{36} \oplus a_{37} \oplus a_{38} \oplus a_{39} \oplus a_{40} \oplus a_{41}...,$

Във всяка последователност от елементи, обхващани от една проверка, трябва да влиза само един контролен елемент – елементът a_1 участва само в E_1, a_2 – само в E_2, a_4 – само в E_3 и т.н. Тоест всеки първи елемент е контролен, тъй като той участва само в тази проверка. Тези елементи се формират при получаване на кодовата комбинация в приемника. [3, 5]

Практическо приложение на дидактичната програма. Дидактичната програма за код на Хеминг включва модули за генериране на кодове, симулация на грешки и автоматична корекция. Един от примерите в програмата е задачата за предаване на бинарна последователност с предварително дефинирани проверочни битове. Студентите могат да симулират добавянето на грешки в предаваната последователност и да проследят процеса на корекция. Програмата е изключително полезна за курсове, включващи обучение по дигитална електроника и телекомуникации, тъй като тя предоставя нагледен пример за приложение на теоретичните знания в реални ситуации. Приложението е проектирано за обработка на информационни комбинации с дължина до 26 бита в режим на кодиране и до 32 бита в режим на декодиране. То е разработено с помощта на програмния език Python, като за изграждането на отделните му модули са използвани специфични контекстуални библиотеки. Потребителският интерфейс на приложението е реализиран в два езикови варианта: български (BG) и английски (EN).

$$H_{S_{12345678}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad H_{C_{1234}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Фиг. 2. Внедрена матрица за построяване на кодовете на Хеминг

$$\begin{vmatrix} C_4 = S_5 \oplus S_6 \oplus S_7 \oplus S_8 \\ C_3 = S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 \oplus S_8 \\ C_2 = S_1 \oplus S_3 \oplus S_4 \oplus S_6 \oplus S_7 \\ C_1 = S_1 \oplus S_2 \oplus S_4 \oplus S_5 \oplus S_7 \end{vmatrix}$$

Фиг. 3. Внедрена система от уравнения за кодиране/декодиране

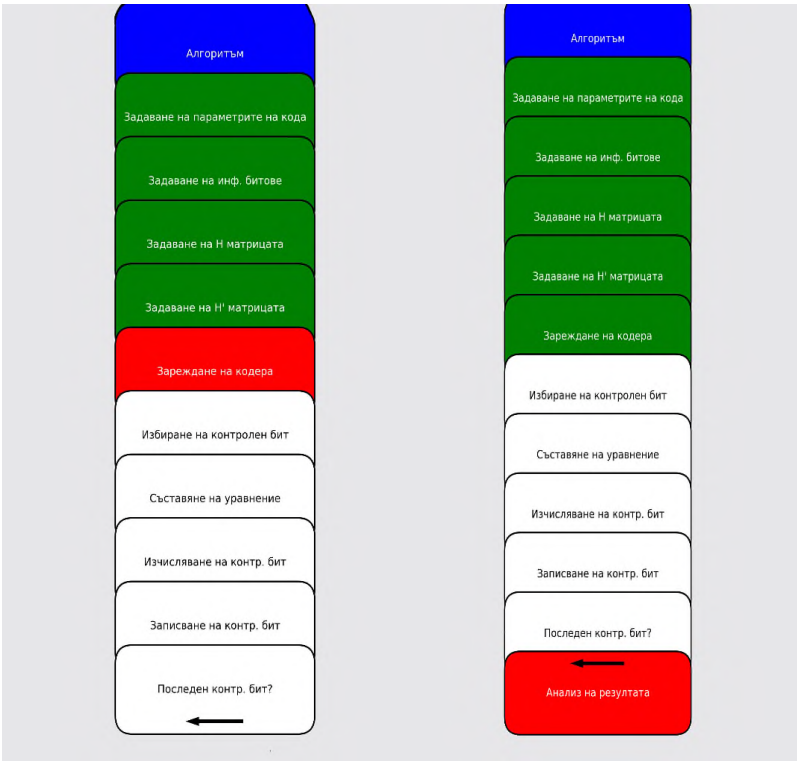
Програмата функционира в два основни режима – кодиране и декодиране, и е структурирана в три основни компонента: HCmat, Algorithm и Statistics.

Компонентът HCmat представлява основния модул на приложението, отговорен за изпълнението на основната функционалност. В процеса на работа с приложението всяка извършена стъпка подлежи на валидиране, като при установяване на грешка се генерира съобщение за нея. Преходът към следващата стъпка е възможен единствено след успешно изпълнение на текущата стъпка или въвеждане на коректна стойност. [2, 3]

Компонентът Algorithm изпълнява помощна роля, като предоставя визуализация на последователността от действия, необходими за решаване на задачата. Блокова-

та схема е интерактивна, като при избиране на конкретна стъпка се извежда информация относно необходимото действие за изпълнението ѝ. За по-добра визуална ориентация приключените стъпки се маркират чрез оцветяване.

Компонентът Statistics е предназначен за събиране на данни за работния процес, включително време на взаимодействие със симулационната система (чрез таймер), брой допуснати грешки и история на тези грешки. [4, 7, 11, 12]



Фиг. 4. Програма в режим кодиране и декодиране

Заключение. Представена е интерактивна система за изучаване на кодовете на Хеминг, която позволява симулиране на процесите на кодиране и декодиране. Системата е предназначена да подпомогне студентите при изучаването на процесите на кодиране (до 28-битови информационни комбинации) и декодиране (до 32-битови кодови комбинации), като същевременно служи като инструмент за практическо обучение и задълбочено изучаване на теорията на кодирането. Разработена с обучителна цел за специалности, свързани с комуникационните системи и технологии, системата предлага три режима на работа – ръчен, стъпков (стъпка по стъпка) и автоматичен. Тези режими осигуряват по-ефективно усвояване на концепциите, свързани с кодовете на Хеминг. Интерактивният модул *Algorithm* предоставя ясен и структуриран поглед върху всички операции в системата, което улеснява работата със средата. Допълнителна функционалност е налична чрез модула *Statistics*, който събира информация за времето за решаване на задачи, броя и характера на

допуснатите грешки, както и историята на грешките. Тази информация позволява на преподавателите да проследяват напредъка на студентите и да идентифицират често срещаните трудности, за да осигурят по-насочена помощ при обяснението на сложни концепции. Интерактивната система е полезна не само за студентите, но и за преподавателите, тъй като подпомага визуализацията и разясняването на сложни теоретични материали, като например кодовете за контрол на грешки в компютърните и комуникационните системи. [8, 9, 10]

Литература

[1] A. Burr. Teaching Channel Coding Principles Through Simulation. IEEE Communications Magazine, 39(8), 2001, 110-114.

[2] D. Garg, S. Garg. Enhancing Learning in Error Correction Codes Using Problem-Based Learning. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 14(1), 2017.

[3] K. Harizanov, N. Pavlova. WEB platformite kato instrument za razrabotvane na didakticheski materiali. Godishnik na FMI, SHU „Episkop Konstantin Preslavski“, Shumen, 2014 (in Bulgarian).

[4] S. Kumar, M. Kumar. Integrating E-Learning in Teaching Error Control Codes. *Journal of Engineering Education Transformations*, 32(3), 2019, 12-20.

[5] N. Pavlova, K. Harizanov, S. Aliev, D. Eminov. First steps in e-learning. Perspective on teaching practice, *International Scientific Refereed Online Journal SocioBrains*, Issue 17, January 2016, ISSN 2367-5721.

[6] G. Petrov, A. Kostov. Kompyutarna simulatsiya na Heming kodove kato instrument za obuchenie. Sbornik ot mezhdunarodnata konferentsiya po inzhenerno obrazovanie, Sofiya, 2018 (in Bulgarian).

[7] J. P. Smith, T. R. Brown. Teaching Error Correction Codes with Interactive Software Tools. *IEEE Transactions on Education*, 49(2), 2006, 273-278.

[8] L. Staneva, I. Vardeva, Ts. Tsankov. Modelirane protsesa na poluchavane na kod na Heming s obobshtena mrezha. Godishnik na universitet „Prof. d-r Asen Zlatarov“, t. XLIII, Burgas, 2014, ISSN 1312-1359 (in Bulgarian).

[9] Ts. Tsankov, D. Dimanova. Kompyutarna didaktichna programa za kod na Heming. Godishnik na FTN, SHU „Episkop Konstantin Preslavski“, Shumen, 2016, ISSN 1311-834X (in Bulgarian).

[10] Ts. Tsankov, H. Hristov. E-Learning Shell v Obuchenieto po inzhenernite distsiplini. Godishnik na FTN, SHU „Episkop Konstantin Preslavski“, Shumen, 2010, ISSN 1311-834X (in Bulgarian).

[11] I. Tsonev, D. Vasilev. Postigane visoki pokazateli na predavane na danni v mobilnite komunikatsii. Nauchna konferentsiya s mezhdunarodno uchastie MATTEH 2014, Shumen, 2014 (in Bulgarian).

[12] V. Aleksieva, H. Valchanov. Osnovi na kompyutarnite komunikatsii. Rakovodstvo za laboratorni uprazhneniya, Universitetsko izdatelstvo pri TU-Varna, 2019 (in Bulgarian).

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

A METHOD FOR SOLVING EXTREMAL PROBLEMS IN PLANE GEOMETRY

Ivaylo Dimitrov[1], **Mehmed Kodzha**[2]

[1,2] High School of Mathematics "Nancho Popovich", Shumen, Bulgaria
e-mails: [1]pmg.iv.dimitrov@abv.bg, [2]mkodzha@gmail.com

In the article, we propose a method for solving extreme problems in plane geometry. We apply the method to problems, that are solved using basic elementary inequalities and trigonometric inequalities in the triangle. We reduce the problem to finding the smallest or largest value of a function. The purpose of the method is to build an algorithm for solving extremal problems.

Keywords: extremal problems, smallest value of a function, largest value of a function

МЕТОД ЗА РЕШАВАНЕ НА ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ В ПЛАНИМЕТРИЯТА

Ивайло Димитров[1], **Мехмед Коджа**[2]

[1,2] ППМГ „Нанчо Попович", Шумен, България
e-mails: [1]pmg.iv.dimitrov@abv.bg, [2]mkodzha@gmail.com

В статията предлагаме метод за решаване на екстремални задачи в планиметрията. Прилагаме метода за задачи, които се решават с помощта на основни елементарни неравенства и тригонометрични равенства в триъгълника. Ние свеждаме проблема до намиране на най-малка или най-голяма стойност на функция. Целта на метода е построяване на алгоритъм за решаване на екстремални задачи.

Ключови думи: екстремални задачи, най-малка стойност на функция, най-голяма стойност на функция

1 Въведение

Екстремалните задачи са свързани с намирането на максимални и минимални стойности на функции при определени условия. Те се срещат в различни области

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.109-117

на математиката: планиметрия, стереометрия, алгебра, анализ и други. Също така имат приложение и в редица области, като икономика, инженерство, физика и други, например за максимизиране на печалбата или минимизиране на разходите, оптимизиране на ресурси и т.н.

В училищния курс по математика, за решаване на екстремални задачи в планиметрията, се използват следните методи:

- изразяване на неизвестната величина чрез една променлива и намиране на най-малка или най-голяма стойност на получената функция;

- използване на неравенствата между средноквадратично, средноаритметично, средногеометрично и среднохармонично;

- използване на тригонометрични равенства в триъгълника, които не са включени в учебните планове по математика.

2 Задачи

В статията разглеждаме екстремални задачи в планиметрията, в които е невъзможно свеждането на проблема до изследване на функция на една променлива. В помагалата по математика за ученици, за решаването на такива задачи се използват основни елементарни неравенства и тригонометрични равенства в триъгълника. Това обаче представлява трудност не само поради липсващ алгоритъм за решаването им, но и поради необходимостта от прилагане на някои неизучавани специфични тригонометрични равенства за ъгли в триъгълник.

Трябва да отбележим и следното несъответствие в учебните планове по задължителната и профилираната подготовка по математика в 12. клас: екстремалните задачи по планиметрия в задължителната подготовка, които се решават с помощта на основните елементарни неравенства, се изучават във втори срок, а по профилираната подготовка – в първи срок. Това прави недопустимо използването на методите от задължителната подготовка при решаване на този тип задачи по профилираната подготовка.

Ще предложим метод, при който свеждаме проблема до изследване на условен екстремум на функция на две променливи. Нашата цел е да изследваме този проблем на ученическо ниво, без да се налага използването на неизучавани в училище методи по висша математика. В общообразователната, както и в профилираната подготовка по математика в училище, не се изучават функции на две променливи. Ние съставяме функция на две променливи, но я разглеждаме като функция на една променлива (първо на едната, а после на другата), приемайки другата за параметър. Това не представлява трудност за учениците, защото в голяма част от екстремалните задачи по профил математика изследват функции, при които се налага да работят с буквени константи. Изследваме така получените функции едновременно за най-малка или най-голяма стойност, първо по едната, а после по другата променлива. Важно е да отбележим, че по условие приемаме съществуването на единствена точка на екстремум.

При изследване на локални екстремуми на функция на две променливи $f(x, y)$

се пресмятат частните производни $f_x^{'}$ и $f_y^{'}$, след което се решава системата

$$\begin{cases} f_x^{'} = 0 \\ f_y^{'} = 0 \end{cases}$$

за намиране на критичните точки. За да избегнем това, ние намираме екстремум по едната променлива и заместваме стойността ѝ във функцията. Така получаваме нова функция на една променлива, за която намираме стойността на другата променлива в точката на екстремум. Целта тук е да модифицираме познатия алгоритъм за намиране на локални екстремуми на функция на две променливи в курса по „Диференциално смятане“ и да го направим приложим за решаване на екстремални задачи в училище.

Ще опишем по-подробно стъпките на метода в следващия пример:

Задача 1. [3, 4] От всички триъгълници с даден периметър P да се намери този, който има най-голямо лице.

В [4] се предлага следното решение на задачата, в което се използва неравенство между средноаритметично и средногеометрично:

Решение. [4] Лицето S на всеки триъгълник със страни a, b, c се изразява чрез полупериметъра му $p = \dfrac{P}{2} = \dfrac{a+b+c}{2}$ по Хероновата формула:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Понеже p е фиксирано и променливите множители $p-a$, $p-b$, $p-c$ имат постоянна сума $(p-a)+(p-b)+(p-c) = 3p-2p = p$, от неравенството $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ между средноаритметично и средногеометрично за произволни неотрицателни числа a, b, c следва, че $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{p^3}{27}$, а оттук и $S \leq \sqrt{\dfrac{p^4}{3^3}} = \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{P^2}{12\sqrt{3}}$. Лицето S достига най-голямата стойност $S_{max} = \dfrac{P^2}{12\sqrt{3}}$ за триъгълник, за който $p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{P}{3}$, т.е. за единствения равностранен триъгълник с даден периметър P.

Сега ще предложим решение на задачата по нашия метод.

Решение. Нека страните на триъгълника са a, b и c. По условие $P = const$. Имаме $c = P-(a+b)$. От хероновата формула, за лицето на триъгълника получаваме

$$S = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2}-a\right)\left(\frac{P}{2}-b\right)\left(\frac{P}{2}-(P-(a+b))\right)},$$

което се свежда до

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{P(P-2a)(P-2b)(2a+2b-P)}. \tag{2.1}$$

Ще изследваме (2.1) веднъж като функция на страната a и втори път като функция на страната b (без значение първо на коя). Понеже търсим най-голямо лице, интересуваме се от най-голямата стойност. Нека например, първо да намерим най-голямата стойност на (2.1) като функция на a, т.е.

$$S(a) = \frac{1}{4}\sqrt{P(P-2a)(P-2b)(2a+2b-P)}; \quad 0 < a < \frac{P}{2}, \tag{2.2}$$

приемайки $0 < b < \dfrac{P}{2}$ за параметър и изследваме тази функция за най-голяма стойност. Производната на функция (2.2) е

$$S^{'}(a) = \frac{P(P-2b)}{2}.\frac{P-2a-b}{\sqrt{P(P-2a)(P-2b)(2a+2b-P)}}$$

и функцията има единствена точка на екстремум

$$a = \frac{P-b}{2}, \tag{2.3}$$

в която има максимум. Така получаваме, че функцията (2.2) достига най-голямата си стойност в точката (2.3).

Следващата стъпка е да намерим най-голямата стойност по другата променлива b. Заместваики стойността на a от (2.3) в (2.1), изследваме нова функция на страната b

$$S(b) = \frac{1}{4}\sqrt{Pb^2(P-2b)}; \quad 0 < b < \frac{P}{2}. \tag{2.4}$$

Производната на (2.4) е

$$S^{'}(b) = \frac{P}{4}.\frac{Pb-3b^2}{\sqrt{Pb^2(P-2b)}}$$

и има единствена точка на екстремум

$$b = \frac{P}{3}, \tag{2.5}$$

в която има максимум. Сега заместваме стойността на b от (2.5) в (2.3) и получаваме стойността на a в точката на максимум $a = \dfrac{P}{3}$.

Така намерихме най-голямата стойност на (2.1) и по двете променливи. По този начин можем да направим заключението, че максимално лице има триъгълникът със страни $a = b = \dfrac{P}{3}$, откъдето се получава $c = \dfrac{P}{3}$, т.е. $a = b = c = \dfrac{P}{3}$. Оттук правим извод, че от всички триъгълници с даден периметър P най-голямо лице има равностранният.

Забележка. Да отбележим, че (2.1) удовлетворява условието $S(a,b) = S(b,a)$. В този случай методът може да се опрости по следния начин: След като установим, че функция (2.2) има екстремум в (2.3), за да намерим точката на екстремум на (2.4), е достатъчно да направим циклична смяна на променливите, т.е. $b = \dfrac{P-a}{2}$. Решавайки системата

$$\begin{cases} a = \dfrac{P-b}{2} \\ b = \dfrac{P-a}{2} \end{cases}$$

намираме $a = b = \dfrac{P}{3}$. Този вариант на метода е приложим и за останалите примери, които ще разгледаме, както и в други екстремални планиметрични задачи. Това обаче не е вярно в общия случай, особено в повечето екстремални задачи в алгебрата.

Ще приложим метода и в следващите примери.

Задача 2. [1] От всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r, намерете този, който има най-малко лице. Намерете това лице.

Първо ще покажем решение, което се предлага в [1], при което се използва тригонометрично равенство за ъгли в триъгълник и неравенство между средноаритметично и средногеометрично.

Решение. [1] Ако α, β и γ са ъгли в триъгълник е изпълнено равенството

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

В сила са равенствата $p-a=r\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}$, $p-b=r\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}$, $p-c=r\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}$. За полупериметъра на триъгълника получаваме

$$p=\frac{P}{2}=p-a+p-b+p-c=r\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right)=r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

За да оценим получения израз, ще използваме неравенството между средноаритметично и средногеометрично.

Да означим $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}=m,\ m>0.$

От неравенството между средноаритметично и средногеометрично имаме

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}{3}\geq\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}\quad\text{или}\quad\frac{m}{3}\geq\sqrt[3]{m}.$$

Решението на последното неравенство е $m\geq 3\sqrt{3}\ \Rightarrow\ m=\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}\geq 3\sqrt{3}$.

За лицето на триъгълника имаме

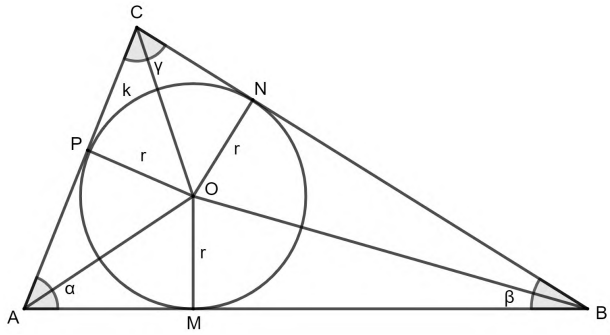
$$S=pr=r^2\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right)\ \Rightarrow\ S\geq 3\sqrt{3}r^2.$$

Равенство се достига при $\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2}=\operatorname{cotg}\dfrac{\beta}{2}=\operatorname{cotg}\dfrac{\gamma}{2}$.

Получихме, че от всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r, най-малко лице има равностранният триъгълник и лицето му е $S=3\sqrt{3}r^2$.

Сега ще покажем решението на задачата с нашия метод:

Решение. Разглеждаме $\triangle ABC$ и вписана в него окръжност $k(O;r)$. Нека ъглите на $\triangle ABC$ са $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle CBA=\beta$ и $\sphericalangle ACB=\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$. Построяваме радиуси OM, ON и OP съответно към страните AB, BC и AC на триъгълника.



Изразявайки отсечките AM, MB, BN, NC, CP и PA чрез r и тангенсите на ъглите $\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{\beta}{2}$ и $\dfrac{\gamma}{2}$, и използвайки, че $AM+MB=AB$, $BN+NC=BC$ и $CP+PA=$

AC, получаваме

$$BC = r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right),\quad CA = r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right),$$

$$AB = r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right).$$

Сега използвайки формулата $S = pr$ за лицето на триъгълника и след няколко елементарни тригонометрични преобразувания, получаваме

$$S = r^2\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right);\quad \alpha \in (0;\pi),\ \beta \in (0;\pi). \tag{2.6}$$

Изследваме (2.6) първо като функция на α. Производната на (2.6) може да се запише във вида

$$S'(\alpha) = -\frac{r^2\cos\frac{\beta}{2}}{2}.\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

и функцията има минимум за

$$\alpha = \frac{\pi-\beta}{2}. \tag{2.7}$$

Заместваме стойността на α от (2.7) в (2.6) и получаваме функция на β

$$S(\beta) = r^2\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi-\beta}{4} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi+\beta}{4}\right) = r^2\left(2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\beta}{4}\right) + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\right). \tag{2.8}$$

Производната на (2.8) се свежда до вида

$$S'(\beta) = \frac{r^2}{4}.\frac{2\sin^2\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2} - 1}{\sin^2\frac{\beta}{2}.\cos^2\frac{\pi+\beta}{4}}$$

и функцията има минимум за

$$\beta = \frac{\pi}{3}. \tag{2.9}$$

Заместваики (2.9) в (2.7) получаваме стойността на β в точката на минимум $\alpha = \frac{\pi}{3}$. По този начин установихме, че функцията има най-малка стойност при

$$\alpha = \frac{\pi}{3}\ \text{ и }\ \beta = \frac{\pi}{3}. \tag{2.10}$$

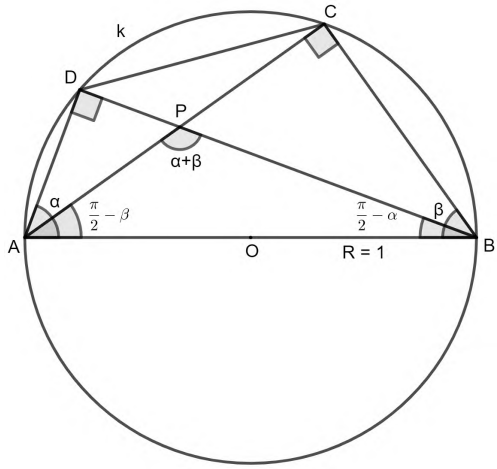
Следователно $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

Така получаваме, че от всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r, най-малко лице има равностранният. Заместваики (2.10) в (2.6), намираме най-малкото лице $S_{min} = 3\sqrt{3}r^2$.

Ще приложим метода в още 2 задачи.

Задача 3. [3] От всички четириъгълници $ABCD$, вписани в окръжност с радиус 1 и такива, че $AB = 2$, да се намери онзи, който има най-голямо лице.

Решение. Нека $k(O; R = 1)$ е описаната окръжност около четириъгълника $ABCD$. Понеже $AB = 2 = 2R$ е диаметър на k, то $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \dfrac{\pi}{2}$. Нека $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ и $AC \cap BD = P$.
От това, че $\sphericalangle DBA$ и $\sphericalangle BAC$ са вписани ъгли в k, получаваме $\sphericalangle DBA = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ и $\sphericalangle BAC = \dfrac{\pi}{2} - \beta$. Следователно $\sphericalangle APB = \alpha + \beta$.



От синусовата теорема имаме

$$2R = \frac{BD}{\sin\alpha} \;\Rightarrow\; BD = 2\sin\alpha,$$
$$2R = \frac{AC}{\sin\beta} \;\Rightarrow\; AC = 2\sin\beta.$$

За лицето на четириъгълника получаваме

$$S = AC.BD.\sin\sphericalangle APB = 2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta); \quad \alpha \in (0;\frac{\pi}{2}),\ \beta \in (0;\frac{\pi}{2}). \tag{2.11}$$

Нека първо да изследваме (2.11) като функция на α. Пресмятаме първата производна и получаваме

$$S^{'}(\alpha) = 2\sin\beta.\sin(2\alpha+\beta).$$

Функцията има максимум в

$$\alpha = \frac{\pi-\beta}{2}. \tag{2.12}$$

Заместваме (2.12) в (2.10) и изследваме новата функция

$$S(\beta) = 2\sin\beta.\sin\frac{\pi-\beta}{2}.\sin\frac{\pi+\beta}{2} = \sin\beta(\cos\beta+1) \tag{2.13}$$

за максимум. Производната на (2.13) се записва във вида

$$S^{'}(\beta) = 2\cos^2\beta + \cos\beta - 1$$

и има максимум в

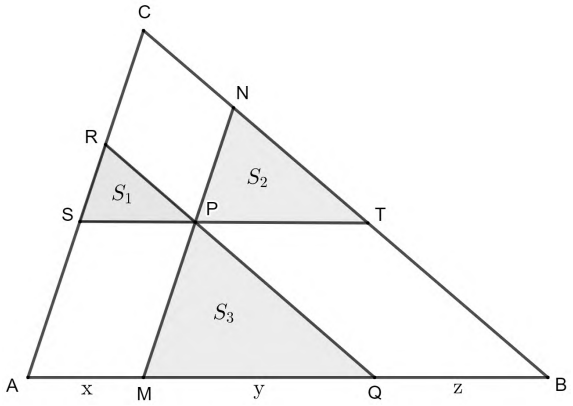
$$\beta = \frac{\pi}{3}. \tag{2.14}$$

Заместваме (2.14) в 2.12) и получаваме $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Най-голямата стойност на (2.11) се достига за $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ и $\beta = \dfrac{\pi}{3}$. Лесно се проверява, че $\sphericalangle ADC = \dfrac{2\pi}{3}$, т.е. $AB \| DC$ и $DC = 1$. Това означава, че най-голямо лице има равнобедреният трапец с малка основа $DC = 1$.

Задача 4. [2] Нека P е вътрешна точка за $\triangle ABC$. През P са построени прави, успоредни на страните на триъгълника, които отсичат три триъгълника с лица S_1, S_2 и S_3. Да се намери това положение на P, за което сборът $S_1 + S_2 + S_3$ е най-малък.

Решение. Нека $\triangle ABC$ има лице $S = const$ и страна $AB = a$. Нека $P = MN \cap QR \cap ST$, където $MN \| AC$ $(M \in AB; N \in BC)$, $QR \| BC$ $(Q \in AB; R \in AC)$ и $ST \| AB$ $(S \in AC; T \in BC)$. Да означим $S_{\triangle SPR} = S_1$, $S_{\triangle PTN} = S_2$ и $S_{\triangle MQP} = S_3$. Нека $AM = x$, $MQ = y$ и $QB = z$.



Лесно се доказва, че $\triangle ABC \sim \triangle SPR \sim \triangle PTN \sim \triangle MQP$. От подобието на триъгълниците имаме

$$\frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{a^2}, \tag{2.15}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{z^2}{a^2}, \tag{2.16}$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{y^2}{a^2}. \tag{2.17}$$

От (2.15), (2.16) и (2.17) следва, че

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}. \tag{2.18}$$

Но $z = a - (x + y)$, откъдето $z^2 = a^2 - 2a(x + y) + (x + y)^2$. Сега (2.18) може да се запише във вида

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{S}{a^2}(2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2a(x + y) + a^2). \tag{2.19}$$

Означавайки $S_1 + S_2 + S_3 = f$, записваме (2.19) като

$$f = \frac{S}{a^2}(2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2a(x + y) + a^2); \quad 0 < x < a,\ 0 < y < a. \tag{2.20}$$

Разглеждаме (2.20) първо като функция на x. Производната ѝ е равна на

$$f^{'}(x) = \frac{S}{a^2}(4x + 2y - 2a)$$

и достига минимум за

$$x = \frac{a-y}{2}. \tag{2.21}$$

Заместваме (2.21) в (2.20) и изследваме новата функция, която се записва във вида

$$f(y) = \frac{S}{2a^2}(3y^2 - 2ay + a^2). \tag{2.22}$$

Производната на (2.22) е

$$f^{'}(y) = \frac{S}{a^2}(3y - a) \tag{2.23}$$

и достига минимум за

$$y = \frac{a}{3}. \tag{2.24}$$

Накрая заместваме (2.24) в (2.21) и получаваме $x = \frac{a}{3}$.

Така констатирахме, че (2.20) има най-малка стойност за $x = y = \frac{1}{3}a$. Получаваме, че $x = y = z = \frac{1}{3}a$ и $S_1 = S_2 = S_3$. Лесно се проверява, че точка P е медицентър. Окончателно, $S_1 + S_2 + S_3$ е най-малък, когато точка P е медицентър.

3 Заключение

Предлаганият от нас метод има за цел да създаде алгоритъм за решаване на екстремални задачи в училище. Той е особено подходящ за екстремални задачи по профилираната подготовка по математика в 12. клас, при които е невъзможно съставянето и изследването на функция на една променлива и за решаването на които се използват другите споменати методи. Считаме, че методът е полезен и улеснява значително работата на учениците. Удобен е за използване в часовете по профил математика в 12. клас.

Литература

[1] Д. Гълъбова, М. Сидерова. Математика 12. клас профилирана подготовка. София, Веди, 2021. [D. Galabova, M. Siderova. Matematika 12. klas profilirana podgotovka. Sofia, VEDI, 2021.] (in Bulgarian)

[2] К. Коларов, Хр. Лесов. Сборник задачи по стереометрия. Добрич, Интеграл Добрич, 2017. [K. Kolarov, Hr. Lesov. Sbornik zadachi po stereometriya. Dobrich, Integral Dobrich, 2017.] (in Bulgarian)

[3] К. Коларов, Хр. Лесов. Сборник от задачи по геометрия VII - XII клас. Добрич, Интеграл Добрич, 2013. [K. Kolarov, Hr. Lesov. Sbornik ot zadachi po geometriya VII - XII klas. Dobrich, Integral Dobrich, 2013.] (in Bulgarian)

[4] М. Христов, Е. Стоименова, Ю. Цветков, Ц. Байчева. Математика 12. клас. София, Klett Bulgaria, 2020. [M. Hristov, E. Stoimenova, Y. Cvetkov, C. Baycheva. Matematika 12. klas. Sofia, Klett Bulgaria, 2020.] (in Bulgarian)

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

EVALUATING THE EFFECTIVENESS OF PRACTICAL EXERCISES IN CRYPTOGRAPHY AND AUTHENTICATION COURSES OF CYBERSECURITY EDUCATION

Dilyana Dimitrova
Department of Information Technologies,
Nikola Vaptsarov Naval Academy, Varna, Bulgaria
e-mail: di.dimitrova@naval-acad.bg

This study analyzes the effectiveness of practical exercises in higher education cybersecurity programs, specifically within the disciplines of authentication and cryptography. Based on student feedback, the study assesses the alignment between theoretical and practical components, and proposes improvements for better industry preparedness. The findings highlight that both individual and teamwork-based exercises significantly enhance students understanding of key concepts. The results emphasize the need for a balanced curriculum that integrates practical skills, bridging the gap between theory and real-world application, and preparing students for evolving cybersecurity challenges.

Keywords: authentication, cryptography, cybersecurity education, practical exercises, survey

ОЦЕНКА НА ЕФЕКТИВНОСТТА НА ПРАКТИЧЕСКИТЕ УПРАЖНЕНИЯ В КУРСОВЕТЕ ПО КРИПТОГРАФИЯ И АВТЕНТИКАЦИЯ В ОБУЧЕНИЕТО ПО КИБЕРСИГУРНОСТ

Диляна Димитрова
Катедра „Информационни технологии“, ВВМУ „Н. Й. Вапцаров“, Варна
e-mail: di.dimitrova@naval-acad.bg

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.118-124

* The report is in implementation of the National Scientific Program "Security and Defense adopted with RMS No. 731/21.10.2021, and financed by the Ministry of Education and Science of the Republic of Bulgaria according to Agreement No. D01-74/19.05.2022.

2020 Mathematics Subject Classification: 94A60, 94A62.

Настоящото изследване анализира ефективността на практическите упражнения в програмите за висше образование по киберсигурност и по-конкретно в дисциплините, свързани с автентикация и криптография. Чрез обратната връзка от студентите, изследването оценява съответствието между теоретичните и практическите компоненти и предлага подобрения за по-добра подготовка на обучаемите за индустрията. От изследването се подчертава, че както индивидуалните, така и екипните упражнения, значително подобряват разбирането на студентите за ключови концепции. Резултатите показват необходимостта от балансирани учебни програми, които интегрират практически умения и подготвят студентите за непрекъснато развиващите се предизвикателства в киберсигурността.
Ключови думи: автентикация, криптография, обучение по киберсигурност, практическо обучение, анкета

1. Introduction. Cryptography and authentication are fundamental parts of cybersecurity, ensuring the confidentiality, integrity, and authenticity of digital communications and data. Cryptography protects sensitive information from unauthorized access by encrypting it, making it unreadable without the proper decryption key. This is essential in preventing data breaches and securing communications over networks. Authentication mechanisms confirm the identity of users, devices, and systems, establishing trust in interactions. Strong authentication techniques, such as multifactor authentication (MFA), biometrics, and digital certificates, protect against identity theft and unauthorized access.

Integrating theoretical knowledge with practical application in the curriculum for cryptography and authentication courses is crucial for providing students with a systematic understanding in these fields. However, there are gaps between the theoretical depth offered in some programs and the hands-on experience needed to fully prepare students for the real-world challenges of the industry. One of the things is the overemphasis on theory, particularly in the foundations of cryptography, where students are often introduced to complex mathematical concepts and cryptographic protocols without enough emphasis on their real-world applications. This can leave them with a strong theoretical understanding but limited practical experience. While theoretical lessons may cover a range of cryptographic techniques, practical exercises might fail to incorporate widely-used tools or platforms, leaving students underprepared for real-world environments. The main aim of the paper is to evaluate the effectiveness of practical exercises in cybersecurity education, specifically in the fields of cryptography and authentication.

The structure of the paper includes an introduction, a literature review, methodology, results, and discussion, followed by conclusions and recommendations for improving the curriculum to better prepare students for real-world challenges.

2. Literature review. In the context of education, bridging the gap between theoretical learning and practical application is a significant challenge. Theoretical learning provides the fundamental understanding of concepts, but without the practical part, students may struggle to apply their knowledge effectively in professional environment. On the other hand, practical exercises help students develop valuable skills, but without theoretical background, they may lack the deep understanding required to solve complex real-world problems.

Several studies have examined this gap and suggested methods for better integration. The paper [5] examines trends in cybersecurity education, focusing on various cybersecurity topics, including cryptography, and presents insights into how these subjects are

being taught in the classroom. It explores educational models that help bridge the cybersecurity skills gap and discusses how technologies like virtual classrooms and online platforms can be utilized to enhance teaching outcomes for cybersecurity courses. In [3] a review focused on the teaching methods and practices in cybersecurity education is presented, particularly looking into topics like encryption and authentication, and how they are taught in academia. Key aspects in study [1] include the teacher's role in engaging students, the need for specific engagement methods in virtual learning environments, and the challenges students face in them. The paper [4] explores the development of specialized postgraduate education in maritime cybersecurity at the Nikola Vaptsarov Naval Academy, focusing on meeting International Maritime Organization standards and improving the cybersecurity competencies of maritime professionals. The paper [2] explores the challenges of teaching cryptography by using certificateless signature schemes as a case study in cryptography education. Additionally, it proposes simple improvements to enhance security and suggests that case-based teaching methods can make cryptographic concepts more accessible and clear for students.

One effective approach bridging the gap is to adopt combined learning models, which incorporate both theoretical lessons and practical assignments, ensuring that students are not only exposed to abstract concepts but also given opportunities to apply them in simulated or real-world scenarios. Similarly, methods like action learning, which emphasize real-life work experience, have proven effective in helping students connect theory with practice. Educational frameworks must be continuously adapted to offer a balance between academic and practical exercises, preparing students for the dynamic demands of the industry.

Inconsistent assessment metrics present another challenge in aligning theoretical learning with practical competence. In many cases, students are evaluated primarily on their theoretical knowledge, without sufficient emphasis on their ability to apply concepts in practical situations. The lack of continuous feedback in practical exercises can restrict skill development, as students might not receive the necessary guidance to improve their practical abilities during the course. Practical exercises often fail to reflect the challenges students will face in the industry, such as securing cloud applications, implementing Public Key Infrastructure (PKI), or designing zero-trust authentication models. Group projects or team-based activities, which are essential for simulating real-world collaborative environments, are also often underrepresented. Without these, students may struggle to develop the collaborative and problem-solving skills required in a professional setting.

By examining and addressing these gaps, it is possible to ensure that students are well-prepared to handle the complexities of their future careers, qualified with both the theoretical knowledge and practical skills required to succeed in the rapidly evolving field of cybersecurity.

3. Methodology. To evaluate the effectiveness of cryptography and authentication courses in cybersecurity education, a survey was developed consisting of 22 questions. It aimed to assess students' perceptions of curriculum quality, the balance of theoretical and practical content, the relevance of course materials to industry needs, and students overall satisfaction with the learning process.

A total of 55 students participated in the survey. Most of them are in the fourth year of their BSc program of cybersecurity and a few – from previous years. The partici-

pants represented a diverse group in terms of academic performance and prior knowledge of cryptography and authentication, ensuring a well-rounded perspective on the course outcomes.

The survey included multiple types of questions:

- Multiple-choice – to gather insights on specific preferences of the course and teaching methods.
- Likert scale – to evaluate satisfaction and confidence levels regarding the course content and practical exercises.
- Open-ended questions – to provide students with the opportunity to elaborate on challenges, suggestions, and overall impressions.

The survey was conducted anonymously over two weeks using the Microsoft Forms platform to establish accessibility. This approach ensured honest responses and reduced any potential biases.

To analyze the data from the exercises a quantitative analysis was conducted. This included examining the frequency distribution of student responses to different exercises.

4. Results and discussion. The exercises included in this study cover a wide range of tasks, which allowed for an in-depth examination of various security aspects. From password-related attacks on different operating systems to multi-factor authentication (MFA) vulnerabilities, the exercises provided valuable insights into system security weaknesses. Practical tasks on cryptography enhanced understanding of encryption techniques, while case studies involving biometric methods demonstrated their potential and limitations in authentication. Overall, the exercises highlighted the diverse and evolving nature of security challenges and the importance of multi-layered defense strategies.

Table 1 presents the survey results based on responses to the question: „To what extent did the tasks in the conducted practical exercises help you understand the key principles and concepts related to authentication?". The survey responses in the table were combined from two categories: „To a large extent" and „All tasks contributed to understanding the material". These responses reflect how the students perceived the exercises effectiveness in deepening their understanding of the subject matter, providing insight into which tasks were most impactful.

Table 1. Impact of practical exercises on understanding key principles and concepts

Topic of the exercises	**Survey results (%)**	**Exercise type**
Analysis of security breaches	78.2%	Individual
Password attacks	78.1%	Individual
Password security assessment	96.3%	Individual
Password managers	89.1%	Individual
Cases related to biometrics	85.4%	Teamwork
Handwriting analysis	85.4%	Teamwork
Practical tasks related to cryptography	89.1%	Teamwork

Topic of the exercises	Survey results (%)	Exercise type
PKI and working with certificates	87.3%	Individual

Table 1 indicates that individual exercises, such as those focused on security breaches, password attacks, and password managers, received high ratings, ranging from 78.1% to 96.3%. In contrast, teamwork exercises, like those on biometrics, handwriting analysis, and cryptography, also received strong feedback, with results between 85.4% and 89.1%. This indicates that both individual and teamwork-based exercises significantly contributed to enhancing students understanding of the subject matter.

The average values for each exercise type and standard deviation are calculated to provide a clearer understanding of the overall effectiveness and consistency of the exercises. The results are presented on figure 1 and table 2.

Table 2. Average value for exercise type and standard deviation

Exercise type	Average value for exercise type	Standard deviation
Teamwork	86.63%	2.136195996
Individual	85.80%	7.75306391

The results show that the average of 86.63% of students felt that teamwork exercises significantly contributed to their understanding. Furthermore, the low standard deviation (2.14) indicates that student perceptions about the effectiveness of teamwork exercises were very consistent – most students had a similar, positive experience. An average of 85.80% of students felt that individual exercises significantly contributed to their understanding. While this average is only slightly lower than teamwork, the much higher standard deviation (7.75) shows a large variation in student perceptions. Some students found the individual exercises extremely helpful, while others found them less so. The responses were far less consistent than for teamwork exercises.

In conclusion, while the overall perceived helpfulness of both types of exercises was similar on average, teamwork exercises led to a more consistent positive perception among students. Individual exercises, while helpful for some, resulted in a much wider range of opinions regarding their effectiveness in deepening understanding. This suggests that teamwork exercises may provide a more reliable and consistently positive learning experience for students in key concepts. The larger variation in individual exercise effectiveness is because some of them are more challenging or require different learning styles, leading to the wider range of responses.

This highlights the value of collaborative activities in encouraging a deeper comprehension of complex topics, supporting peer interaction, and sharing diverse perspectives, which often enhance the learning experience.

Key findings from the various tasks include:

- Password attacks - both Windows and Linux operating systems were found to be vulnerable to common password-based attacks.

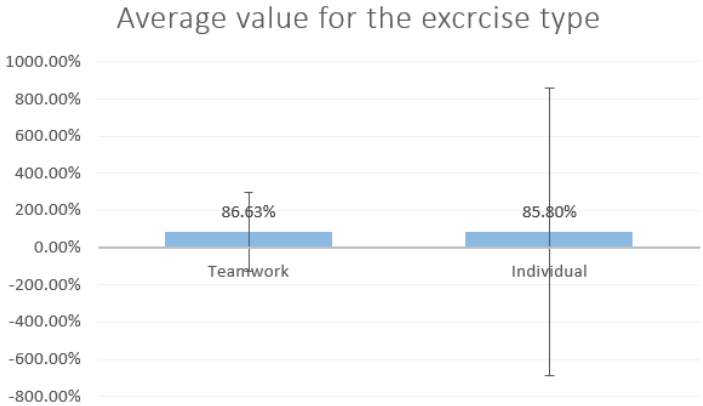


Figure 1. Average value for the exercise type

- Biometric systems - case studies on fingerprint and handwriting analysis revealed strengths and limitations of biometric authentication, emphasizing the need for continuous improvement in these technologies.

- Practical exercises on cryptography highlighted the importance of secure key management and the need for up-to-date encryption algorithms to protect data effectively.

These findings collectively underline the need for multi-layered security approaches and constant awareness in the face of evolving threats.

To enhance cybersecurity education in cryptography and authentication courses, it is crucial to emphasize practical application by incorporating hands-on exercises and real-world simulations that strengthen students' ability to apply theoretical concepts. Integrating emerging technologies such as post-quantum cryptography and lightweight cryptography will better prepare students for future challenges. Encouraging teamwork through collaborative projects can mirror industry environments, while regular feedback during practical exercises will enhance the learning experience. Revising assessment methods to balance theoretical and practical evaluations will ensure that students are prepared for real-world cybersecurity scenarios.

5. Conclusion. The findings of this study emphasize the critical role of practical exercises in enhancing students understanding of key concepts in cryptography and authentication. Both individual and teamwork-based tasks were highly effective in reinforcing theoretical knowledge, as evidenced by the survey results. Teamwork exercises, in particular, encouraged deeper comprehension through collaboration, while individual tasks ensured students could apply their knowledge independently. In conclusion, practical exercises provide a comprehensive approach to cybersecurity education, bridging the gap between theory and real-world application, and preparing students to address the evolving challenges in the field of cybersecurity.

References

[1] H. Balalle. Exploring student engagement in technology-based education in relation to gamification, online/distance learning, and other factors: A systematic literature review. *Social Sciences & Humanities Open* [Internet]. 2024 Jan 1;9:100870–0. Available from: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590291124000676.

[2] X. Hu, W. Jiang, C. Ma, C. Yu. Security and design analysis of certificateless signature schemes as teaching cases of cryptography and security course education. 9th International Conference on Information Technology in Medicine and Education (ITME), (2018), 601–605. https://doi.org/10.1109/itme.2018.00138.

[3] M. Mukherjee, Ngoc Thuy Le, Chow YW, W. Susilo. Strategic Approaches to Cybersecurity Learning: A Study of Educational Models and Outcomes. *Information* 2024, 15, 117. https://doi.org/10.3390/info15020117

[4] B. Nikolov. Maritime cybersecurity education and training at Nikola Vaptsarov Naval Academy. *Pedagogika-Pedagogy: Bulgarian Journal of Educational Research and Practice*, 95(6s) (2023), 1-10. https://doi.org/10.53656/ped2023-6s.05.

[5] V. Švábenský, J. Vykopal, P. Čeleda. What Are Cybersecurity Education Papers About? Proceedings of the 51st ACM Technical Symposium on Computer Science Education. 2020 Feb 26.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

AN OVERVIEW AND ANALYSIS OF LITERATURE ON MECHANICAL METHODS FOR PROBLEM CREATION

Slavi Kadiev

Faculty of Mathematics and Informatics,
Sofia University "St. Kliment Ohridksi", Sofia, Bulgaria
e-mail: skadiev@fmi.uni-sofia.bg

An overview and analysis of literature on mechanical methods for problem creation have been conducted. The tools used in these methods for problem creation are mechanical procedures. The presence of schemes or algorithms supporting the development of technologies for problem creation is also discussed.

Keywords: problem posing, mechanical methods for problem creation

ОБЗОР И АНАЛИЗ НА ЛИТЕРАТУРНИ ИЗТОЧНИЦИ ОТНОСНО МЕХАНИЧНИ МЕТОДИ ЗА СЪЗДАВАНЕ НА ЗАДАЧИ

Слави Кадиев

Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски", София, България
e-mail: skadiev@fmi.uni-sofia.bg

Направени са обзор и анализ на литературни източници относно механични методи за създаване на задачи. Използваните средства за създаване на задачи при тези методи са механични процедури. Коментиран е и въпросът за наличието на схеми или алгоритми, които подпомагат изграждането на технологии за създаване на задачи.

Ключови думи: създаване на задачи, механични методи за създаване на задачи

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.125-142

2020 Mathematics Subject Classification: 97B50, 97C70, 97D40.

1 База за анализ на литературни източници относно методи за създаване на задачи

Целта на литературния обзор е да се направи обширен, задълбочен и критичен преглед на литературни източници относно разгледаните в статията методи за създаване на задачи. От тази гледна точка прегледът е тематичен. Анализът на проучените литературни източници относно методи за създаване на задачи е направен върху следните показатели:

- описание на *метод за създаване на задачи*;
- описание на *средство за създаване на задачи*;
- разграничаване на средство от метод за създаване на задачи;
- използвана терминология за даден метод;
- използвано описание за същността на даден метод;
- посочване на източник на новата задача;
- наличие на конкретизации за даден метод;
- наличие на разновидности на даден метод;
- наличие на схеми или алгоритми, подпомагащи технологизирането на дейността създаване на задачи.

От тази гледна точка направеният обзор е както теоретичен, така и систематичен, защото на базата на използваните средства е направено систематизиране на тези методи, което е предпоставка за изграждане на класификация на всички проучени методи, а наличието на схеми или алгоритми е предпоставка за реализиране на дидактически технологии за съставяне на дидактически системи от задачи.

2 Методи и средства за създаване на задачи

Думата *метод* има гръцки произход (μέθοδος) и означава изследване. В [23] същността ѝ е представена така: *най-общ начин, подход за изследване на природата или обществения живот, на художественото творчество или друга дейност*; *конкретен начин или сбор от конкретни начини, принципи или средства, които се прилагат при някаква дейност*; *начин на постъпване, на действане за постигане на някаква цел.* В [54] думата е описана по следния начин: *подход за теоретически изследвания или за практическо осъществяване на нещо.* В статията думата *метод* се използва със съдържанието *начин за практическо осъществяване на дадена дейност за постигането на определена цел.*

Три от значенията на думата *средство* са: *приспособление, оръдие, предмет, инструмент, необходим/о за осъществяване на някаква дейност* [24], [54]; *начин на действие за постигане на нещо* [24]; *похват, начин на действие, чрез който се постига някаква цел, като се използва всичко необходимо* [54]. В статията думата *средство* се използва със съдържанието *инструмент за практическо осъществяване на дадена дейност за постигането на определена цел.*

В този контекст при употребата на словосъчетанията *метод за създаване на задачи* и *средство за създаване на задачи* се разбира следното.

1. Целта е да се създадат задачи.

2. Целта се постига чрез творческата дейност *създаване на задачи* с използване на адекватен инструментариум.
3. Дава се отговор на въпроса *Как на практика се реализира тази дейност?*.

В литературата съществуват различни методи за създаване на задачи, но в настоящата статия са разгледани само тези от тях, при които използваните средства за създаване на задачи са механични процедури. Последното определя и тяхното общо наименование – *механични методи*. В следващата точка 3 акцентът е поставен върху обзора и анализа на литература относно механични методи за създаване на задачи по посочените в точка 1 показатели.

3 Механични методи за създаване на задачи

Методът и една голяма част от неговите разновидности са описани от И. Шаригин [65], [66]. Терминът, който използва авторът, е *технически методи*.

Част от тези методи частично са загатнати в [22]. Авторите по-скоро ги определят като дейности (*преобразуване на задача*; *съставяне на задача, аналогична на дадената, но по-сложна*; *обобщаване на задача*; *конкретизация на задача*; *съставяне на задача, обратна на дадената*) за осъществяване на *развитие на задача*. Съгласно казаното в точка 2, част от тези методи за създаване на задачи не се отнасят към групата на механичните методи за създаване на задачи. Поради тази причина те са обекти на други изследвания.

3.1 Смяна на формулировката на задача

В литературата методът се среща под различни имена: *смяна на формулировките* [65]; *изменение на формулировката на условието* [37]; *принцип на парадигмата* [43], [61]; *препоставяне на задачата* [6], *прекодиране* [16]. Същността му се разкрива чрез неговото име. Задачата остава същата, променя се само нейната формулировка. Промяна може да се осъществи както в условието на задачата, така и в нейното заключение. Сложността на решението на различните задачи е различна. Източникът на новата задача е самата задача.

Преформулирането се оказва мощен инструмент за увеличаване на количеството информация. Според Р. Грановска [19] използването на разнообразни словесни формулировки подпомага процеса на откриване на нови връзки. Това е и един от начините за активизиране на мисленето. Според Р. Грановска [19] и Р. Трашлиев [62] преработването на информацията има различни равнища на дълбочина. Ако преформулирането се прилага само на нови, приличащи си задачи, тогава се говори за малка дълбочина на разбирането. Ако при преформулирането се получават задачи от различни области, то тогава се предполага наличие на голяма дълбочина на разбирането. Вторият от споменатите случаи намира приложение при създаването на т. нар. *практически задачи*. Тогава даденият тип задачи се разглежда не като цел на обучението, а като средство за обучение.

Разновидностите на този метод са описани по-долу. И в двата случая смяната на формулировката на задача води до контекстуално прекодиране [49] за някои от обектите на едната или на другата математическа конструкция. Креативността при използване на този метод се базира именно на откриването на такива подходящи прекодирания за елементи на конструкцията.

3.1.1 Смяна на математическия език на формулиране на задача

Първата разновидност на този механичен метод за създаване на задачи се състои в превод на задача от езика на един клон на математиката на езика на друг клон на математиката. Пример за това е задача 36 от дидактическата система от задачи, разгледана в [25]. Примерът потвърждава факта, че източникът на новата задача е самата задача, но освен това показва, че средата, в която се създава новата задача, е учебната практика.

В [34] се акцентира върху приложението на векторния метод в курса по геометрия. Същността му се състои в следното – преход от векторния език към езика на геометрията и обратно. Тук става преплитане на механичния метод, използващ познати евристики, с познавателния метод моделиране като вид абстрахиране, но като средство за създаване на задачи. Полезността на статията се състои в това, че авторите поставят въпроса за целенасочено създаване на т. нар. от тях *геометричен инвентар*, т.е. систематизиране на типовете задачи (евристики), които могат да бъдат решени с използване на моделиране с вектори. При обучението на ученици е целесъобразно този списък от евристики да бъде наличен в дълготрайната памет, за да може да бъде потенциално използваем.

По аналогичен начин може да се подходи и при моделиране с еднаквости/подобности в равнината, но сред проучените източници не се откри такъв, в който да се предлага/реализира това.

3.1.2 Смяна на опорния математически обект

Тази разновидност на метода е известна още като метод на субституциите. Същността ѝ е представена в [3], [9] и [56]. Следващото описание е от последно цитирания източник, тъй като то е най-прецизно. Като се прилага методът на субституциите, дадена задача се преобразува в нова чрез преобразуване на областта на решенията R в $R^{'}$, така че на всеки елемент $x \in R$ да съответства по определено правило $y = f(x)$ даден елемент $y \in R^{'}$. Уравнението $y = f(x)$, посредством което се преобразува R в $R^{'}$, се нарича *уравнение на субституцията*. Съответствието между R и $R^{'}$, определено от това уравнение, се нарича *субституция*. В [42] пише, че една от ползите на този метод е възможността за контрол на сложността на решението на получените задачи. Друга полза на метода е осъществяване на вътрешнопредметни връзки.

В [42] е дадена следната схема за създаване на задачи по метода на субституциите.

1. *Избор или съставяне на изходна задача.*
2. *Определяне на обектите в изходната задача, които ще бъдат заменени.*
3. *Изброяване на известните субституции, които могат да се използват за всеки един от определените в предходната точка обекти.*
4. *Избор на субституции съобразно методическите цели, които сме си поставили.*
5. *Извършване на избраните субституции и изследване (ако се налага такова) с цел да се провери верността на някои нови съждения и формулиране на нови задачи.*
6. *Решаване на изходната задача.*

7. *Преосмисляне на решенията ѝ в следния аспект: Какво и как ще се измени във формулировката на изходната задача, ако някой обект от решението се замени с друг?*
8. *Извършване на необходимите изследвания, към които сме се насочили в предходната точка и формулиране на нови задачи.*

Методът намира приложение в алгебрата и в тригонометрията. След прилагането му математическата конструкция се запазва, но се описва чрез друга променлива. Под математическа конструкция в алгебрата се разбира общият вид на някои уравнения, неравенства или системи от такива, които се изучават в училищния курс по математика. За част от тях пише в [9] и [56]. Примери за такива задачи може да се открият в учебници и сборници по математика.

Сред този тип задачи най-разпространени са тези, в които, след прилагане на метода на субституциите, се получава квадратно уравнение. В подкрепа на това твърдение е една от системите от задачи, предложени в [17]. Системата се състои от 21 уравнения, сред които има биквадратни уравнения, дробно-рационални уравнения, уравнения от по-висока степен, ирационални уравнения, тригонометрични уравнения, показателни уравнения и логаритмични уравнения.

Приложението на метода при решаване на тригонометрични уравнения и неравенства е безспорен, но не само заради известната универсална субституция. Методът може да се използва и за създаване на тригонометрични уравнения и неравенства.

Методът на субституциите намира приложение и при решаването на задачи от функции, когато се разглежда композиция от функции. При създаване на такива задачи първата функция се запазва, а втората (тази, която е аргумент на първата) се променя.

Разглежданият метод се използва и в геометрията. В едни случаи дадена геометрична конструкция остава същата, но се търси подходящо прекодиране [49] за нейни елементи, с помощта на което конструкцията се описва по друг начин. За постигането на тази цел понякога се извършва допълнително построение. В други случаи за опростяване или усложняване на дадена геометрична конструкция се използва замяната на една фигура с друга. Примери за това се откриват в [37].

От направения анализ се вижда, че методът на субституциите е популярен, но единствено в [42] е дадена схема за създаване на задачи по този метод.

3.2 Смяна на опорната конструкция

В [65] методът се среща под името *конструкции*. В повечето случаи опорната конструкция произлиза от самата теория. Смяната ѝ може да се осъществи по различни начини.

Когато опорната конструкция е геометрична, един от тези начини е *механичен* и се състои в кооперирane на математически обекти. В първия случай се кооперира една и съща конструкция. Това става чрез „долепване“ на дадената конструкция до самата нея по определен начин, като това може да се прилага многократно в някои ситуации. Пример за това се открива в [48]. В източника първо се разглеждат триъгълни пирамиди, а след това – четириъгълни пирамиди, получени чрез подходящо „долепване“ на две триъгълни пирамиди. Във втория случай се кооперират раз-

лични конструкции. Тогава се използват резултати от различни теории или решени задачи. Пример за това се открива в [65].

В резултат на споменатите механични процедури се получава нова конструкция. Това води до:

- създаване на задачи „етажерки“ (много рафтове и на всеки по една задача) или задачи „матрьошки“ (няколко задачи, които се съдържат една в друга) [65];
- усложняване на структурата на решението на задачата [12];
- контекстуално прекодиране [49] за някои елементи на новополучената конструкцията.

Последното е и една от причините за различията в текстовете на задачите. Креативността при използване на този метод на създаване на задачи се базира именно на откриването на такива фигури/тела или задачи, които позволяват да се замени опорната конструкция или част от нея с друга такава.

3.3 Вариране на информацията

В [66] методът се среща под името *вариране на условията*. Съществуват три възможности:

- запазва се даденото и се променя търсеното[1];
- запазва се търсеното и се променя даденото;
- променя се и даденото, и търсеното.

Същността на първата възможност се състои в това, че даденото се запазва, а се търсят други фигури/тела (при геометрични или стереометрични задачи) или елементи на фигури/тела, които могат да бъдат намерени или разпознати на базата на дадената информация, или се търсят отношения, свързани с елементи на фигура/тяло или с други техни характеристики. Креативността в този случай се базира на откриването на такива фигури/тела. В [31] пише, че използването на тази възможност за създаване на задачи води до подробно изследване на връзките между математическите обекти, участващи в тези задачи.

Същността на втората възможност се състои в това, че търсеното се запазва, а се търсят различни елементи на фигура/тяло или различни опорни фигури/тела, които осигуряват достатъчно условие за намиране на търсеното. Когато се използва тази възможност за вариране на информацията, в [31] се препоръчва създаващият задачи да бъде внимателен. Причината за това е, че промяната на даденото може да доведе до създаване на различни *видове задачи според условието на задачата*.

Същността на третата възможност се състои в комбинирано използване на предходните две или използване на механична замяна на части от условието с такива от заключението на задача или обратно. Последното е разгледано в 3.5.2.

Според Е. Канин [29] замяната на едни данни от текста на задача с други такива има двояка роля. В глобален план това способства учениците по-добре да разбират връзката между даденото и търсеното, а оттам и да осъзнаят логическата струк-

[1] При задачите за доказване и задачите за построение думата *търсеното* трябва да се замени съответно с *това, което трябва да се докаже* и *това, което трябва да се построи*. Тази бележка важи за всички случаи, в които думата е употребена в тази точка и нейните подточки.

турата на задачата. В локален план пък се решават важни методически проблеми, произтичащи от конкретното учебно съдържание.

В таблица 1 е дадена информация за литературни източници, които съдържат реализации по трите възможности за вариране на информацията.

Таблица 1

Реализации по ... възможност за вариране на информацията	**Литературни източници**
първата	[29]
втората	[10], [29], [42], [57], [58], [66]
третата	[15], [35], [63]

Този метод за създаване на задачи се среща и в [30], [31], [32], [33], [41], [45] и [46]. Тези автори разбират варирането на информацията в много широки граници – промяна на съдържанието на задача (дадено, търсено, метод за решаване), както и на нейния формàт.

3.3.1 Промяна на числовите данни

Този метод за създаване на задачи се състои в следното. Избира се конкретна задача. След това в нейната формулировка се променя само част от числовите ѝ данни или всички такива. В алгебрата всички уравнения, неравенства и системи от такива имат общ вид. Методът намира приложение при създаване на посочените математически обекти само с промяна на стойностите на коефициентите пред съответните степени на променливата (променливите) и затова се разглежда като разновидност на метода *вариране на информацията*. В геометрията промяната става в дължините на използваните отсечки или в мерките на ъглите, а в тригонометрията се променят стойностите на тригонометричните функции. В този случай са използвани и познавателните методи *специализация* или *конкретизация*, но като средство за създаване на задачи.

В [44] авторът обръща специално внимание на т. нар. от него дейност *мащабиране* при създаване на задачи. Определя я по следния начин: *Стойностите на зададените величини се увеличават или намаляват пропорционално. В процеса на изследването мащабирането е преход от един частен случай към друг, т.е. от един конкретен обект към друг конкретен обект.* На езика на геометрията тази дейност може да се определи като подобие. В същия източник е показана и връзката на този метод за създаване на задачи с познавателния метод *обобщение*, но използван като средство за създаване на задачи.

Този метод А. Моллов [42] нарича *вариране на параметри* и го разглежда като частен случай на конкретизации на променливи. Според него варирането на параметри по същество е образуване на множество нови задачи от стара, в която последователно се дават стойности на една или няколко променливи. Това ясно показва, че източникът на новата задача е самата задача.

Изменението на числовите данни във формулировката на задача невинаги може да се осъществи на случаен принцип. За тези особености се говори явно в [31] и неявно в [40]. Предвид казаното в [36] и [37] са отпечатани 8 таблици с числови данни, които подпомагат дейността *създаване на задачи*. В [7] са поместени формули

за пресмятане на питагорови тройки числа и на херонови тройки числа, а в [60] са дадени 135 херонови тройки числа. Тези данни са полезни, защото могат да се използват наготово при създаването на задачи.

Това е най-лесният и едновременно с това е и най-тривиалният метод за създаване на задачи. Въпреки това, той не бива да се отхвърля. А. Моллов [42] пише, че методът има образователен и възпитателен ефект, ако се използва при колективна работа с учениците, поради това, че се налага да се зададат множествата на определеност на всяка променлива. Второто предимство на метода е, че промяната на числовите данни във формулировката на задача може да влияе съществено на структурата на решението на задачата [37]. Последното предимство на метода е свързано с контролната функция на задачите. Използването на тази разновидност на метода се оказва полезно, защото могат да се създадат задачи, които да са с една и съща сложност на решение.

3.3.2 Метод на параметризацията

Този метод се отнася по-скоро до дейността *решаване на задачи*, отколкото до дейността *създаване на задачи*. В. Ермаков [21] прави опит за изясняване на същността на метода, а по-късно по тази теория работят Н. Четверухин и Л. Яцкевич [64]. В България за метода пишат основно Л. Портев, К. Славов и С. Славова [53], [55].

В [38], [39], [57] и [58] се предлага друго приложение на споменатия метод, а именно – създаване на задачи. Същността му се състои в следното. Когато една геометрична фигура е определена с точност до еднаквост (подобност), то това позволява да се използват всички нейни инвариантни елементи относно еднаквостта (подобността) и затова се разглежда като разновидност на метода *вариране на информацията*. Следователно създаването на геометрични задачи се свежда до подходящ подбор на система параметри (брой и вид), с помощта на която фигурата се определя с точност до еднаквост (подобност).

Д. Милушева-Бойкина [39] разделя създаването на задачи чрез параметризация на три групи, като използва критерия *видове задачи според изискванията*. В посочените разработки липсва модел или технология, с помощта на която да се изясни в дълбочина същността на този метод за създаване на задачи.

Моделът за създаване на задачи чрез параметризация при различните видове задачи според изискванията е различен.

На базата на конкретни примери от [39] са описани три технологии от С. Кадиев. Ето първата от тях.

Ако се създават задачи, при които преследваната цел е да се използва първата възможност за вариране на информацията, то:

1. За даденото се избира подходяща система параметри, с помощта на която фигурата се определя с точност до еднаквост (подобност). При създаването на различните задачи избраните параметри не се променят.
2. За да се промени търсеното в различните случаи се избира един от останалите (не)метрични параметри на фигурата, които не участват в системата параметри, определена в 1.

Използването на различните инвариантни елементи на фигурата относно еднак-

востта (подобността) благоприятства за усвояването на необходими условия за определяне на тази фигура с точност до еднаквост (подобност).

По аналогичен начин са описани технологиите за създаване на задачи за другите два типа задачи по приетия критерий за класификация. В тези случаи са използвани останалите две възможности за вариране на информацията. Изводът, който следва оттук, е, че след като е описана същността на даден метод, може да се премине към технологичната част на процеса *създаване на задачи*.

3.4 Използване на взаимносвързани понятия

А. Моллов [42] разглежда този метод, като доразвива идеите на П. Ердниев [20], [67] за използване на двойки взаимносвързани понятия. Въвежда понятията *задача-модел* и *задача-прототип*. *Задача-модел* нарича изходната задача, т.е. задачата, която се използва за създаването на нова такава. *Задача-прототип* нарича тази задача, която е получена от задачата-модел чрез използване на взаимносвързани (родствени) понятия. А. Моллов [42] разглежда 15 двойки от взаимносвързани понятия – взаимнообратни операции, взаимносвързани релации, вярно и невярно твърдение, конюнкция и дизюнкция, кванторите за общност и за съществуване и други. Показани са илюстриращи примери.

3.5 Използване на елементи от математическата логика

Една от първите методически книги, в които успешно е използван такъв апарат, е „Прямая и обратная теоремы“ [18], чието първо издание е от 30-те години на XX век. В нея апаратът е използван за моделиране на теореми с импликации. В България по този метод основно работи И. Ганчев [13], [14].

3.5.1 Моделиране на определение на понятие и на теорема чрез средства на съждителното смятане

Тази разновидност на метода се фокусира върху изясняване на логическата структура на даденото знание, като това става чрез създаването на модел, за изграждането на който се използват средства на съждителната логика. Моделите определят рамките на дейностите/технологиите за съставяне на последователност от свързани в дидактическо отношение задачи за формиране на необходимите умения.

Според Л. Виноградова [11] и Ю. Нинова [50] при усвояване на определението на понятие трябва да се извършват упражнения, т.е. да има задачи, които изискват извършването на определен набор от дейности. Наличието на такъв набор от дейности показва, че може да се създаде технология за съставяне на дидактически системи от задачи за усвояване на определението на едно понятие. В [50] авторът описва някои модели, свързани с технология за усвояване на понятия с конюнктивна структура на определящата част на дефиницията.

Л. Виноградова [11] описва набор от дейности за усвояване на теорема. За реализиране на тези дейности е необходимо създаването на задачи със специфични дидактически функции. Наличието на такъв набор от дейности показва, че може да се създаде технология за съставянето на дидактически системи от задачи за усвояване на теорема. Пример за такава технология е показан в [26].

Моделите, използващи средства на математическата логика, помагат да се изгради както теоретическата [1], така и дидактическата рамка на приложенията на теорията. Тези модели помагат още за изясняване на вида, значението и ограниче-

нията на математическите дейности.

3.5.2 Формулиране на обратно, противоположно и обратно-противоположно твърдение на дадено (право) твърдение

Според А. Столяр [59] обемът на понятието *обратно твърдение* е целесъобразно да се „разшири“. Авторът разглежда начините за формулиране на обратни твърдения за следните пет структури на правото твърдение $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i \to q$, $\bigvee\limits_{i=1}^{n} p_i \to q$, $p_1 \to (p_2 \to q)$, $p \to \bigwedge\limits_{i=1}^{n} q_i$ и $p \to \bigvee\limits_{i=1}^{n} q_i$. За твърдение със структура $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i \to q$ А. Столяр предлага като обратни твърдения да се разглеждат всички твърдения, които могат да се получат, като се сменят местата на заключението и на всяка част от условието на теоремата. По такъв начин обратните твърдения ще бъдат толкова, колкото е броят на подмножествата на множеството $\{p_1; p_2; \ldots; p_n\}$, като се изключи празното множество, т.е. $2^n - 1$. В общия случай не всички от обратните твърдения са независими, тъй като някои от тях следват от останалите. Ако например $n = 2$, обратните твърдения на твърдение със структура $p_1 \wedge p_2 \to q$ са три на брой. Те имат следните логически структури: $q \wedge p_2 \to p_1$, $p_1 \wedge q \to p_2$ и $q \to p_1 \wedge p_2$. За останалите четири структури А. Столяр предлага образуване на обратни твърдения на базата на следните еквивалентности: $\bigvee\limits_{i=1}^{n} p_i \to q \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{i=1}^{n} (p_i \to q)$, $p_1 \to (p_2 \to q) \Leftrightarrow p_1 \wedge p_2 \to q$, $p \to \bigwedge\limits_{i=1}^{n} q_i \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{i=1}^{n} (p \to q_i)$ и $p \to \bigvee\limits_{i=1}^{n} q_i \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \overline{q_i} \to \overline{p}$.

По темата, но без съществени обобщения, е писано в [8], [39] и [42]. Според [39] приложението на обща схема за образуване на обратни твърдения дава в известен смисъл „механично“ списъка на обратните твърдения, а напълването им със съответно съдържание става след уточняване на конкретния смисъл на съжденията в условието и в заключението на твърдението.

Важно е да се отбележи и фактът, че в училищния курс по математика се използват противоположното и обратно-противоположното твърдение на дадено (право) твърдение, макар и в редки ситуации. Примери за това може да се открият в [27] и [28].

3.5.3 Формулиране на еквивалентни задачи

В различни литературни източници понятието *еквивалентни задачи* има различно съдържание. Според Д. Пойа две задачи са еквивалентни, ако решението на коя да е от тях включва решението и на другата [51], [52]. Замяната на една задача с еквивалентна на нея в [51] и [52] се нарича *еквивалентна* (*обратима*, *възвратима*, *двустранна*) *редукция*. Еквивалентна редукция се получава и когато дадено условие се замени с друго, еквивалентно на него. Това е полезен метод, особено в случаите, когато еквивалентната задача има по-просто или по-красиво решение [51], [52]. Такава редукция може да се прави и с помощта на логически еквивалентности, използвани като модели. Като се позовават на последното Ю. Нинова и В. Михова [47] описват понятието *еквивалентни задачи* като задачи, чиито логически структури са еквивалентни. Разглежданият метод за създаване на задачи се базира именно на логическата еквивалентност на формули.

По този метод е работил И. Ганчев [13], [14], който използва еквивалентността

$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_i \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q \;\Leftrightarrow\; p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge \overline{q} \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow \overline{p_i}$. Тази еквивалентност позволява:

1. *създаването на задачи да се осъществява чрез механични дейности*;
2. *да се упражнява косвеният метод за доказване на твърдения*;
3. *да се разработи диалогова обучаваща програма, в която учителят въвежда условието и заключението на теоремата, а компютърът съставя съответните задачи*;
4. *да се съставят целесъобразни дидактически системи от еквивалентни помежду си задачи.*

Относно последната възможност авторът предлага технология, по която да се осъществи съставянето на системата, а след това е разгледана конкретна система от такива задачи. Този метод за създаване на задачи е полезен в случаите, когато се разглежда някоя от задължителните за изучаване теореми, но нейното доказателство е сложно по структура. Тогава тази теорема може да се замени с еквивалентна на нея теорема от класа задачи, който те определят, но се доказва по-лесно.

В [2], [4], [5] и [47] са съставени различни групи от еквивалентни задачи на базата на посочени логически еквивалентности. На същото основание са предложени и конкретни технологии за създаването на задачите.

Креативността на метода се състои в откриването на задачи, чиито логически структури са като тези в някоя от двете страни на разглежданите еквивалентности.

4 Изводи

На базата на направените преглед и анализ на литературни източници може да се формулират следните изводи.

1. Дадени са **описания** на понятията *метод за създаване на задачи* и *средство за създаване на задачи.*
2. **Не съществува единна терминология** за даден метод.
3. В отделни източници лаконично се описва **същността на метода**. Повечето автори говорят само за **един метод** за създаване на задачи, но всъщност използват няколко при реализирането на дейността, без да ги споменават. На практика методите за създаване на задачи се използват **комбинирано**, за да се разгледа дадено знание в **пълнота**.
4. Направено е разграничение между **средство** и **метод** за създаване на задачи. В някои източници **не се говори за средства**, а директно за **метод**. В други източници се получава преплитане на **различни средства**.
5. В повечето източници **не се използват технологии** при реализиране на дейността *създаване на задачи.* По-скоро се говори за **схеми** или **алгоритми** за създаване на задачи. Ако е ясна същността на метода, дейността може да се опише в **технология**.
6. **Систематизирането** на проучените механични методи е предпоставка за изграждане на **класификация** на всички проучени методи, т.е. ще бъде налице **йерархична структура**. Тя ще позволи търсенето на информация в дълготрайната памет да се **локализира**. Това ще подпомогне професионалната

дейност на учителя в **теоретичен** и в **практически план**.

Благодарности

Изказвам своите благодарности на доц. д-р Юлия Нинова за оказаните помощ и подкрепа при писането на тази статия.

Литература

[1] Bernardi, C. What Mathematical Logic Says About the Foundations of Mathematics, *From a Heuristic Point of View: Essays in Honour of Carlo Cellucci*, (2014), 41–53, https://doi.org/10.48550/arXiv.1602.07551.

[2] V. Mihova, J. Ninova. On a Generalization of Criteria A and D for Congruence of Triangles, *Annual of Sofia University "St. Kliment Ohridski", Faculty of Mathematics and Informatics*, **102** (2015), 257–269, https://stipendii.uni-sofia.bg/index.php/fmi/article/view/73.

[3] D. Millousheva-Boykina. One Idea for Creating Mathematical Problems Using the Substitution Method, *Scientific Research in XXI Century*, **44** (2021), 107–113, https://ojs.ukrlogos.in.ua/index.php/interconf/article/view/9814.

[4] J. Ninova, V. Mihova. An Algorithm for Composition of Inverse Problems With Exclusive Disjunction as a Logical Structure in the Conclusion, *Mathematical education: actual situation and perspectives*, (2014), 29–32, https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.1588.

[5] J. Ninova, V. Mihova. Composition of Inverse Problems With a Given Logical Structure, *Annual of Sofia University "St. Kliment Ohridski", Faculty of Mathematics and Informatics*, **101** (2013), 167–181, https://ftl5.uni-sofia.bg/index.php/fmi/article/view/237.

[6] E. Peel. Psychological and Educational Research Bearing on Mathematics and Teaching. *Teaching School Mathematics*, (1971), 151–177, https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000007959.

[7] О. Ажгалиев. Способ составления задач на вычисление площадей, *Математика в школе*, **1** (1994), 19–20. [O. Azhgaliev. Sposob sostavleniya zadach na vaychislenie ploshtadey, *Matematika v shkole*, **1** (1994), 19–20] (in Russian).

[8] Б. Баев, И. Пашов. Приложение на взаимносвързаните твърдения за съставяне на задачи, *Материали от програмата на Шуменския полуден на X пролетна конференция на СМБ*, **10** (1981), 102 – 110. [B. Baev, I. Pashov. Prilozhenie na vzaimno-svarzanite tvardeniya za sastavyane na zadachi, *Materiali ot programata na Shumenskiya poluden na X proletna konferentsiya na SMB*, **10** (1981), 102–110] (in Bulgarian).

[9] Б. Баев. Елементарни методи за съставяне на задачи от училищния курс по математика, *Математика и математическо образование*, **11** (1982), 436–439. [B. Baev. Elementarni metodi za sastavyane na zadachi ot uchilishtniya kurs po matematika, *Matematika i matematichesko obrazovanie*, **11** (1982), 436–439] (in Bulgarian).

[10] Г. Балъкчиева, Т. Картулева. Система от задачи за построение на равностранен триъгълник чрез метода на ротация, *Математика и математическо образование*, **23** (1994), 465–468. [G. Balakchieva, T. Kartuleva. Sistema

ot zadachi za postroenie na ravnostranen triagalnik chrez metoda na rotatsiya, *Matematika i matematichesko obrazovanie*, **23** (1994), 465–468] (in Bulgarian).

[11] Л. Виноградова. Методика преподавания математики в средней школе: Учебное пособие. Ростов на Дон, Феникс, 2005. [L. Vinogradova. Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole: Uchebnoe posobie. Rostov na Don, Feniks, 2005] (in Russian).

[12] И. Ганчев. За математическите задачи. София, Народна просвета, 1971. [I. Ganchev. Za matematicheskite zadachi. Sofiya, Narodna prosveta, 1971] (in Bulgarian).

[13] И. Ганчев. Логический аналог одного свойства уравнений и его использование в обучении математике, *Математика в школе*, **2** (1993), 77–79. [I. Ganchev. Logicheskiy analog odnogo svoystva uravneniy i ego ispolyzovanie v obuchenii matematike, *Matematika v shkole*, **2** (1993), 77–79] (in Russian).

[14] И. Ганчев. Логическият апарат – ефективно средство в обучението по математика и в дидактиката на математиката, *Юбилейна научна сесия – 30 години ФМИ, ПУ „Паисий Хилендарски“*, (2000), 18–27. [I. Ganchev. Logicheskiyat aparat–efektivno sredstvo v obuchenieto po matematika i v didaktikata na matematikata, *Yubileyna nauchna sesiya – 30 godini FMI, PU „Paisiy Hilendarski“*, (2000), 18–27] (in Bulgarian). `https://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=584`.

[15] I. Georgieva, Zh. Angelova. Ideas on systemizing problems for solving a triangle in teaching mathematics, *Mathematics and Education in Mathematics*, **51** (2022), 153–171] (in Bulgarian). `https://smb.math.bas.bg/mem/index.php/memjournal/article/view/59`.

[16] Е. Герганов. Памет и смисъл. София, Наука и изкуство, 1987. [E. Gerganov. Pamet i smisal. Sofiya, Nauka i izkustvo, 1987] (in Bulgarian).

[17] А.Гольдман, Л. Звавич. Учебные серии на уроках, *Математика в школе*, **5** (1990), 19–22. [A. Golydman, L. Zvavich. Uchebnaye serii na urokah, *Matematika v shkole*, **5** (1990), 19–22] (in Russian).

[18] И. Градштейн. Прямая и обратная теоремы. Москва, ФИЗМАТГИЗ, 1959. [I. Gradshteyn. Pryamaya i obratnaya teorema. Moskva, FIZMATGIZ, 1959] (in Russian).

[19] Р. Грановска. Елементи на практическата психология. София, Наука и изкуство, 1989. [R. Granovska, Elementi na prakticheskata psihologiya. Sofiya, Nauka i izkustvo, 1989] (in Bulgarian).

[20] П. Ердниев. Метод на противопоставянето в уроците по геометрия, *Математика и физика*, **12**, № 3 (1969), 16 – 21. [P. Erdniev. Metod na protivopostavyaneto v urotsite po geometriya, *Matematika i fizika*, **12**, № 3 (1969), 16 – 21] (in Bulgarian).

[21] В. Ермаков. Число условий, определяющих геометрическую фигуру на плоскости, *Журнал элементарной математики*, **1**, № 2 (1884), 26–29. [V. Ermakov. Chislo usloviy, opredelyayushtih geometricheskuyu figuru na ploskosti, *Zhurnal elementarnoy matematiki*, **1**, № 2 (1884), 26–29] (in Russian). `https://www.mathedu.ru/text/zhem_1884_t1_n2/p4/`.

[22] Й. Иванов, М. Христов. Върху обучаващите решения на геометрични задачи, *Mattex*, **1** (2016), 251–261. [Y. Ivanov, M. Hristov. Varhu obuchavashtite resheniya na geometrichni zadachi, *Mattex*, **1** (2016), 251–261] (in Bulgarian). `http:`

//info.fmi.shu-bg.net/skin/pfiles/251_pdfsam_mattex_vol-1-2016.pdf.
[23] Институт за български език. Речник на българския език (онлайн), 2014. [Institut za balgarski ezik. Rechnik na balgarskiya ezik (onlayn), 2014] (in Bulgarian), https://ibl.bas.bg/.
[24] Институт за български език. Речник на съвременния български книжовен език (онлайн), 2014. [Institut za balgarski ezik. Rechnik na savremenniya balgarski knizhoven ezik (onlayn), 2014] (in Bulgarian), https://ibl.bas.bg/.
[25] С. Кадиев, Ю. Нинова. Дидактически модел за съставяне на система от задачи на базата на технологичния подход, *Математика и информатика*, **64**, № 1 (2021), 99–113. [S. Kadiev, Yu. Ninova. Didakticheski model za sastavyane na sistema ot zadachi na bazata na tehnologichniya podhod, *Matematika i informatika*, **64**, № 1 (2021), 99–113] (in Bulgarian).
[26] С. Кадиев. Използване на граматиката на българския език при изучаване на математически твърдения, *Пролетна научна сесия на ФМИ, СУ „Св. Климент Охридски“*, (2023), 25. [S. Kadiev. Izpolzvane na gramatikata na balgarskiya ezik pri izuchavane na matematicheski tvardeniya, *Proletna nauchna sesiya na FMI, SU „Sv. Kliment Ohridski“*, (2023), 25] (in Bulgarian).
[27] С. Кадиев. Съседни и противоположни ъгли. Перпендикулярни прави – 1 част, *С БНТ на училище: На фокус 7. клас*, (2021). [S. Kadiev. Sasedni i protivopolozhni agli. Perpendikulyarni pravi – 1 chast, *S BNT na uchilishte: Na fokus 7. klas*, (2021)] (in Bulgarian), https://bnt.bg/news/sasedni-i-protivopolozhni-agli-perpendikulyarni-pravi-1-chast-295181news.html.
[28] С. Кадиев. Успоредни прави – признаци и свойства, *С БНТ на училище: На фокус 7. клас*, (2021). [S. Kadiev. Usporedni pravi – priznatsi i svoystva, S BNT na uchilishte: *Na fokus 7. klas*, (2021)] (in Bulgarian), https://bnt.bg/news/-usporedni-pravi-priznaci-i-svoistva-295304news.html.
[29] Е. Канин. Развитие темы задачи, *Математика в школе*, **3** (1991), 8–12. [E. Kanin. Razvitie temay zadachi, *Matematika v shkole*, **3** (1991), 8–12] (in Russian).
[30] Г. Ковалёва. Варьирование как метод построения систем задач по математике, *Ярославский педагогический вестник*, **61**, № 4 (2009), 51–55. [G. Kovalyova. Varyirovanie kak metod postroeniya sistem zadach po matematike, *Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik*, **61**, № 4 (2009), 51–55] (in Russian). https://cyberleninka.ru/article/n/varirovanie-kak-metod-postroeniya-sistem-zadach-po-matematike.
[31] Г. Ковалева. Методическая система обучения будущих учителей математики конструированию систем задач. Дисертация, ВАК РФ, Волград, 2012. [G. Kovaleva, Metodicheskaya sistema obucheniya budushtih uchiteley matematiki konstruirovaniyu sistem zadach. Disertatsiya, VAK RF, Volgrad, 2012] (in Russian). https://www.dissercat.com/content/metodicheskaya-sistema-obucheniya-budushchikh-uchitelei-matematiki-konstruirovaniyu-sistem-z.
[32] Г. Ковалева. Приемы варьирования задачи как метода построения систем, *Известия Самарского научного центра РАН*, **3**, № 3 (2010), 646–653. [G. Kovaleva. Priemay varyirovaniya zadachi kak metoda postroeniya sistem, *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN*, **3**, № 3 (2010), 646–653] (in Russian). https://cyberleninka.ru/article/n/priemy-varirovaniya-zadachi-kak-metoda-postroeniya-sistem.

[33] Г. Ковалева. Приемы конструирования систем математических задач, *Наука и школа*, **2** (2010), 77–81. [G. Kovaleva. Priemay konstruirovaniya sistem matematicheskih zadach, *Nauka i shkola*, **2** (2010), 77 –81] (in Russian). https://cyberleninka.ru/article/n/priemy-konstruirovaniya-sistem-matematicheskih-zadach.

[34] М. Крайзман. Векторният метод и приложението му при решаване на задачи, *За някои въпроси на обучението по математика*, **2** (1980), 128–161. [M. Krayzman. Vektorniyat metod i prilozhenieto mu pri reshavane na zadachi, *Za nyakoi vaprosi na obuchenieto po matematika*, **2** (1980), 128 – 161] (in Bulgarian).

[35] Ю. Куликов. Вариации на тему учебной задачи, *Математика в школе*, **2** (1994), 18–19. [Yu. Kulikov. Variatsii na temu uchebnoy zadachi, *Matematika v shkole*, **2** (1994), 18–19] (in Russian).

[36] Л. Лоповок. За подбора и съставянето на задачи по геометрия, *Математика и физика*, **6**, № 3 (1963), 30–36. [L. Lopovok. Za podbora i sastavyaneto na zadachi po geometriya, *Matematika i fizika*, **6**, № 3 (1963), 30 – 36] (in Bulgarian).

[37] Л. Лоповок. Из опита при подбора и съставянето на задачи по геометрия, *Математика и физика*, **6**, № 4 (1963), 38 – 44. [L. Lopovok. Iz opita pri podbora i sastavyaneto na zadachi po geometriya, *Matematika i fizika*, **6**, № 4 (1963), 38–44] (in Bulgarian).

[38] Д. Милушева-Бойкина, В. Милушев. Методика и методы составления математических задач для средней школы, *Вісник Черкаського університету, Серія „Педагогічні науки“*, **16** (2017), 103–114. [D. Milusheva-Boykina, V. Milushev. Metodika i metoday sostavleniya matematicheskih zadach dlya sredney shkolay, *Visnik Cherkasykogo universitetu, Seriya „Pedagogichni nauki“*, **16** (2017), 103–114] (in Russian). https://www.researchgate.net/publication/325324537_Metodika_i_metody_sostavlenia_matematiceskih_zadac_dla_srednej_skoly.

[39] Д. Милушева-Бойкина. Дейността съставяне на задачи и обучаване на студентите на някои методи за съставяне на задачи от училищния курс по математика. Дисертация, ВАК, София, 2000. [D. Milusheva-Boykina. Deynostta sastavyane na zadachi i obuchavane na studentite na nyakoi metodi za sastavyane na zadachi ot uchilishtniya kurs po matematika. Disertatsiya, VAK, Sofiya, 2000] (in Bulgarian).

[40] М. Модонова. Конструирование систем математических задач. *Интеграция образования*, **4** (2009), 98–102. [M. Modonova. Konstruirovanie sistem matematicheskih zadach. *Integratsiya obrazovaniya*, **4** (2009), 98 – 102] (in Russian). https://cyberleninka.ru/article/n/konstruirovanie-sistem-matematicheskih-zadach.pdf.

[41] М. Моисеева. Подходы к конструированию математических задач как основы для создания их систем, *Известия ВГПУ, Теория и методика обучения и воспитания*, **1** (2009), 156–159. [M. Moiseeva. Podhoday k konstruirovaniyu matematicheskih zadach kak osnovay dlya sozdaniya ih sistem, *Izvestiya VGPU, Teoriya i metodika obucheniya i vospitaniya*, **1** (2009), 156–159] (in Russian). https://cyberleninka.ru/article/n/podhody-k-konstruirovaniyu-matematicheskih-zadach-kak-osnovy-dlya-sozdaniya-ih-sistem.

[42] А. Моллов. Някои идеи за съставяне на задачи и системи от такива, свързани

с училищния курс по математика. Дисертация, ВАК, София, 1987. [A. Mollov. Nyakoi idei za sastavyane na zadachi i sistemi ot takiva, svarzani s uchilishtniya kurs po matematika. Disertatsiya, VAK, Sofiya, 1987] (in Bulgarian).

[43] Т. Моралишвили. Методика решения нестандартных алгебраических задач. *Современные проблемы методики преподавания математики*, (1985), 221–231. [T. Moralishvili. Metodika resheniya nestandartnayh algebraicheskih zadach. *Sovremennaye problemay metodiki prepodavaniya matematiki*, (1985), 221–231] (in Russian).

[44] М. Найденов. Някои основни дейности при изследване и съставяне на математически задачи, *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 387–391. [M. Naydenov. Nyakoi osnovni deynosti pri izsledvane i sastavyane na matematicheski zadachi, *Matematika i matematichesko obrazovanie*, **36** (2007), 387–391] (in Bulgarian). http://www.math.bas.bg/smb/2004_2007_PK/2007/pdf/387-391.pdf.

[45] И. Насикан. Метод варьирования в системе задач на развитие функциональных умений учащихся основной школы, *Мир науки, культуры, образования*, **6**, № 43 (2013), 65–67. [I. Nasikan. Metod varyirovaniya v sisteme zadach na razvitie funktsionalynayh umeniy uchashtihsya osnovnoy shkolay, *Mir nauki, kulyturay, obrazovaniya*, **6**, № 43 (2013), 65–67] (in Russian). https://cyberleninka.ru/article/n/metod-varirovaniya-v-sisteme-zadach-na-razvitie-funktsionalnyh-umeniy-uchaschihsya-osnovnoy-shkoly.

[46] И. Насикан. Методические основы проектирования системы задач в контексте деятельностного подхода к обучению математике, *Вестник РУДН, Серия „Психология и педагогика“*, **2** (2012), 130–136. [I. Nasikan. Metodicheskie osnovay proektirovaniya sistemay zadach v kontekste deyatelynostnogo podhoda k obucheniyu matematike, *Vestnik RUDN, Seriya „Psihologiya i pedagogika“*, **2** (2012), 130–136] (in Russian). https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-osnovy-proektirovaniya-sistemy-zadach-v-kontekste-deyatelnostnogo-podhoda-k-obucheniyu-matematike.

[47] Ю. Нинова, В. Михова. Еквивалентни задачи, *Математика и математическо образование*, **42** (2013), 424–429. [Yu. Ninova, V. Mihova. Ekvivalentni zadachi, *Matematika i matematichesko obrazovanie*, **42** (2013), 424–429] (in Bulgarian). http://www.math.bas.bg/smb/2013_PK/tom_2013/pdf/424-429.pdf.

[48] Ю. Нинова, С. Кадиев. Система от задачи на тема „Отношение на обемите на два многостена“, създадена на базата на технологичния подход, *75-годишна мисия и история*, (2022), 104–136. [Yu. Ninova, S. Kadiev. Sistema ot zadachi na tema „Otnoshenie na obemite na dva mnogostena“, sazdadena na bazata na tehnologichniya podhod, *75-godishna misiya i istoriya*, (2022), 104–136] (in Bulgarian). https://unipress.bg/image/catalog/1pdf/matematika.pdf.

[49] Ю. Нинова. Контекстуално прекодиране, *Математика и информатика*, **65**, № 1 (2022), 82–95. [Yu. Ninova. Kontekstualno prekodirane, *Matematika i informatika*, **65**, № 1 (2022), 82–95] (in Bulgarian). https://azbuki.bg/wp-content/uploads/2022/02/Matematika_01_Uliqn-Ninov.pdf.

[50] Ю. Нинова. Модели и технологии за решаване на методически задачи, свързани с изучаването на математическите понятия. Дисертация, ВАК, София, 2024.

[Yu. Ninova. Modeli i tehnologii za reshavane na metodicheski zadachi, svarzani s izuchavaneto na matematicheskite ponyatiya. Disertatsiya, VAK, Sofiya, 2024] (in Bulgarian).

[51] Д. Пойа. Как се решава задача. София, Народна просвета, 1972. [D. Poya. Kak se reshava zadacha. Sofiya, Narodna prosveta, 1972] (in Bulgarian).

[52] Д. Пойа. Математическото откритие. София, Народна просвета, 1968. [D. Poya. Matematicheskoto otkritie. Sofiya, Narodna prosveta, 1968] (in Bulgarian).

[53] Л. Портев. Параметризация на геометричните фигури и приложените ѝ в обучението по математика, *За някои въпроси на обучението по математика*, **2** (1980), 179–192. [L. Portev. Parametrizatsiya na geometrichnite figuri i prilozhenite ѝ v obuchenieto po matematika, *Za nyakoi vaprosi na obuchenieto po matematika*, **2** (1980), 179–192] (in Bulgarian).

[54] Речник на българския език „Речко“, 2010. [Rechnik na balgarskiya ezik „Rechko“, 2010] (in Bulgarian), `https://rechnik.chitanka.info/`.

[55] К. Славов, С. Славова. Параметризация на множества. *Годишник на Висшия педагогически институт в Шумен, Природо-математически факултет*, **9Б** (1985), 59–77. [K. Slavov, S. Slavova. Parametrizatsiya na mnozhestva. *Godishnik na Visshiya pedagogicheski institut v Shumen, Prirodo-matematicheski fakultet*, **9B** (1985), 59–77] (in Bulgarian).

[56] К. Славов. Основни методи за решаване на задачи по алгебра. София, Народна просвета, 1967. [K. Slavov. Osnovni metodi za reshavane na zadachi po algebra. Sofiya, Narodna prosveta, 1967.] (in Bulgarian).

[57] С. Славова, К. Славов, Е. Йонова. Приложение на метода на параметризацията при съставяне на задачи от триъгълник (част първа), *Годишник на ШУ „Еп. Константин Преславски“, Факултет по следдипломна квалификация*, **16F** (2004), 50–65. [S. Slavova, K. Slavov, E. Yonova. Prilozhenie na metoda na parametrizatsiyata pri sastavyane na zadachi ot triagalnik (chast parva), *Godishnik na SHU „Ep. Konstantin Preslavski“, Fakultet po sleddiplomna kvalifikatsiya*, **16F** (2004), 50–65] (in Bulgarian).

[58] С. Славова, К. Славов, Е. Йонова. Приложение на метода на параметризацията при съставяне на задачи от триъгълник (част втора), *Годишник на ШУ „Еп. Константин Преславски“, Факултет по следдипломна квалификация*, **16F** (2004), 66–78. [S. Slavova, K. Slavov, E. Yonova. Prilozhenie na metoda na parametrizatsiyata pri sastavyane na zadachi ot triagalnik (chast vtora), *Godishnik na SHU „Ep. Konstantin Preslavski“, Fakultet po sleddiplomna kvalifikatsiya*, **16F** (2004), 66–78] (in Bulgarian).

[59] А. Столяр. Логическое введение в математику. Минск, Вышэйшая школа, 1971. [A. Stolyar. Logicheskoe vvedenie v matematiku. Minsk, Vaysheyshaya shkola, 1971] (in Russian).

[60] В. Тараненко. В помощь составителям задач по теме „Площадь треугольника“, *Математика в школе*, **3** (1993), 20 – 22. [V. Taranenko. V pomoshty sostavitelyam zadach po teme „Ploshtady treugolynika“, *Matematika v shkole*, **3** (1993), 20–22] (in Russian).

[61] Г. Токмазов. Задачи динамического характера, *Математика в школе*, **5** (1994) 9–12. [G. Tokmazov. Zadachi dinamicheskogo haraktera, *Matematika v shkole*, **5** (1994) 9–12.] (in Russian).

[62] Р. Трашлиев. Задачата: психолого-педагогически проблеми. София, Министерство на народната просвета, 1989. [R. Trashliev. Zadachata: psihologo-pedagogicheski problemi. Sofiya, Ministerstvo na narodnata prosveta, 1989] (in Bulgarian).

[63] Н. Филоненко. Тема „Решение треугольников“ в IX классе, *Математика в школе*, **1** (2004), 4–6. [N. Filonenko. Tema „Reshenie treugolynikov“ v IX klasse, *Matematika v shkole*, **1** (2004), 4–6] (in Russian).

[64] Н. Четверухин, Л. Яцкевич, Параметризация и ее применение в геометрии, *Математика в школе*, **5** (1963), 15–23. [N. Chetveruhin, L. Yatskevich, Parametrizatsiya i ee primenenie v geometrii, *Matematika v shkole*, **5** (1963), 15–23] (in Russian).

[65] И. Шаригин. Как се раждат задачите?, *Обучението по математика и информатика*, **35**, № 5 (1992), 7–12. [I. Sharigin. Kak se razhdat zadachite?, *Obuchenieto po matematika i informatika*, **35**, № 5 (1992), 7–12] (in Bulgarian).

[66] И. Шаригин. Как се раждат задачите?, *Обучението по математика и информатика*, **35**, № 6 (1992), 7–14. [I. Sharigin. Kak se razhdat zadachite?, *Obuchenieto po matematika i informatika*, **35**, № 6 (1992), 7–14] (in Bulgarian).

[67] П. Эрдниев. О методе обратных задач, *Математика в школе*, **1** (1970), 40–42. [P. Erdniev. O metode obratnayh zadach, *Matematika v shkole*, **1** (1970), 40–42] (in Russian).

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

OPPORTUNITIES OF THE ASTRONOMICAL OBSERVATORY AT THE ASTRONOMICAL CENTER OF UNIVERSITY OF SHUMEN FOR STEAM EDUCATION

Dragomir Marchev[1], **Albena Ivanova-Nedelcheva**[2], **Nataliya Pavlova**[3]

[1]University of Shumen, Faculty of Natural Sciences,
[2]Sava Dobroplodni Secondary School, Shumen,
[3]University of Shumen, Faculty of Mathematics and Computer Science
emails: [1]d.marchev@shu.bg, [2]albena.ivanova-nedelcheva@edu.mon.bg, [3]n.pavlova@shu.bg

This article presents the capabilities of the Astronomical Observatory at the Astronomical Center of the Shumen University „Bishop Konstantin Preslavsky“ to conduct interdisciplinary classes with students of different age groups and with different interests in the field of mathematics and natural sciences. The equipment and facilities as described and methodological possibilities for the use of this scientific research and educational complex by students and teachers are given.

Keywords: mathematics, natural sciences, interdisciplinarity, observatory, planetarium

ВЪЗМОЖНОСТИ НА АСТРОНОМИЧЕСКАТА ОБСЕРВАТОРИЯ КЪМ АСТРОНОМИЧЕСКИЯ ЦЕНТЪР НА ШУМЕНСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ ЗА STEAM-ОБУЧЕНИЕ

Драгомир Марчев[1], **Албена Иванова-Неделчева**[2], **Наталия Павлова**[3]

[1]ШУ „Епископ Константин Преславски“, Факултет по природни науки,
[2]СУ „Сава Доброплодни“, Шумен,
[3]ШУ „Епископ Константин Преславски“, Факултет по математика и информатика
emails: [1]d.marchev@shu.bg, [2]albena.ivanova-nedelcheva@edu.mon.bg, [3]n.pavlova@shu.bg

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.143-149

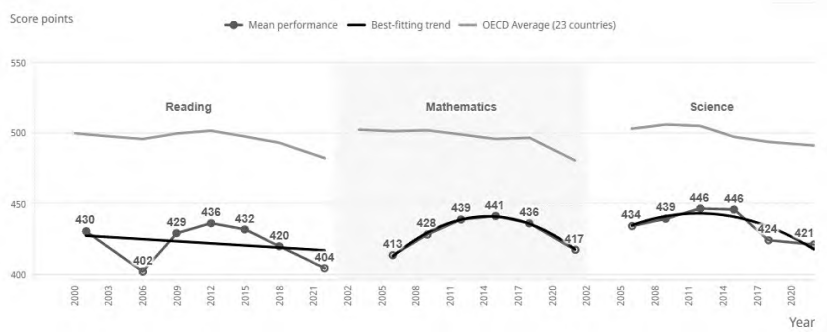
2020 Mathematics Subject Classification: 97B10, 97C70, 85-10.

В дадената статия се представят възможностите на Астрономическата обсерватория към Астрономическия център „Проф. дфмн Владимир Шкодров“ на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ (ШУ) за провеждане на интердисциплинарни занятия с ученици от различни възрастови групи и с различен интерес в областта на математиката и природните науки. Описана е материалната база и са дадени методически насоки за използване на този научноизследователски и образователен комплекс от ученици и учители.

Ключови думи: математика, природни науки, интердисциплинарност, обсерватория, планетариум

Въведение

Въпреки възможностите за професионална реализация на кадри с добра подготовка по математика и природни науки, интересът и достиженията на учениците в тези области спадат [3]. На фиг. 1 са представени резултатите от изследването PISA 2022, като България следва негативната световна тенденция. Глобален е и проблемът с недостига на учители по тези предмети [4]. Изводите от PISA сочат, че „Сингапур оглавява световната класация на достиженията по математика, следван от Макао (Китай), Китайски Тайпе, Хонконг (Китай), Япония и Корея. Докато общите нива на представяне спадат, някои образователни системи постигат напредък към преодоляване на разликата в постиженията“ [3]. Прави впечатление, че лидерите са съсредоточени в Азия.



Фигура 1. Тенденции в постиженията по математика, четене и природни науки за България [3]

Полагат се значителни усилия тези предмети да бъдат представени от практическа гледна точка, в унисон с компетентностния подход. Активно се създават STEM-центрове в цялата страна, като се проследява и възможността за надграждане на компетентностите на учителите да прилагат този подход. Все пак не трябва да се забравя, че наред с училищната среда е възможно да се използват и редица други образователни пространства и научни центрове при прилагане на обучение, извън училищната среда. В дадената статия ще представим някои технологични възможности и идеи за осъществяване на изнесено обучение с интердисциплинарен характер на територията на Астрономическата обсерватория (АО) в Шумен.

От 2016 година Шумен разполага с Астрономическа обсерватория. Сградата е разположена в природен парк „Шуменско плато“ в близост до емблематичния за Шумен и страната комплекс „Създателите на българската държава“, известен също като „1300 години България“. В близост са редица скални феномени, като „Охлюва“ и „Окото“. На по-малко от 6 км се намира и „Шуменската крепост“. Астрономическата обсерватория има статут на Научноизследователски и образователен комплекс на Шуменския университет [1]. На територията на обсерваторията има музей със старинни физични модели. От 1.11.2024 година на територията на обсерваторията действа и цифров Планетариум.

Удобното разположение и съчетанието на обекти с научна насоченост, културно-исторически и природни обекти, прави възможно обсерваторията да се използва за интердисциплинарно обучение.

Оборудване

Обсерваторията (Фиг.2) представлява модерно и удобно пространство за научна и образователна дейност. „Куполите и телескопите на Обсерваторията са разположени на покривната площадка на сградата. Сървърът за управление на телескопите се намира на втория етаж, в работния кабинет на астрономите. До него се намира учебна зала за теоретични и практически занятия по астрономия. На първия етаж има оборудвана конферентна зала с 20 места и изложбена зала с богата експозиция от старинни уреди и прибори по астрономия, физика, компютри, експозиция на минерали. Всички зали и кабинети в Обсерваторията разполагат със стенни монитори, климатици и компютри.“[1] Към днешна дата, благодарение на проекти като Регионален астрономически център за изследвания и образование (РАЦИО) и Създаване на мрежа от малки, дистанционно управляеми и роботизирани астрономически телескопи в България „SMARTNET“, обсерваторията разполага с два купола на фирмата ScopeDome (4 и 5,5-метров). Телескопите са 60 см Ричи-Кретиен телескоп ASA RC600, 40 см Шмит-Касегрен телескоп MEADE 16” LX200ACF, 15 см рефракторен телескоп Messier AR-152S, 40 мм слънчев телескоп Coronado, Hα, 1.0 A. Налична е допълнителна апаратура, като камери, филтри и др.[2]



Фигура 2. Астрономическата обсерватория на ШУ

[1] `https://astro.shu.bg/`

Планетариумът е разположен на първия етаж на обсерваторията. Той включва купол с диаметър 4,2 м и предлага 12 ергономични седящи места. Изображението се реализира чрез съвместяване на 4 проектора с 3D технология и картина с 4K качество на изображението. Не са необходими специални очила за прожекциите. Планетариумът е подходящ за ученици, тъй като те не попадат в ограничението за използване на съоръжението от деца под 7-годишна възраст. Към днешна дата са налични пет лицензирани и професионално озвучени на български език филма, като тенденцията е тази колекция да се допълва с нови научно-популярни филми. Тематиката засяга проучвания на Космоса от Земята, Луната, Слънцето, Галактиката, Вселената и Големия взрив.

Образователни възможности

Интересът към изнесеното обучение е висок, а в съчетание с подкрепящите програми на МОН се очаква да продължава да расте. Наличната база и кадрите, обслужващи Астрономическата обсерватория, дават възможност да се провеждат разнообразни образователни дейности с ученици от различни образователни етапи и с различен фокус в интересите. Основните възможности, приложими в изнесеното обучение, са:

- **Посещения:** провеждат се в обявеното работно време. Дават възможност да се разгледат експонатите на музея, арт-пространството и телескопите.
- **Наблюдения:** провеждат се след предварителна заявка, минимум десет дни преди посещението. Минималният брой участници е 10. Наблюденията се провеждат при ясно време и благоприятни метеорологични условия. При невъзможност да се проведат наблюдения, алтернатива е да се посети Планетариума, където може да бъде представена симулация на звездното небе в дадения момент.
- **Школи:** астрономическите школи, практикуми и обучения за ученици, студенти и младежи в извънкласни форми се организират по подадени заявки. Всяка заявка трябва да е с ясно определена научно-образователна насоченост и предварително изготвена програма. В зависимост от възрастта и желанието на групата са предвидени нощни наблюдения. При по-малки ученици са възможни реални дневни наблюдения на Слънцето и симулации в Планетариума. Представянето се води от професионални астрономи.
- **STEAM-пространство:** Астрономическата обсерватория може да предложи условия за провеждане на интердисциплинарни занятия, планирани и провеждани от учителите на съответните групи, с консултиране от професионален астроном.
- **Арт-пространства:** Астрономическата обсерватория предлага пространство (Фиг. 3), в което могат да бъдат създавани и излагани арт-обекти.

В зависимост от идеите на учителите, дадените възможности могат да се използват гъвкаво във времето, като е възможно да се съчетават. За по-малките ученици, например, е удачно да се планира краткосрочно наблюдение на Слънцето, запознаване с историята на измервателните уреди и прожекция в Планетариума, да се



Фигура 3. Музей и арт-пространство

подчертае приложимостта на математиката в астрономията. За по-големи ученици с интерес към математиката и природните науки е възможно планиране на школа с тематична насоченост, която да протече в рамките на една или няколко нощи. При реализация на интердисциплинарен урок, учителят следва предварително да се запознае с оборудването и възможностите на обсерваторията, при необходимост да се запознае с други природни и/или културно-исторически обекти в близост до сградата на обсерваторията и да планира урока. Планът следва да се консултира предварително с астроном от екипа, относно възможностите да бъде реализиран.

При ученици с интереси и дарби в областта на изкуствата е възможно запознаването с природо-математическа информация да се обвърже с творческа изява. Например, след прожекция на филм в Планетариума, да се обсъди течението „Спейс Арт", появило се в средата на миналия век. Посещението може да е повод за арт-изява – рисуване, моделиране, композиране и т.н., вдъхновена от видяното и получената информация. Базата може да предложи пространство за представяне и изложение на творческите продукти.

Методи

Като ключови методи, които можем да използваме при работа в астрономическа обсерватория и планетариум можем да отбележим:

- проектния метод, с акцент върху междупредметните изследователски задачи.
- практически работилници, изясняващи ролята на математиката в провежданите дейности.
- интерактивни методи на обучение – използване на виртуални симулатори, VR и AR технологии за представяне на космоса и астрономическите явления.

Примери

За да улесним потребителите, ще дадем няколко примера за използването на базата на обсерваторията, при провеждане на интердисциплинарни занятия с ученици.

STEAM-занятие

Тема: Фази на Луната и тяхното изобразяване чрез геометрични фигури

Клас: 5 – 7 клас. Подходящ е за всички ученици.

Основна идея: Учениците се запознават (теоретично и наблюдателно) с фазите на Луната. С помощта на придобитите знания за кръгове, дъги и ъгли, моделират фазите на луната. Включват творчески елемент при създаване на рисунка на лунните фази.

Школа

Тема: Ловци на астероиди

Клас: 7 – 12 клас. Подходящ е за ученици с интерес към природо-математическите дисциплини.

Основна идея: Учениците да намират самостоятелно астероиди. „Международно сътрудничество за астрономически изследвания“ (IASC) е научна програма, ориентирана към обикновените хора. Тя предоставя висококачествени астрономически изображения на ученици от целия свят, като им дава възможност да направят оригинални открития в областта на астрономията, тази интересна и завладяваща наука.”[2]

Арт-пространства

Тема: Големият взрив

Клас: Подходящ е за всички ученици.

Основна идея: Учениците наблюдават прожекция в Планетариума за Големия взрив, след което имат възможност за арт-изява по избор, вдъхновена от впечатленията от филма и получената от професионален астроном информация.

Игра

Тема: Скритите съзвездия

Клас: Подходяща е за всички ученици.

Основна идея: Играта се провежда в планетариум със симулатор на звездното небе (Stelarium) и включва елементи на търсене и ориентиране по звездното небе. Учениците могат да работят индивидуално или в отбори. Те трябва да намерят конкретни съзвездия, като използват подсказки и решават малки предизвикателства. В края на играта ще бъде обсъдено всяко съзвездие, което са „открили“ учениците, като се допълнят интересни факти за него.

Предложените примери са фокусирани основно върху базата на Астрономическата обсерватория, но при желание на учителя, те могат да бъдат обогатени с впечатления и информация от обектите, намиращи се в непосредствена близост до сградата на обсерваторията.

Популяризация

За 2024 година на посещение в АО са преминали над 180 ученици. От откриването на Планетариума за два месеца са преминали над 250 посетители, като повечето са ученици. През следващата година очакваме засилване на интереса и включване на повече организирани от учителите групи за реализиране на изнесени уроци.

Информация за възможностите за използване на АО се разпространява чрез медиите; използване на разнообразни рекламни материали; инициативи, като „Дни на отворените врати“; представяне на форуми и др.

[2] `https://www.schoolofthefuture.eu/bg/osos/project/na-lov-za-asteroidi`

Сайтът на Центъра (https://astro.shu.bg/observatory/) в момента се обновява. В новата версия ще бъдат описани подробно представените в доклада възможности за използване на АО с образователна цел. Налична е и група във Facebook – https://www.facebook.com/ShumenAstronomicalObservatory.

Работното време на АО е сряда – петък от 14:00 до 22:00 ч, събота и неделя от 11:00 до 19:00 ч. Начални часове на прожекциите в Планетариума са съответно: сряда – петък от 15:00 ч., 17:00 ч., 19:00 ч., а събота и неделя от 12:00 ч., 14:00 ч., 16:00 ч., 18:00 ч. Понеделник и вторник са почивни дни. Координати на екипа могат да бъдат намерени в сайта https://astro.shu.bg/observatory/index_files/Page1089.htm.

Заключение

Представените идеи могат да се обогатят и допълнят от учителите-новатори. Оборудването на обсерваторията се обогатява постоянно и дава възможност за генериране на нови идеи за използване с научна и образователна цел. Благоприятните условия на местността, културно-историческото богатство на региона и съвременната база на обсерваторията предразполагат към успешното представяне на иначе трудните предмети от областта на математиката и природните науки, като приложими и ценни инструменти в посока на разбирането на нашия свят.

Благодарности

Тази статия е разработена в рамките на проектите РАЦИО към ФНИ на МОН и Фонд научни изследвания на ШУ за 2025 г.

Литература

[1] KJURKCHIEVA, D. The Astronomical Observatory in Shumen, *Astronomical Calendar 2018*, (2017), p.87-94. https://nao-rozhen.org/astrocalendar/2018/Astronomical_calendar_2018.pdf

[2] KJURKCHIEVA, D., MARCHEV, D, BORISOV, B., IBRYAMOV, S., DIMITROV, D., POPOV, V., MILEV, AL., PETROV, N., The 40 cm remote-controlled telescope Meade LX200ACF of the Shumen Astronomical Observatory, *Bulgarian Astronomical Journal*, vol.32, (2020), pp. 113-122. https://astro.bas.bg/AIJ/issues/n32/DKjurkchieva_2.pdf

[3] PISA 2022 Results (Volume I and II) - Country Notes: Bulgaria, https://www.oecd.org/en/publications/pisa-2022-results-volume-i-and-ii-country-notes_ed6fbcc5-en/bulgaria_29d65f4b-en.html

[4] RICE, S., WATT, H., RICHARDSON, P., CREBBIN, S. Interest in science and mathematics teaching among non-science/mathematics initial teacher education candidates. *Educational Review*, (2024) 1–23. doi.org/10.1080/00131911.2024.2379418

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

APPLICATION OF PROJECT-BASED LEARNING WITH GAMIFICATION USING STEM CARDS

Sevinch Mustan
Episkop Konstantin Preslavsky University of Shumen, Faculty of Mathematics and Informatics, Department of Algebra and Geometry
e-mail: s.mustan@shu.bg

In modern education, we are increasingly talking about STEM learning and its application in the classroom. Traditional methods are giving way to innovative and interactive approaches. These new methods and approaches attract more students' attention and motivate them for active learning. One such popular approach is gamification. It is based on the use of game elements to achieve various educational goals. Cards with different content are often used in practice. STEM Challenge Cards are an innovative method integrating the core disciplines of science, technology, engineering, and math that underpin STEM learning into challenges that can be fun and engaging for students. One of the important points is that students have the freedom to experiment with different components and devices. The article presents one method that can be used in STEM education classes. This is gamification through the use of STEM challenge cards.

Keywords: science, technology, STEM education, STEM technology, STEM challenges, STEM cards, challenge cards.

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПРОЕКТНО-БАЗИРАНО ОБУЧЕНИЕ С ИГРОВИЗАЦИЯ ЧРЕЗ ИЗПОЛЗВАНЕ НА STEM КАРТИ

Севинч Мустан
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“, Факултет по математика и информатика, Катедра Алгебра и геометрия
e-mail: s.mustan@shu.bg

В съвременното образование все повече говорим за STEM обучение и за неговото приложение в учебните часове. Традиционните методи отстъпват място на иновативните и интерактивни подходи. Тези нови методи и подходи привличат повече

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.150-157

* Тази статия е подкрепена от Националната програма „Млади учени и постдокторанти-2“, Етап 2 и от Фонд научни изследвания 2025 г.

2020 Mathematics Subject Classification: 97B10, 97B40, 97B50.

вниманието на учениците и ги мотивират за активно учене. Един популярен такъв подход е игровизацията. Тя се базира на използването на игрови елементи за постигането на различни образователни цели. Често в практиката се използват карти с различно съдържание. STEM картите с предизвикателства са иновативен метод, който интегрира основните дисциплини наука, технологии, инженерство и математика, на които се базира STEM обучението, в предизвикателства, които могат да бъдат забавни и интересни за учениците. Един от важните моменти е, че учениците имат свободата да експериментират с различни компоненти и устройства. Статията представя един метод, който може да се използва в часовете по STEM обучение. Това е игровизацията чрез използването на STEM карти с предизвикателства.

Ключови думи: наука, технологии, STEM обучение, STEM технологии, STEM предизвикателства, STEM карти, карти предизвикателство

Какво е STEM обучение?

През последните години основен акцент в образованието е STEM обучението, който „не е нов подход“ [14], но набира все по-голяма популярност. „Абревиатурата на STEM означава Science, Technology, Engineering and Mathematics (наука, технологии, инженерство и математика)“ [7]. Това са четирите основни дисциплини, на които се базира STEM обучението.

„STEM обучението е мултидисциплинарен подход, в който четири различни дисциплини се учат заедно, вместо поотделно“ [12]. Той е подход, базиращ се на проектното обучение, който е „метод на преподаване, при който учениците се учат чрез активно участие в реални проекти от различни раздели, обединявайки своите знания по различни теми и борейки се с разрешаването на проблеми от реални ситуации“ [1]. В центъра на това обучение е ученикът, който се поставя пред различни предизвикателства и трябва да намери решение за даден проблем. „Тези задачи често са многокомпонентни проекти, за изпълнението на които се прилагат знания и умения от различни области на обучение“ [8]. Такова обучение дава възможност да се развият редица качества у учениците. Например, насърчава тяхното творчество; развива умения за справяне с проблеми; развиване на аналитичното и логическото мислене; развиване на критичното мислене; развива уменията им за работа в екип и др. Правилното поставяне на задачата предизвикателство и нейното решение е от голямо значение, тъй като това показва на учениците приложението на знанията от училище, подготвя ги и ги мотивира за решаване на бъдещи проблеми.

С използването на STEM подхода в учебните часове, учениците имат възможността по-ясно да разберат взаимовръзката на изучаваното по различните учебни предмети с реалния свят. А за да бъде тази практика успешна, учителите трябва да са достатъчно подготвени. От една страна преподаването по STEM определено е предизвикателство за голяма част от учителите, тъй като те не притежават нужните знания и опит по различните предмети, както и нужните умения за работа с програмируемите устройства и платформи. От друга страна липсата на достатъчна литература на български език също ги затруднява при изготвянето на учебни материали. „През последните няколко години в България започна да се говори за изграждането на STEM кабинети, финансирани по проекти от Министерството на

образованието и науката, и внедряването на STEM обучението в българското училище“ [4]. Изграждането на STEM центровете, донякъде ще разреши този проблем. Това много ще улесни работата на учителите, тъй като използвайки тази среда, те ще могат да развият своите умения, а после и на своите ученици. Някои училища вече разполагат с такива и са оборудвани с различни образователни ресурси според възможностите на училището. Други все още не разполагат с такива.

Благодарение на различните платформи и социални мрежи учителите имат възможността да споделят свои открити уроци, да ги коментират и да обсъждат резултатите с други свои колеги. Така те могат да измислят нови идеи за STEM уроци. За изготвянето може да се използва всякаква комбинация от предмети, но „предметът Информационни технологии се оказва в центъра на успешното интердисциплинарно обучение“ [11]. „Използвайки възможностите на съвременните информационни и комуникационни технологии (ИКТ), всеки учител би могъл да направи учебния час по-интересен и атрактивен“ [4].

Карти със STEM предизвикателства

„В практиката си учителите използват различни видове карти за дейности“ [9], с които учениците изучават нов материал или се упражняват. Те са допълнително средство за работата в класа, с помощта на които учениците активно се включват в различни дейности свързани с учебния материал. А за тази цел те използват съвременни компютърни технологии. Според С. Стефанов, видовете карти, които се използват в обучението, са карти за индивидуално учене и справки; с предизвикателства; с факти; с добавена реалност; флаш карти; със задачи; ПЕКС карти; триъгълни; за самопроверка; със защипване; с отговори; QR карти с въпроси и отговори; със съвпадение; DOBBLE карти; за бинго/лото; карти Tarsia; карти Дуел; с въпроси и подсказки; мисловни и др. [9]. Те могат да бъдат използвани по време на учебните часове в различните етапи на обучение, като с тях могат да бъдат постигнати различни образователни цели. Игровизацията с такива карти повишава мотивацията на учениците, помага за по-лесното възприемане на дадената информация, развива уменията им за работа в екип, както и творческите им умения, уменията им за изработване на правила и за задаване на въпроси.

Някои примери за практически приложения на подобни образователни карти в учебния процес:

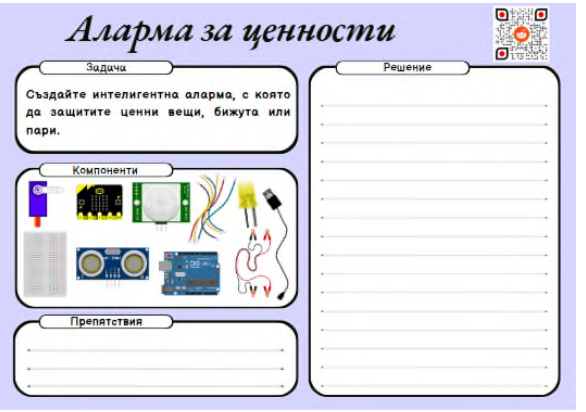
- Мисловни карти, създадени и използвани в часовете по литература в 7. клас в СУ „Васил Левски“, гр. Ардино [2]. Учениците заедно с учителя създават мисловна карта върху биографията на Иван Вазов. Преди предстоящия преговор върху творчеството на Иван Вазов, учениците отново изработват мисловни карти, като този път са разделени на групи. Едната група създава мисловна карта, която представя информация за повестта „Немили-Недраги“, а другата група – за творбите на Иван Вазов. Картите, създадени под такава форма, успешно се прилагат за усвояване на различни компетентности, които са заложени в учебната програма по литература за 7. клас, за преговор и за обобщение на знания;

- Използване на мисловни карти в часовете по математика в 5. клас в ОУ „Геор-

ги Стойков Раковски“, с. Оризаре [5]. В темата „Обем на куб. Мерни единици за обем“ в 5. клас, учителят използва метода на мисловната карта, като след запознаването на учениците с урока и решаването на различни задачи, те изготвят мисловна карта върху обема на куб;

- Използване на флаш карти в мултидисциплинарен урок в 10 клас, който съчетава предметите български език и литература, информационни технологии и икономика [13]. Учениците изработват флаш карти, в часовете по информационни технологии, с езикови правила и норми и текстове за извличане на информация за прилики и разлики между трудов договор и граждански договор, и ги прилагат в часовете по български език и литература. Часът продължава с ролева игра, където учениците се запознават с повече подробности за общите условия на труд и упражняват различни стилове на комуникация.

Картите със STEM предизвикателства, които са представени в статията, са авторски, изработени от автора с помощта на графичния редактор *Canva* [3]. Тези карти са интересни, тъй като представят дадена задача или даден проблем под формата на предизвикателство и привличат интереса на учениците, както от прогимназиален, така и от гимназиален етап.



Фигура 1: Карта със STEM предизвикателство

Учениците могат да достигнат до решение на дадения проблем, като експериментират с различни образователни устройства и прилагат знания по различните изучавани предмети.

Картите включват „Задача“, „Компоненти“, „Препятствия“, „Решение“ и QR код, който може да се сканира с мобилно устройство (Фигура 1). Не е задължително използването на всички компоненти.

Може да се използват и само част от тях, като това ще е и друго предизвикателство за учениците – да открият кои компоненти да използват, както и да покажат своята изобретателност. В „Препятствия“ могат да се опишат срещнатите трудности или проблеми с дадения проект. В „Решение“ учениците трябва да опишат етапите, които трябва да бъдат изпълнени, за да се създаде проектът.

След сканиране на QR кода, ще се отвори файл, създаден с графичния редактор *Canva*, който представя част от сензорите, които могат да се използват с платките *Micro:bit* [6] и *Arduino* [10], с кратко описание към тях (Фигура 2). По този начин учениците ще са сигурни, че използват правилните компоненти.

Могат да се представят най-различни идеи за проекти, които в по-късен етап могат да се усъвършенстват и допълват. Създадените по-малки проекти могат да се включат в някой по-голям проект. Така учениците ще могат да работят на групи

за изпълнението на по-малките проекти, след което заедно да ги обединят в нещо по-голямо.

Приложение на STEM картите в обучението

На този етап, заедно със студентите от ШУ „Епископ Константин Преславски“, които са 4 курс, редовна форма на обучение, от специалностите *Информационни технологии в икономиката*, *Информационни технологии, информатика и математика*, *Компютърна информатика* и *Компютърни информационни технологии*, се разработват STEM уроци, в които използваме картите със STEM предизвикателства. Това се случва в рамките на семинарните и лабораторните упражнения по дисциплината *Методика на обучението по информатика и информационни технологии*. Студентите изнасят готовите уроци пред колегите си и пред преподавателя в рамките на занятията. Така те разменят идеи, с които усъвършенстват своите проекти след това.



Фигура 2: Компоненти за Micro:bit и Arduino

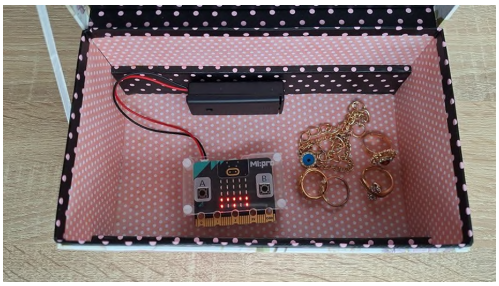
Планира се реализирането на уроците да бъде по време на стажантската практика, където картите ще бъдат представени на ученици в прогимназиален етап и те ще трябва да намерят решения на дадените предизвикателства, като приложат вече придобити знания и умения. Резултатите, както и реализираните уроци, ще бъдат описани в следваща статия.

Използването на картите с предизвикателства ще привлече вниманието на учениците и ще ги мотивира за решаването на различни проблеми, тъй като те са пряко свързани с реалния свят. А това, от друга страна, ще ги подготви и за бъдещи ситуации, защото те вече ще са намерили решение на този проблем или ще са били в подобна ситуация.

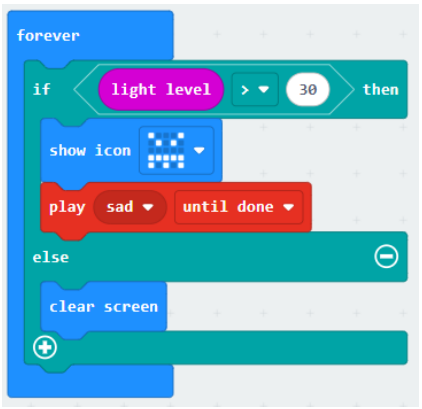
Представям и някои примерни проекти, които могат да бъдат реализирани със STEM картите:

1) ***Аларма за ценности***“ – идеята на проекта е да се създаде аларма, която да ни известява при откраднати вещи. Необходимите компоненти за създаването на проекта са платка *Micro:bit* и батерия или USB преходник (Фигура 3). Кодът на проекта се пише в платформата *Makecode* [8] (Фигура 4).

Програмата използва LED дисплея на платката като сензор за светлина. След написването на кода, платката се поставя в кутия, където са ценните вещи, които



Фигура 3: Изпълнен проект



Фигура 4:Код на проекта в MakeCode

искаме да се пазят. Програмата използва безкраен цикъл и когато се отвори кутията, сензорът за светлина открива промяна в нивото на осветеност, показва гневно лице на дисплея и се задейства алармата, в противен случай се изчиства екрана.

За изпълнението на проекта учениците трябва да приложат знания и умения, които са придобили при изучаване на различни предмети, като:

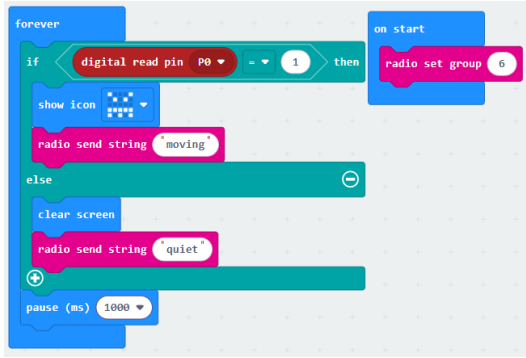
- *Компютърно моделиране и информационни технологии* – използването на блокова среда или текстово програмиране, за създаването на кода на проекта;
- *Физика и астрономия* – работа с различните сензори (например за движение, за звук, светлина) и други електронни компоненти, които ще използват при създаването проекта;
- *Технологии и предприемачество* – съчетаване на приложението на проекта с концепциите на предприемачеството;
- *Математика* – извършване на изчисления и създаване на логически конструкции.

2) „***Сигурност за дома***“ – идеята на проекта е да се създаде аларма, която да ни известява при наличие на движение от чуждо лице. Примерно изпълнение на проекта може да бъде със следните компоненти: две платки *Micro:bit,* сензор за близост с инфрачервен светодиод и инфрачервен фотодиод, и две батерии (Фигура 5). Кодът на проекта се пише в платформата *Makecode*. Тъй като се използват две платки, се пишат два кода. Едната платка играе ролята на предавател, а другата на приемник (Фигура 6).

В безкраен цикъл програмата проверява за наличие на движение и това се случва всяка секунда. Когато сензорът отчете някакво движение, в дисплея на платката (предавател) се показва иконка на ядосано човече и изпраща радио съобщение „движение“ към другата платка (приемник). Другата платка щом приеме съобщението,



Фигура 5: Изпълнен проект



Фигура 6: Код за Micro:bit 1

показва на дисплея иконка на човече и издава звуков сигнал за наличие на движение. В противен случай първият *Micro:bit* изпраща радио съобщение „тихо“ на другия и изчакват.

За изпълнението на проекта учениците трябва да приложат знания и умения, които са придобили при изучаване на различни предмети, като:

- *Компютърно моделиране и информационни технологии* – използването на блокова среда или текстово програмиране, за създаването на кода на проекта, с който да управляват алармата;
- *Физика и астрономия* – работа с различните сензори (например за движение, за звук, светлина) и други електронни компоненти, които ще използват при създаването на проекта;
- *Технологии и предприемачество* – създава се продукт, който може да намери приложение в реални ситуации;
- *Математика* – извършване на изчисления и създаване на логически конструкции за създаването на алармената система.

И двата проекта могат да се усъвършенстват и да се включат към по-цялостен проект „Умен дом“.

Заключение

Смятаме, че използването на карти със STEM предизвикателства в учебните часове ще даде възможност на учениците по-активно да се включват в учебните часове, тъй като те могат свободно да представят свои идеи за решението на дадено предизвикателство и да експериментират, за да стигнат до по-практично решение. Благодарение на този метод изучаването на учебния материал ще стане по-лесно и учениците по-лесно могат да го възприемат.

В последните години все повече говорим за STEM обучението и неговото място в обучението. Нуждата от подобни иновативни методи в учебните процеси се засилва. Внедряването на STEM картите в учебния процес не само ще го обогати, но и ще

го разнообрази. Ще развие личностните и професионални качества на обучаемите и ще ги подготви за успешно реализиране в бъдещите STEM професии.

Литература

[1] A. Chistyakov, S. Zhdanov, E. Avdeeva, E. Dyadichenko, M. Kunitsya, R. Yagudina. Exploring the characteristics and effectiveness of project-based learning for science and STEAM education, *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2023, doi.org/10.29333/ejmste/13128

[2] R. Cholakova. Use of mind maps in class VII Literature teaching, *Education and Development*, 2022, Issue 10, ISSN 2603-3577.

[3] K. Deford, Ch. Curtis, D. Fitzpatrick, S. Hill, H. Johnson. Technology Canva: A practical, accessible graphic design tool, *Marketing Libraries Journal*, vol. 1, issue 1, Fall 2017, p. 26-29.

[4] Kr. Harizanov, S. Georgieva. Active training methods in billings children, MATTEX 2018, Conference proceedings Vol.1, (2018), pp. 251-256, ISSN: 1314-3921.

[5] I. Ivanova. Application of interactive methods – mind map method and multimedia presentation method in mathematics teaching in 5-th grade, *Contemporary Humanitaristics*, vol. 19, number 1, 2023, p. 82-91.

[6] T. Kieu, V. Nguyen, A. Nguyen. Micro: bit in Science Education: A Systematic Review, *Jurnal Penelitian dan Pembelajaran IPA JPPI* Vol.9, No.1, 2023, p. 1-14, p-ISSN 2477-1422 e-ISSN 2477-2038, DOI: 10.30870/jppi.v9i1.19491.

[7] D. Kozhuharova, M. Zhelyazkova. What is STEM education, *Pedagogical forum*, 3 (2021), pp. 19-28, ISSN: 1314-7986.

[8] S. Mustan. Platform Makecode in STEM education, MATTEX 2024, Conference proceedings, Vol.1 (2024), pp. 225-232, https://doi.org/10.46687/NMQL9706.

[9] S. Stefanov, Cards to help learning. *Pedagogical inovations*, 2024, p. 77-93.

[10] P. Tudela, J. Marin. Use of Arduino in Primary Education: A systematic Review, *Journal Education Science*, vol.13, Issue 2, 2023, doi.org/10.3390/educsci13020134.

[11] M. Uzunova, N. Pavlova. Interdisciplinary education realized in information technology through project based learning, Annual of Konstantin Preslavski University of Shumen, Vol.XXIC, pp. 65-78.

[12] https://advanceacademy.bg/blog/stem-obuchenie-kakvo-predstavlyava, visited on 04.12.2024

[13] https://prepodavame.bg/kak-da-sachetaem-chasovete-po-bel-i-informatsionni-tehnologii-s-prakticheski-znania-po-ikonomika/

[14] https://uchitel.bg/blog/stem-metodika/kakvo-trjabva-da-znaem-za-stem, visited on 08.01.2025

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

APPLICATION OF COMPOSITION OF DILATIONS AND DILATION FROM POINT (BOUTIN'S THEOREMS)

Julia Ninova
Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University "St. Kliment Ohridksi",
Sofia, Bulgaria
e-mail: ninova@fmi.uni-sofia.bg

The article examines the application of composition of dilations from point and dilation from point in proving some statements.

Keywords: dilation from point, composition of dilations from point, Boutin's theorems

ПРИЛОЖЕНИЕ НА КОМПОЗИЦИЯ НА ХОМОТЕТИИ И НА ХОМОТЕТИЯ (ТЕОРЕМИ НА БУТЕН)

Юлия Нинова
Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски", София, България
e-mail: ninova@fmi.uni-sofia.bg

В статията се разглежда приложение на композиция на хомотетии и на хомотетия за доказване на някои твърдения.

Ключови думи: хомотетия, композиция на хомотетии, теореми на Бутен

Кратки сведения за Boutin

М. А. Бутен, професор по математика, е роден в Париж през 1858 г. Той се присъединява към Математическото общество на Франция през 1885 г. и публикува в списание за елементарна математика от 1890 г.

История – начало

В сп. *Математика и информатика*, бр. 3, 1996, IV корица, като задача на броя е публикувано следното твърдение, свързано с името на Бутен.

Теорема на Бутен 1. *Нека A_0, B_0 и C_0 са хомотетичните образи на средите съответно на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ при хомотетия с център центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Да се докаже, че правите AA_0, BB_0 и CC_0 се пресичат в една точка, лежаща на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.*

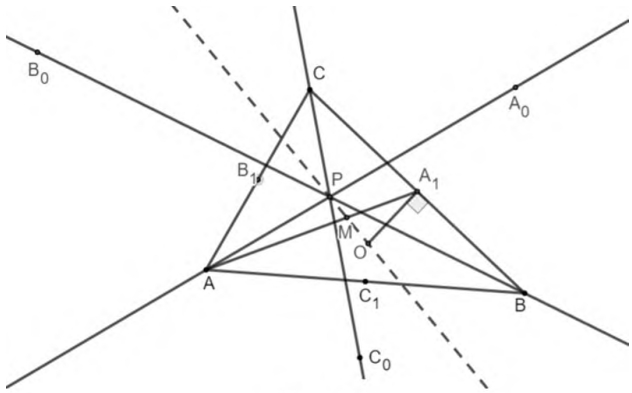
https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.158-166
2020 Mathematics Subject Classification: 97C99.

Решения и обобщение на разглежданата теорема са публикувани в [6] и [7]. Даденото по-долу доказателство на твърдението и в изложението, свързано с тази теорема, се използват следните две твърдения.

Твърдение 1. *Композицията на две хомотетии е хомотетия или транслация. Композицията е транслация* (*или идентитет*), *когато коефициентите на двете хомотетии са реципрочни числа. Ако композицията е хомотетия, то коефициентът ѝ е равен на произведението на коефициентите на дадените хомотетии, а трите центъра лежат на една права.* [5]

Твърдение 2. *Хомотетиите с общ център образуват група.* [4]

Доказателство на теорема на Бутен 1 Нека A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$, точката O е центърът на описаната около триъгълника окръжност, а точката M е медицентърът на триъгълника и $M \neq O$.



Черт. 1.

Според означенията на черт. 1, твърдението се доказва с използване на следната композиция от хомотетии:

$$(*)\qquad \begin{aligned} A &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} A_1 \xrightarrow{\chi_O^k} A_0 \\ B &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} B_1 \xrightarrow{\chi_O^k} B_0, \\ C &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} C_1 \xrightarrow{\chi_O^k} C_0 \end{aligned}$$

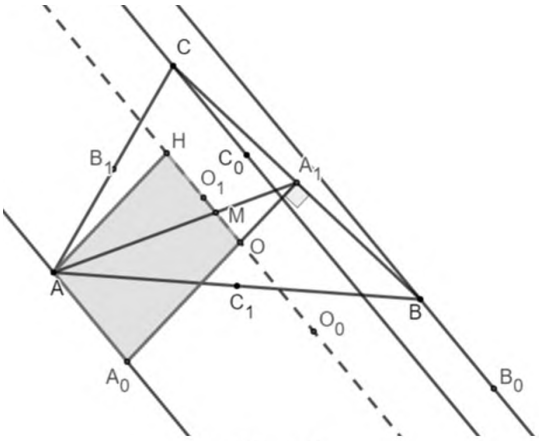
където $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ е хомотетия с център точката M и коефициент $-\dfrac{1}{2}$, а χ_O^k е хомотетия с център точката O и коефициент реално число $k \neq 0$. Според цитираното Твърдение 1, композицията на двете хомотетии е хомотетия, ако $k \neq -2$. Ако $k \neq -2$, то композицията на двете хомотетии е хомотетия с център точката $P = AA_0 \cap BB_0$ (черт. 1.) и тази точка според същото Твърдение 1 лежи на правата OM, т.е. на правата на Ойлер за $\triangle ABC$ (начертана на чертежа с пунктир). Правите AA_0, BB_0 и CC_0 се пресичат в точката P.

Ако $M \neq O$ и $k = -2$, то композицията на двете хомотетии е транслация. Според означенията на черт. 2, твърдението се доказва с използване на следната композиция от хомотетии:

$$A \xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} A_1 \xrightarrow{\chi_O^{-2}} A_0$$
$$B \xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}};} B_1 \xrightarrow{\chi_O^{-2}} B_0$$
$$C \xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}};} C_1 \xrightarrow{\chi_O^{-2}} C_0$$
$$O \xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}};} O_1 \xrightarrow{\chi_O^{-2}} O_0.$$

Тогава правите AA_0, BB_0 и CC_0 са успоредни помежду си и са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$, защото тя съвпада с правата OO_0 (черт. 2.).

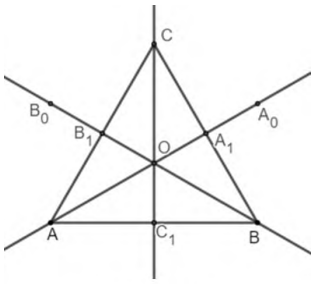
Успоредността на тези прави може да се докаже и по друг начин. Тъй като $OA_0 \perp BC$ и $AH \perp BC$ (точката H е ортоцентърът на $\triangle ABC$), то (1) $OA_0 \parallel AH$. Освен това (2) $OA_0 = 2OA_1 = AH$.



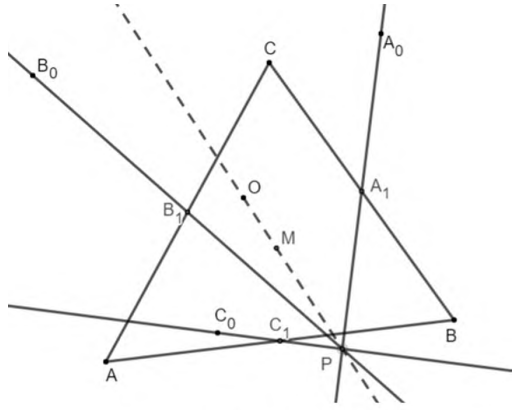
Черт. 2.

От (1) и (2) следва, че четириъгълникът AA_0OH (черт. 2.) е успоредник и тогава $AA_0 \parallel OH$. По аналогичен начин се доказва, че и правите BB_0 и CC_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

Ако $M \equiv O$ и $k \neq -2$, то композицията $\chi_O^k \circ \chi_M^{-\frac{1}{2}}$ е хомотетия с център точката M съгласно Твърдение 2. Правите, разглеждани в теоремата, минават през медицентъра на триъгълника (черт. 3.).



Черт. 3.



Черт. 4.

Ако $M \equiv O$ и $k = -2$, композицията е идентитетът.

В следващите разсъждения ще разгледаме следната задача.

Задача 1 *Точките A_0, B_0 и C_0 са образите на върховете на $\triangle ABC$ при симетрия относно произволна точка. Да се докаже, че правите A_1A_0, B_1B_0 и C_1C_0 се пресичат в една точка, където точките A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на*

страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$. (*неизвестен източник*)

Доказателство Според означенията на черт. 4. задача 1 се решава с използване на следната композиция от хомотетии:

$$(**)\qquad \begin{aligned} A_1 &\xrightarrow{\chi_M^{-2}} A \xrightarrow{\chi_O^{-1}} A_0 \\ B_1 &\xrightarrow{\chi_M^{-2}} B \xrightarrow{\chi_O^{-1}} B_0 \\ C_1 &\xrightarrow{\chi_M^{-2}} C \xrightarrow{\chi_O^{-1}} C_0, \end{aligned}$$

където точката M е медицентърът на $\triangle ABC$, а O е произволна точка от равнината на триъгълника. Централната симетрия с център точката O е записана като хомотетия с център точката O и коефициент -1. Ако точката O не съвпада с медицентъра M на $\triangle ABC$ (черт. 4.), то композицията на посочените две хомотетии е хомотетия с коефициент 2 и център точката P от правата OM. Следователно правите A_1A_0, B_1B_0 и C_1C_0 минават през точката P. Този извод може да се получи и от композицията на хомотетиите в (*), като се замени $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ с χ_M^{-2} и се разменят местата на върховете на триъгълника и съответните им среди на страните на триъгълника, а χ_O^k е заменена с χ_O^{-1}, само че в този случай точката O е центърът на описаната около триъгълника окръжност. По този начин, обаче, се ограничава общността на твърдението от задача 1. Ако точките O и M съвпадат, то тогава разглежданите в задачата прави минават през медицентъра на триъгълника (черт. 3.).

Теорема на Бутен 1 и Задача 1 дават идея за формулиране на две нови твърдения, във формулировката на които точката O е произволна точка от правата на Ойлер за съответния триъгълник, а централната симетрия от Задача 1 е заменена с хомотетия с коефициент произволно реално число $k \neq 0$.

Твърдение 3. *Нека A_0, B_0 и C_0 са хомотетичните образи на средите съответно на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ при хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$ и коефициент реалното число $k \neq 0$. (p) Да се докаже, че правите AA_0, BB_0 и CC_0 или се пресичат в една точка, лежаща на правата на Ойлер за $\triangle ABC$, или са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.(r)*

Коментар. При тази формулировка на Твърдение 3, в сравнение с даденото в теорема на Бутен 1, точката O принадлежи на безкрайно множество от точки – правата на Ойлер за $\triangle ABC$. В този смисъл Твърдение 3 се явява обобщение на Теорема на Бутен 1.

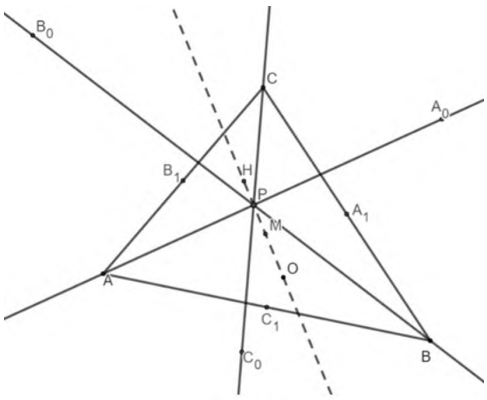
Доказателство. При направените означения логическата структура на Твърдение 3 е (i) $p \to r$.

Верността на твърдението следва от композицията на хомотетиите

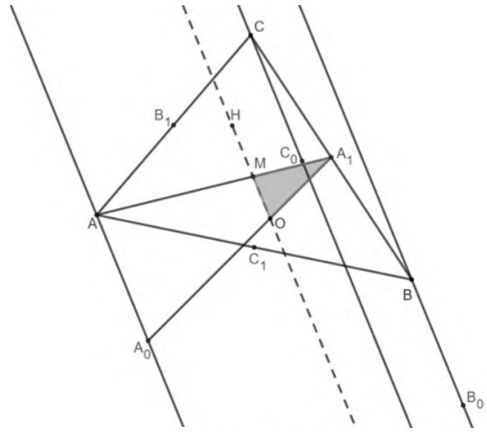
$$(***)\qquad \begin{aligned} A &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} A_1 \xrightarrow{\chi_O^k} A_0 \\ B &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} B_1 \xrightarrow{\chi_O^k} B_0 \\ C &\xrightarrow{\chi_M^{-\frac{1}{2}}} C_1 \xrightarrow{\chi_O^k} C_0, \end{aligned}$$

като χ_O^k е хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$. Ако $O \neq M$ и $k \neq -2$, то композицията на двете хомотетии е хомотетия с център точката $P = AA_0 \cap BB_0$ (черт. 5.) и тази точка според цитираното Твърдение 1 лежи на правата OM, т.е. на правата на Ойлер за $\triangle ABC$. Ако $k = -2$ и $O \neq M$,

то композицията на двете хомотетии е транслация. Правите AA_0, BB_0 и CC_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.



Черт. 5.



Черт. 6.

Това твърдение се доказва и по следния начин. Вярно е, че $\triangle A_1MO \sim \triangle A_1AA_0$ (черт. 6.), защото $\dfrac{A_1M}{A_1A} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{A_1O}{A_1A_0}$. Следователно $MO \parallel AA_0$. По аналогичен начин се доказва, че и правите BB_0 и CC_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$. Ако $O \equiv M$ и $k = -2$, композицията е идентитетът.

Верността на твърдението следва и от композицията на хомотетиите в (**), като се замени χ_M^{-2} с $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ и се разменят местата на средите на страните на триъгълника и на върховете му, а централната симетрия χ_O^{-1} се замени с хомотетия χ_O^k $(k \neq 0)$ с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

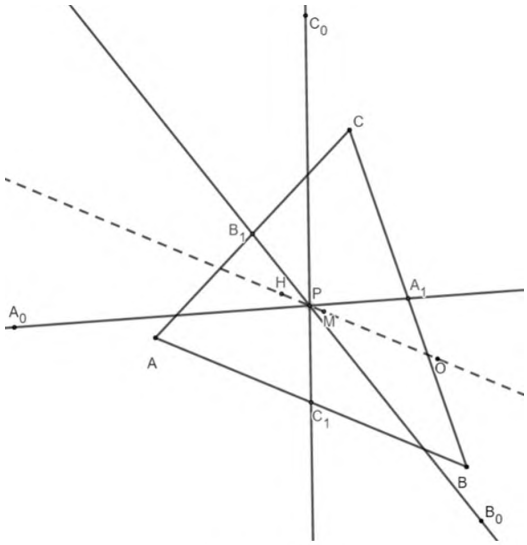
Твърдение 4. *Нека A_0, B_0 и C_0 са хомотетичните образи на върховете на $\triangle ABC$ при хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$ и коефициент реалното число $k \neq 0$. (q) Да се докаже, че правите, минаващи през точките A_0, B_0 и C_0 и средите A_1, B_1 и C_1 съответно на страните BC, CA и AB или се пресичат в една точка, лежаща на правата на Ойлер за $\triangle ABC$ или са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$. (r)*

Коментар. При тази формулировка на Твърдение 4, в сравнение с даденото в задача 1, позицията на точката O е ограничена до точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$. В този смисъл Твърдение 3 се явява следствие от задача 1.

Доказателство. При направените означения логическата структура на Твърдение 4 е (ii) $\quad q \to r$. Според означенията на черт. 7. твърдението се доказва с използване на следната композиция от хомотетии:

$$(****) \qquad \begin{aligned} A_1 &\xrightarrow{\chi_M^{-2}} A \xrightarrow{\chi_O^k} A_0 \\ B_1 &\xrightarrow{\chi_M^{-2}} B \xrightarrow{\chi_O^k} B_0 \\ C_1 &\xrightarrow{\chi_M^{-2}} C \xrightarrow{\chi_O^k} C_0. \end{aligned}$$

Ако $O \neq M$, композицията на двете хомотетии е хомотетия с коефициент $-2k$ при $k \neq -\frac{1}{2}$ и център точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$. В този случай правите A_1A_0, B_1B_0 и C_1C_0 се пресичат в една точка (точката P) от правата на Ойлер за $\triangle ABC$ (черт. 7.). Този извод може да се получи и от композицията на хомотетиите в (*), като се замени $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ с χ_M^{-2} и се разменят местата на средите на страните на триъгълника и на върховете му, а χ_O^k $(k \neq 0)$ е хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

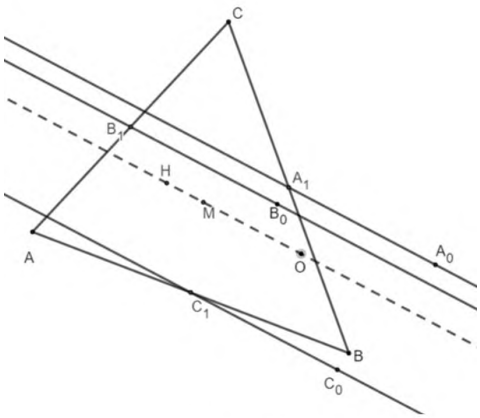


Черт. 7.

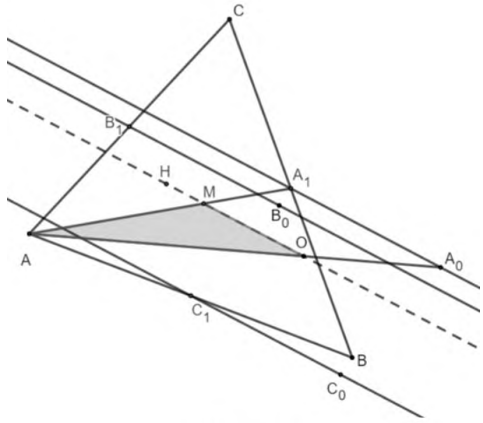
Композицията на двете хомотетии е транслация, ако $O \neq M$ и $k = -\frac{1}{2}$ (черт. 8.).

Тогава правите A_1A_0, B_1B_0 и C_1C_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

Това се доказва и по следния начин. Вярно е, че $\triangle AMO \sim \triangle AA_1A_0$ (черт. 9.), защото $\frac{AA_1}{AM} = \frac{3}{2} = \frac{AA_0}{AO}$. Следователно $MO \parallel A_1A_0$. По аналогичен начин се доказва, че и правите B_1B_0 и C_1C_0 са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.



Черт. 8.



Черт. 9.

Ако $O \equiv M$ и $k \neq -\frac{1}{2}$ правите A_1A_0, B_1B_0 и C_1C_0 минават през точка M. Ако $O \equiv M$ и $k = -\frac{1}{2}$ композицията е идентитетът.

Извод. Замяната на хомотетията $\chi_M^{-\frac{1}{2}}$ (точката M е медицентърът на $\triangle ABC$)

с обратната ѝ хомотетия χ_M^{-2} и смяната на образа и на първообраза дава възможност да се получат от сноповете прави, които се разглеждат в теорема на Бутен 1 и Твърдение 3, сноповете прави, които се разглеждат в задача 1 и Твърдение 4. Твърденията 3 и 4 са получени съответно от теорема на Бутен 1 и от задача 1, като точката O и в двата случая е заменена с произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

В логическите структури (i) и (ii) на двете твърдения заключението е означено с една и съща буква (r), защото се има предвид видът на сноповете прави. Еквивалентността (iii) $(p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow p \vee q \to r$ следва от твърденията (i) и (ii). Логическата структура на заключенията на тези твърдения е изключваща дизюнкция, защото правите от снопа или минават през една точка, или са успоредни помежду си. Еквивалентност(iii) дава възможност да се формулира следното твърдение.

Нека A_0, B_0 и C_0 са хомотетичните образи на върховете или на средитеA_1, B_1 и C_1 съответно на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ при хомотетия с център произволна точка от правата на Ойлер за $\triangle ABC$ и коефициент реалното число $k \neq 0$. Да се докаже, че трите прави, определени от образа и първообраза на посочените точки съответно при композициите от хомотетии (***) *или* (****)*, или се пресичат в една точка, лежаща на правата на Ойлер за $\triangle ABC$ или са успоредни на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.*

История – продължение

В [2], отпечатано в [1], се среща друго твърдение, свързано с името на М. Бутен.

Теорема на Бутен 2. *Три окръжности с центрове точките O_1, O_2 и O_3 се допират в точките A, B и C. Правите AC и BC пресичат окръжността с център O_1 съответно в точките E и F. Да се докаже, че правата EF минава през точката O_1 и $EF \parallel O_2O_3$.*

В [1] може да се намери доказателство на това твърдение. Тук ще предложим доказателство на твърдението с използване на хомотетия и базиращо се на следното твърдение.

Твърдение 6. *За всеки две неконцентрични нееднакви окръжности съществуват точно две хомотетии, които изобразяват едната окръжност в другата.* [3]

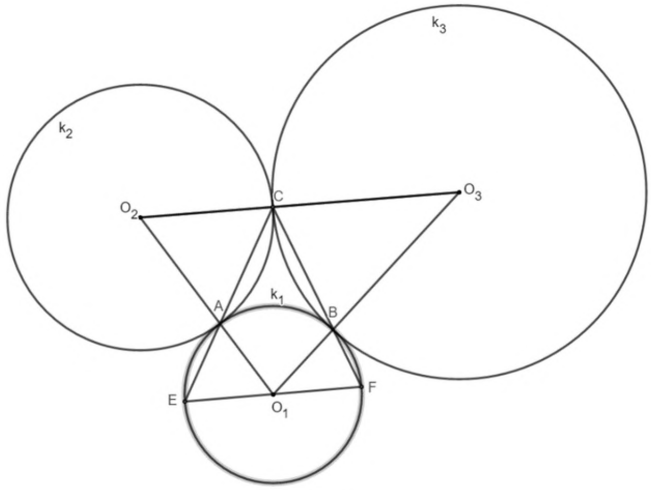
Ако двете окръжности са допиращи се, то допирната им точка е центърът на едната от двете хомотетии.

Доказателство на теорема на Бутен 2. Според Твърдение 6 съществува хомотетия с център точката A, при която окръжностите $k_2\,(O_2; r_2)$ и $k_1\,(O_1; r_1)$ се изобразяват една в друга. Нека $\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}$ е хомотетия с център точката A и коефициент $k_A = -\dfrac{r_1}{r_2}$ и $\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}\,(k_2) = k_1$ (черт. 10.).

Оттук следва, че $O_2 \xrightarrow{\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}} O_1$, $(CE) \xrightarrow{\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}} (CE)$,

$\left(\{C\} = k_2 \cap (CE) \xrightarrow{\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}} k_1 \cap (CE) = \{E\}\right)$ и (3) $(O_2C) \xrightarrow{\chi_A^{-\frac{r_1}{r_2}}} (O_1E)$.

От извод (3) следва, че (4) $(O_2C) \parallel (O_1E)$, защото правата (O_2C) не минава през центъра A на хомотетията. Аналогично, нека $\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}$ е хомотетия с център точката B



Черт. 10.

и коефициент $k_B = -\dfrac{r_1}{r_3}$, при която окръжностите $k_3\,(O_3; r_3)$ и $k_1\,(O_1; r_1)$ с изобразяват една в друга, т.е. $\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}(k_3) = k_1$ (черт. 10.). Оттук следва, че $O_3 \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} O_1$, $(CF) \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} (CF)$, $C \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} F$ $\left(\{C\} = k_3 \cap (CF) \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} k_1 \cap (CF) = \{F\}\right)$ и (5) $(O_3C) \xrightarrow{\chi_B^{-\frac{r_1}{r_3}}} (O_1F)$.

От извод (5) следва, че (6) $(O_3C) \parallel (O_1F)$, защото правата (O_3C) не минава през центъра B на хомотетията. От изводи (4) и (6) и транзитивността на релацията успоредност следва, че $(O_1E) \parallel (O_1F)$, т.е. трите точки E, F и O_1 лежат на една права, защото през точка O_1 минава единствена права, успоредна на правата (O_2O_3). Следователно$(EF) \parallel (O_2O_3)$.

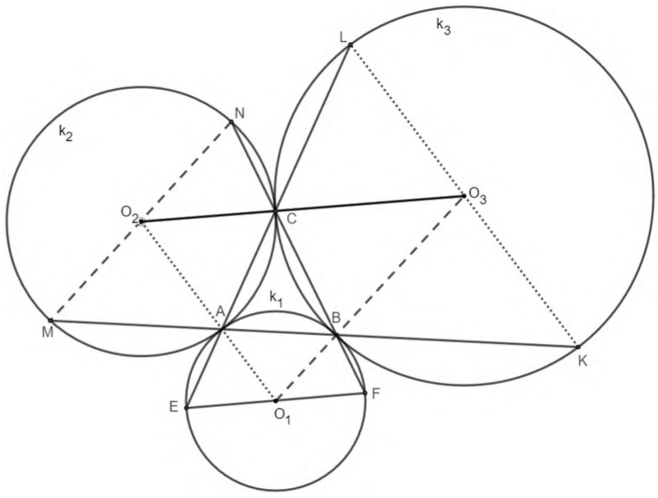
Забележка. В доказателството на последното твърдение с кръглите скоби се означава права, определена от посочените в скобите две точки.

Допълнителни изводи. На базата на доказаното твърдение следва, че $O_2O_3 = r_2 + r_3$, $EF = 2r_1$ и $O_2O_3 \parallel EF$. Ако по аналогичен начин се построят и отсечките MN и KL (черт. 11.), то $MN = 2r_2$ и $O_1O_3 \parallel MN$, и $KL = 2r_3$, и $O_1O_2 \parallel KL$. От тези изводи следва, че страните на $\triangle O_1O_2O_3$ са съответно успоредни на отсечките EF, KL и MN и верността на твърдението в заключението на следната задача.

Задача 2. *Три окръжности с центрове точките O_1, O_2 и O_3 се допират в точките A, B и C. Правите AC и BC пресичат окръжността с център O_1 съответно в точките E и F. Правите AB и BC пресичат окръжността с център O_2 съответно в точките M и N. Правите AB и AC пресичат окръжността с център O_3 съответно в точките K и L. Да се докаже, че $P_{\triangle O_1O_2O_3} = EF + KL + MN$.*

Заключение

Целта на изложението е да се покаже възможността чрез използване на позна-



Черт. 11.

вателните методи обобщение и специализация или чрез използване на логически еквивалентности да се формулират нови твърдения или задачи, решими с посоченото теоретично средство. Дейностите, свързани с генериране на нови твърдения или задачи на такова ниво, са посилни само за някои ученици, но основно са ориентирани към учителите по математика.

Литература

[1] SBMef, https://www.sbpm.be/2003/11/mathematique-et-pedagogie-144/

[2] Scribd, https://www.scribd.com/document/454929774/A-propos-du-theoreme-de-Boutin

[3] К. Банков, Т. Витанов. Геометрия. София, Анубис, 2003. [K. Bankov, T. Vitanov. Geometriya. Sofiya, Anubis, 2003] (in Bulgarian).

[4] Н. Мартинов. Геометрични преобразования и някои техни приложения. София, Народна просвета, 1974. [N. Martinov. Geometrichni preobrazovaniya i nyakoi tehni prilozheniya. Sofiya, Narodna prosveta, 1974] (in Bulgarian).

[5] Н. Мартинов. Трансформации в геометрията. София, Народна просвета, 1968. [N. Martinov. Transformatsii v geometriyata. Sofiya, Narodna prosveta, 1968] (in Bulgarian).

[6] В. Ненков. Обобщение на теоремата на Бутен. *Математика и информатика*, **40**, № 3-4 (1997), 124 – 126. [V. Nenkov. Obobshtenie na teoremata na Buten. *Matematika i informatika*, **40**, № 3-4 (1997), 124 – 126] (in Bulgarian).

[7] А. Симеонов. Триъгълници със съвпадащи Ойлерови прави. *Математика и информатика*, **40**, №3–4 (1997), 123–124. [A. Simeonov. Triagalnitsi sas savpadashti Oylerovi pravi. *Matematika i informatika*, **40**, № 3–4 (1997), 123–124] (in Bulgarian).

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

FORMATION OF METACOGNITIVE COMPETENCES THROUGH CREATING GAMES

Lyuba Petrova[1], **Nataliya Pavlova**[2]
University of Shumen, Faculty of Mathematics and Computer Science
emails: [1]lyubap237@gmail.com, [2]n.pavlova@shu.bg

This article explores the possibilities of forming metacognitive competencies through the use of the project method for creating educational games in mathematics classes. The project stimulates creativity, non-standard thinking and teamwork, overcoming traditional difficulties in motivating students. The method demonstrates potential for integration with the STEM approach and various technologies, which offers new opportunities for modernizing the educational process.

Keywords: educational games, project method, artificial intelligence, mathematics, metacognitive skills

ФОРМИРАНЕ НА МЕТАКОГНИТИВНИ КОМПЕТЕНТНОСТИ ЧРЕЗ СЪЗДАВАНЕ НА ИГРИ

Люба Петрова[1], **Наталия Павлова**[2]
ШУ „Епископ Константин Преславски“, Факултет по математика и информатика
emails: [1]lyubap237@gmail.com, [2]n.pavlova@shu.bg

Дадената статия изследва възможностите за формиране на метакогнитивни компетентности чрез използването на проектния метод за създаване на образователни игри в часовете по математика. Проектът стимулира креативност, нестандартно мислене и работа в екип, като преодолява традиционните трудности при мотивацията на учениците. Методът демонстрира потенциал за интеграция със STEM подхода и различни технологии, което предлага нови възможности за модернизиране на учебния процес.

Ключови думи: образователни игри, проектен метод, изкуствен интелект, математика, метакогнитивни умения

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.167-172
2020 Mathematics Subject Classification: 97M10, 97M740, 97M80..

Въведение

Игрите са любимо занятие на почти всички деца и на не малко възрастни. През последните години, особено след въвеждането на предмета „Компютърно моделиране и информационни технологии“ (КМИТ), много педагози се насочиха към това да използват не просто игри с образователно съдържание [4, 6], но и да дават на учениците възможност те самите да бъдат разработчици на такива игри. Инструментите за тяхното създаване могат да бъдат най-различни – от физически (хартия, пластмасови изделия, природни материали и др.) до среди за програмиране, графични редактори, текстообработващи системи, електронни таблици, презентационни софтуери и т.н. В дадената статия ще се фокусираме не толкова върху инструментите, колкото върху процеса на генериране на идея и нейното изпълнение, целящо формирането на метакогнитивни компетентности.

Теоретични постановки

Естествено е да мислим за възможностите на игрите не само с цел забавление, но и като инструмент за обучение. Сред изводите в проведено изследване на влиянието на компютърните образователни игри върху когнитивните способности е, че “ще бъде генерирано умение за метапознаване чрез обхващане на познавателни дейности в игрова среда” [2].

Отдавна е ясно, че наборът от знания, които учениците не могат да приложат адекватно при решаването на други математически и практически проблеми, не е достатъчен и следва да се работи върху обвързването им с примери. Това не само ще мотивира учениците да изучават математика, но и ще облекчи разбирането на редица концепции и понятия. „Метапознанието е способността да се използват предишни знания, за да се планира стратегия за подход към учебна задача, да се предприемат необходимите стъпки за разрешаване на проблеми, да се отразяват и оценяват резултатите и да се променя подходът, ако е необходимо“ [7].

Съвременното образование е подчинено на компетентностния подход. В учебните програми компетентностите се разглеждат като очакван резултат и дейностите са насочени към постигане на този резултат. Този подход работи, но според редица автори той би могъл да се разшири. Kanungo и Misra разграничават естеството на компетентностите и метакомпетентностите [5]. Според Mathews „компетенциите се разглеждат на повърхностно ниво от една страна, а от друга страна, се разглеждат на ниво на изходните процеси. Ако разчитаме на съществуващите модели, компетентността или се превръща в процес, базиран на умения, или се превръща в чисто изведена конструкция, лишена от разпознаваеми измерения поради липсата на присъща логическа връзка“ [3]. Авторът разглежда модел, който има интегративна, теоретична, метааналитична и практическа стойност.

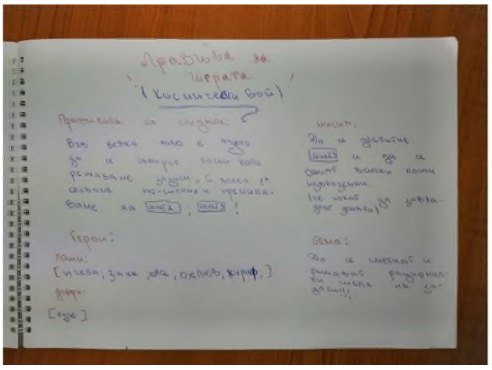
От друга страна, таксономията на Блум [1] градира мисловните умения, като в зенита на пирамидата са позиционирани оценката и създаването. Основавайки се на тези идеи считаме, че прилагането на проекти, насочени към това учениците да създават игри с образователен характер, ще повиши техните мисловни умения.

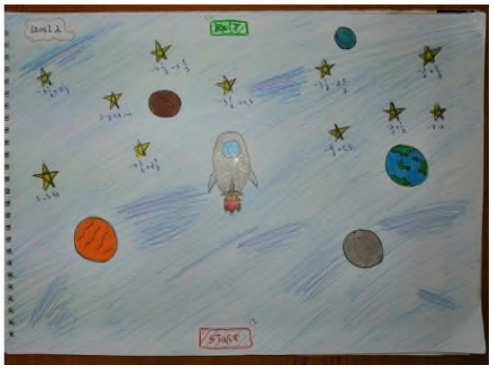
Игрови проект

В рамките на редовните часове по математика, след приключване на раздел „Рационални числа“ в 6 клас, проведохме дискусия с учениците относно възможности-

те на генеративния изкуствен интелект (ИИ). Около половината от учениците бяха чували за ИИ – най-вече имаха опит с използване на чатботове и приложения за създаване на изображения с ИИ, но изненадващо се оказа, че дори тези, които не знаят какво е, са използвали приложения или платформи с ИИ. Един ученик обясни на съучениците си, че „изкуствен интелект е нещо като компютър или робот с мозък, който като го попиташ нещо и търси в интернет, за да ти отговори“. След като уточнихме възможностите на ИИ (основно в чатботовете), учениците споделиха, че често използват ChatGPT, за да пишат домашни работи по история и география. Освен ChatGPT, учениците казаха, че използват и чатбота в приложението Snapchat – My AI. По време на дискусията сами стигнаха до извода, че не винаги им дава вярна и точна информация, затова трябва да използват и други източници на информация.

Последваха няколко задачи, в които учениците бяха насърчавани да използват чатбот с ИИ. Една от задачите бе да се създаде игра с наименование „Космически бой“. Проектът се извърши от екипи. Изискванията към играта са тя да има три нива, като за преминаване във всяко следващо ниво се решават задачи с нарастваща трудност. Всяка вярно решена задача да дава ход напред и да носи точки. Бяха зададени и герои за играта – пчела, заек, кола, охлюв, жираф и главен герой – куче. Мисията на играта е да се достигне трето ниво, в което кучето унищожава извънземни, искащи да завладеят земята, като решава вярно задачите. Това бяха рамките на проекта, като учениците имаха свобода сами да изберат формата на играта, да прецизират правилата и да изберат средства за реализирането ѝ. Учениците следваше сами да разделят ролите си в екипа и имаха свобода да използват чатбот с ИИ и технология за изработка на играта по техен избор.



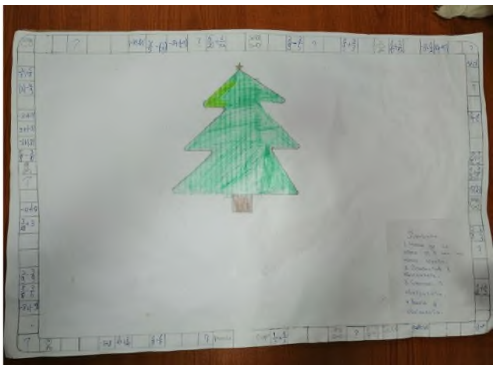


В отделните екипи учениците споделят за трудности и успехи от различен тип. Така в единия екип на учениците не им е било трудно да разпределят ролите си в групата – всички са давали предложения за идеята на играта със и без помощта на чатбот, някои са рисували, други представиха играта на екипа пред класа. В другите екипи учениците изпитват трудности с разпределяне на задачите, но впоследствие успяват. Всички ученици споделят, че им е било интересно и забавно докато правят проекта. Всички екипи се насочват към разработване на бордови игри с помощта на рисуване, но всеки екип има своите специфични идеи.

На Фигура 1 се вижда, че първият екип се е насочил към изписването на отделните задачи под всяка „цел“. Играта може да се играе индивидуално или да е със

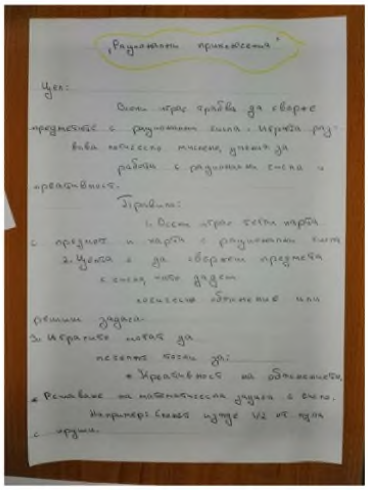
състезателен характер.





Елементите на играта на втория екип са: игрално поле, наподобяващо това на „Монополи“, тесте с карти („придвижи се напред с 2 хода“, „придвижи се назад с 1 ход“, „пропускаш ред“ и др.), фигурки (част от картинките от координатните системи – мечка, щраус, мишка, камила). В игралното поле има полета със задачи с рационални числа, полета с въпросителен знак (като попаднат на него теглят карта от тестето) и полета с картинки – локомотив (напред 2 хода), самолет (напред 5 хода) и ракета (напред 7 хода). Играта е със състезателен характер.





Третият екип изработи две тестета карти, едното с картинки (Фигура 3), а второто с различни рационални числа. Играчът тегли една карта от тестето с числата и две карти от картинките, и трябва да състави изречение с тях, като бяха дали пример „Слонът изяде 1/2 от купа с круши“. Учениците уточняват в правилата, че играта не е със състезателен характер, а развива логическо мислене, умения за работа с рационални числа и креативност.

Учениците и от трите групи представиха атрактивно как изкуственият интелект

може да ни бъде в помощ не само при писане на домашни работи, но и да ни дава различни идеи, както за игри, така и за математически задачи.

Проектите бяха оценени по критерии – сложност на задачите, оригиналност на идеята, представяне и екипна организация, като учениците имаха възможност първо да се самооценят по същите критерии. Учениците описаха трудностите при разпределянето на задачите и споделиха приноса на всеки член от екипа.

Интересно е, че само двама ученици, от два различни екипа, се опитаха да създадат играта в Scratch. Единият опита да генерира с ChatGPT файл в Scratch, но не успя, а другият ученик опита сам да я направи в платформата, но също не успя. При реализиране на STEM урок е възможно на всеки от екипите да се даде различна технология за реализация (на лотариен принцип). Все пак подобна дейност ще изисква време и заложените компетентности в урока ще комбинират тези на математиката с КМИТ и ще изискват комбинирането на двата предмета и присъствието на съответните учители.

Изводи

Проведеният експеримент ни дава основание да предположим, че прилагането на проектния метод по посока на създаване на игра с образователно съдържание дава на учениците свобода да мислят нестандартно. Провокира интерес към математиката дори у ученици, които имат затруднения и трудно се мотивират да решават задачи самостоятелно.

От друга страна, проблемите при организацията на екипната работа, стимулираха учениците да подходят по различни начини, за да ги преодолеят, което е особено ценно умение в съвременното общество.

Процесът на създаване на игра изведе учениците от заложените в учебната програма компетентности в едно по-високо метакомпетентностно ниво, където освен заложените знания, умения и отношения, учениците следваше да погледнат от съвсем друга гледна точка върху изучаваните задачи, за да ги организират в забавна и мотивираща форма.

Благодарности

Тази статия е разработена в рамките на проект по Фонд научни изследвания на ШУ „Епископ Константин Преславски“ за 2025.

Литература

[1] B. Bloom. Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook 1: Cognitive Domain. (1956). Longmans.

[2] D. Dzaky, R. Hartanto, S. Fauziati, R. Bierig. How educational game can improve the player's metacognitive skills, *Jurnal Informatika dan Komputer*, Vol. 7, No. 1. (2024). pp. 1-7, DOI: 10.33387/jiko.v7i1.6363

[3] J. Mathews. Meta Competency Analysis (December 3, 2013). `http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2363301`

[4] J. Stariradeva, V. Marinova, V. (2015). Computer component of professionalco mpetence of teachers of mathematics and its formation. The 13th International Conference Information Technologies and Management. Riga, Latvia. (2015). p. 120 – 124.

[5] R. Kanungo, S. Misra. Managerial Resourcefulness: A Reconceptualization of Management Skills. *Human Relations*, 45(12), (1992), 1311-1332. https://doi.org/10.1177/001872679204501204

[6] T. Chehlarova. Computer Models for Playing Billiards Using Frontal Shot, *Mathematics and Informatics*. 65(2). (2022).131 – 138, DOI: https://doi.org/10.53656/math2022-2-1-com

[7] TEAL Center Fact Sheet No. 4: Metacognitive Processes, https://lincs.ed.gov/state-resources/federal-initiatives/teal/guide/metacognitive

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

CIRCUMSPHERE AND INSPHERE OF A POLYHEDRON

Irena A. Parvanova[1], **Vencislav D. Radulov**[2]

[1]Department of Applied Mathematics and Informatics, Technical University of Sofia,
[2]Faculty of mining electromechanics, University of Mining and Geology
e-mails: [1]irena.parvanova@tu-sofia.bg, [2]v.radulov@mgu.bg

The article considers several tasks for circumsphere and insphere of a prism and a pyramid using the methods and tools used in descriptive geometry. The examples shown are executed in orthogonal axonometry and can be used to construct drawings illustrating the solution of a number of problems in stereometry.

Keywords: descriptive geometry; orthogonal projection; plane section of a sphere

СФЕРА, ОПИСАНА ОКОЛО И ВПИСАНА В МНОГОСТЕН

Ирена Първанова[1], **Венцислав Радулов**[2]

[1] Факултет Приложна математика и информатика, Технически университет, София
[2] Минно-електромеханичен факултет, Минно-геоложки университет, София
e-mails: [1]irena.parvanova@tu-sofia.bg, [2]v.radulov@mgu.bg

Докладът разглежда няколко задачи за построяване на вписана и описана сфера около пирамида и призма, решени с методите на дескриптивната геометрия. Показаните примери са изпълнени в ортогонална аксонометрия и могат да бъдат от полза при построяването на чертежи, онагледяващи решаването на редица задачи от стереометрията.

Ключови думи: дескриптивна геометрия, ортогонално проектиране, равнинни сечения на сфера

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.173-179
2020 Mathematics Subject Classification: 51N05.

Въведение: Задачи за намиране на елементи от вписана и описана около тяло сфера са част от учебния материал в курса по стереометрия за 11 клас - профил „Математика“. В тази доклад авторите показват няколко примера, решени в ортогонална аксонометрия, като се надяват направените чертежи да бъдат от полза при правилното и точно представяне на вписана и описана около пирамида и призма сфери.

Изложение: Всички показани примери са решени в ортогонална аксонометрия, тъй като само при ортогонално проектиране и в някои частни случаи на централно проектиране сфера се изобразява в кръг. Решенията на същите задачи в наклонена аксонометрия се усложняват значително. Изработването на чертежите изисква познаване на свойствата на успоредното проектиране и основни конструкции, използвани в дескриптивната геометрия, които могат да бъдат намерени в [3]. Решенията на първия и последния от показаните примери са описани подробно, а за останалите са отбелязани най-важните особености.

Пример 1. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази сфера $\sigma(O, R = 4)$ и вписана в нея правилна четириъгълна пирамида с височина $h = 6$, лежаща върху оста z на координатната система.

Построенията са извършени в следната последователност:

1. Изобразен е аксонометричният кръст на ортогонална диметрия.

2. Построена е контурната окръжност на проекцията на сферата - окръжност σ' с център O' и радиус $R' = \frac{3\sqrt{2}}{4}R \approx 1.06R$.

3. Върху z' е нанесена точка V', като $|O'V'| = R = 4$. Точката V е прободът на оста z на координатната система със сферата и е връх на пирамидата.

4. Върху z' е нанесена и точка S', като $|V'S'| = h = 6$. Тъй като височината на призмата е 6, а радиусът на сферата е 4, то разстоянието от центъра на сферата до равнината на основата е $d = 2$.

5. Изобразено е сечението на сферата с равнината на основата - окръжност $k(S, r = \sqrt{R^2 - d^2})$. $r = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Това е описаната около основата окръжност. Проекцията на окръжността е елипсата k' с център S', голяма полуос $a = \frac{3\sqrt{2}}{4}r = \frac{3\sqrt{6}}{2} \approx 1.06r$. и малка полуос $b = \frac{1}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 0.35r$. Тъй като окръжността лежи в равнина, успоредна на първа координатна равнина μ, то голямата ос на проекцията $1'2'$ е перпендикулярна на оста z' на координатната система. Подробно описани и решени задачи за построяване на сферични сечения са показани в [2] и в [1].

6. Основата на пирамидата е вписан квадрат $ABCD$ в окръжността k. Тогава проекциите на диагоналите на основата са двойка спрегнати диаметри на елипсата k'. За намирането им са направени следните построения:

- Точката A' – проекция на един от върховете на квадрата е избрана допирна точка на елипсата k' с контурната окръжност на сферата σ'.
- Построен е диаметърът на елипсата $A'C'$.
- Построена е произволна хорда на елипсата $M'N'$, успоредна на диаметъра $A'C'$.

– Намерена е средата на хордата - точката L'.

– Построен е диаметърът $B'D'$, който минава през точката L'.

7. Построени са околните ръбове на пирамидата, като при определяне на видимостта им сферата е приета за прозрачна.

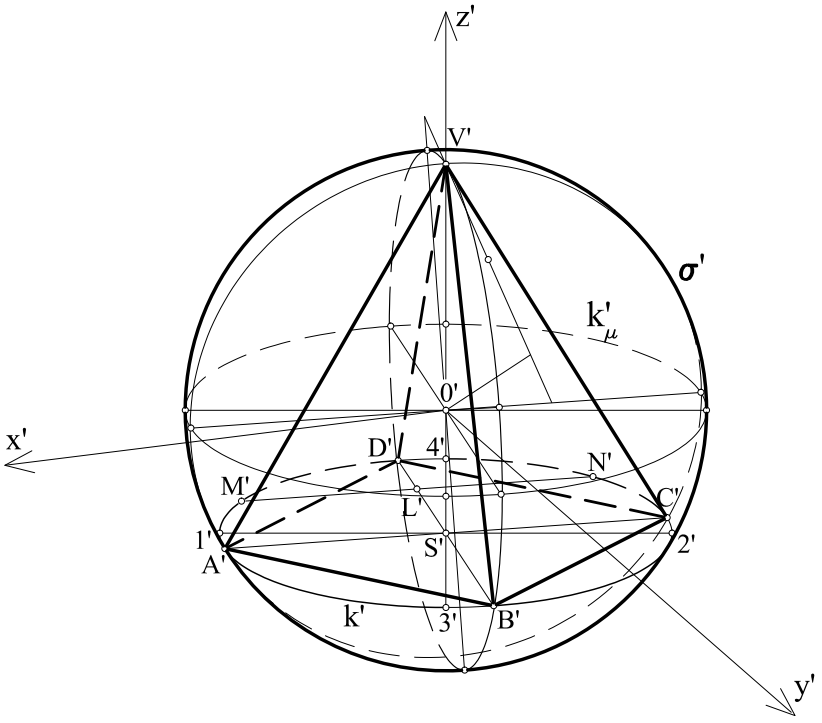
8. За по-добра нагледност на показания чертеж са изобразени сеченията на сферата с първа координатна равнина и тези, съдържащи диагоналните сечения на пирамидата.

– Образът на сечението на сферата с първа координатна равнина е елипсата k'_μ с голяма ос, перпендикулярна на z' и полуоси $a = R'$, $b = \frac{1}{3}R'$.

– За намирането на двойка спрегнати диаметри на другите две елипси са построени диаметрите на k'_μ, успоредни на диагоналите на основата на пирамидата.

– При изобразяването на елипсата - образ на описана около триъгълника VBD окръжност, е използвана конструкцията на Риц за намиране на осите на елипсата.

Построенията са показани на чертеж 1.

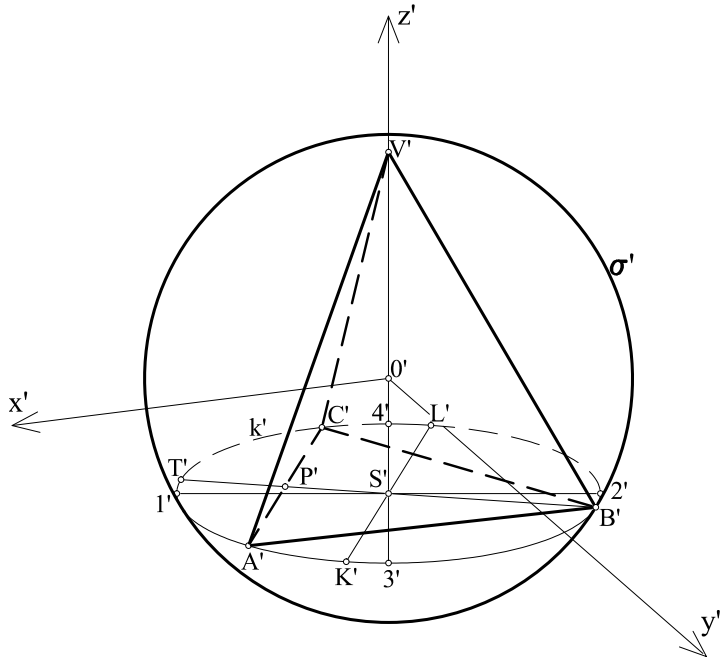


Чертеж 1

Пример 2. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази сфера $\sigma(O, R = 4)$ и вписана в нея правилна триъгълна пирамида с височина $h = 6$, лежаща върху оста z на координатната система.

Построенията при изработването на чертежа към този пример са направени в същата последователност, както в първия пример. За построяването на проекцията на основата на пирамидата е избрана точка B' - допирна точка на елипсата k' с контурната окръжност на проекцията на сферата. Намерени са двойката спрегнати диаметри на елипсата - $B'T'$ и $K'L'$ и е използвано свойството на медицентъра на триъгълника. Точката P' е среда на отсечка $T'S'$, а отсечката $A'C'$ е успоредна на $K'L'$.

Построенията са показани на чертеж 2.



Чертеж 2

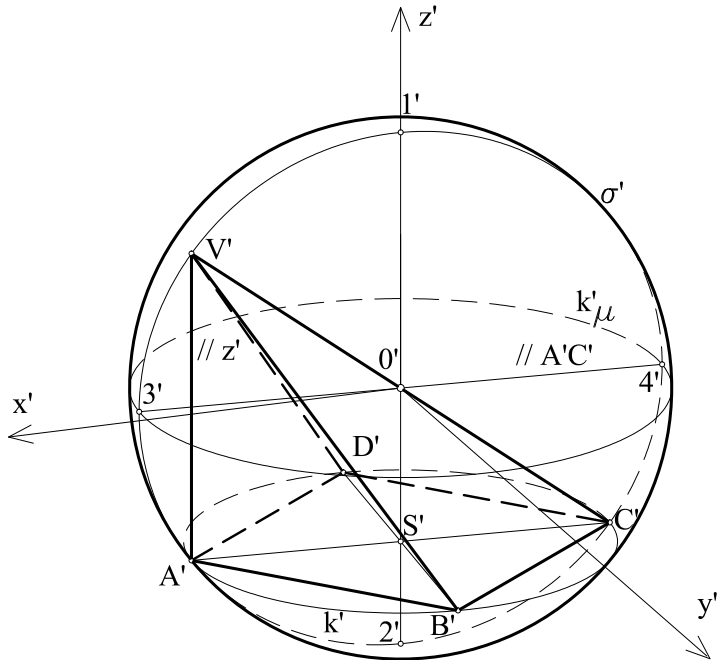
Пример 3. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази сфера $\sigma(O, R = 5)$ и вписана в нея пирамида с основа квадрат $ABCD$ с център точка $S(0; 0; -3)$, лежаща в равнина, успоредна на първа координатна равнина μ и околен ръб VA - перпендикулярен на равнината на основата.

Пирамидата и сферата са подбрани, така че да илюстрират приблизително точно решението на задача 16 от КСИ на ФМИ към СУ „Св. Климент Охридски“ , проведен на 2.04.2023 г.

Построени са контурната окръжност на проекцията на сферата σ' (O',$R' = \frac{3\sqrt{2}}{4}R \approx 1.06R$), сечението на сферата с равнина, минаваща през точка S и успоредна на първа координатна равнина μ, и успоредникът $A'B'C'D'$ – образ на основата на пирамидата. Тъй като околният ръб VA е перпендикулярен на равнината на основата, то центърът на сферата е среда на околния ръб VC. Тогава отсечка $V'A'$ е успоредна на оста z', а точка O' е среда на $V'C'$.

За добра нагледност на чертежа са изобразени сечението на сферата с първа координатна равнина и сечението, в което е вписан триъгълник ACV. За второ-

то отсечките $1'2'$ и $3'4'$ са двойка спрегнати диаметри, отсечката $O'A'$ е голямата полуос, а точка V' е точка от елипсата.

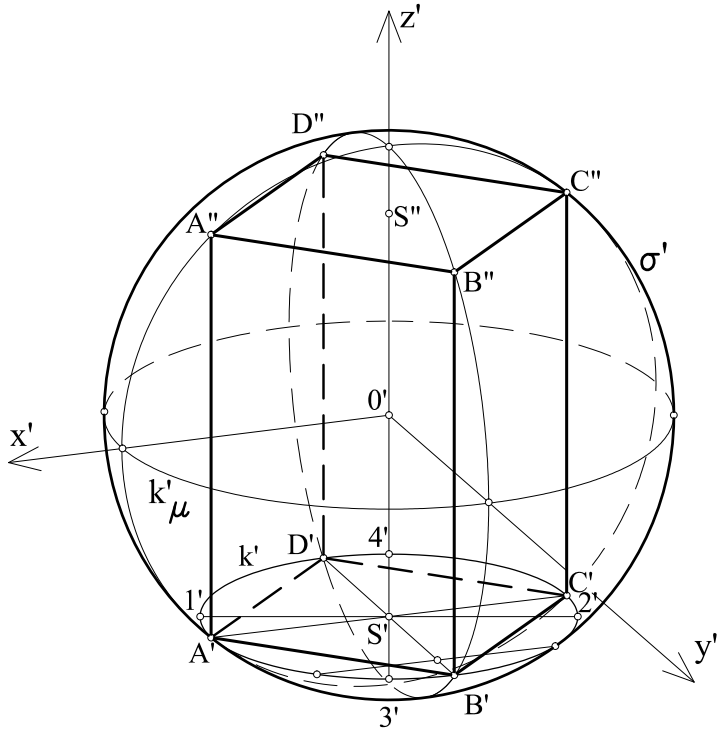


Чертеж 3

Пример 4. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази сфера $\sigma(O, R = 4)$ и вписана в нея правилна четириъгълна призма с височина $h = 6$ и околни ръбове, успоредни на оста z на координатната система.

Всички направени построения за изобразяването на сферата и на долната основа на призмата са както в пример 1, като разстоянието от точка O' до S' е $\frac{h}{2}$. Радиусите на сеченията на сферата, в които са вписани основите са равни и са $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$. Изобразена е само проекцията на описаната окръжност около долната основа. Проекциите на околните ръбове на призмата са успоредни и равни и са успоредни на z'. Изобразени са сечението на сферата с първа координатна равнина и сеченията, които съдържат диагоналните сечения на призмата.

Пример 5. В увеличена ортогонална диметрия да се изобрази правилна четириъгълна пирамида с височина $h = 8$ и основа в първа координатна равнина μ с център O и страни с дължина 8, успоредни на координатните оси. Да се изобрази вписаната в пирамидата сфера и да се намерят допирните точки на сферата с околните стени на пирамидата. Построенията са направени в следната последователност:



Чертеж 4

1. Изобразена е пирамидата, като $|A'B'| = |C'D'| = 8$, $|B'C'| = |A'D'| = 4$, $|O'V'| = h = 8$.

2. За намирането на центъра и радиуса на вписаната сфера е направен помощен чертеж в реални размери – триъгълник KOV. Построена е ъглополовящата на $\sphericalangle VKO$. Намерена е точка S – център на вписаната сфера и е определен радиусът $r = |SP|$. Построена е отсечка PW, перпендикулярна на VO.

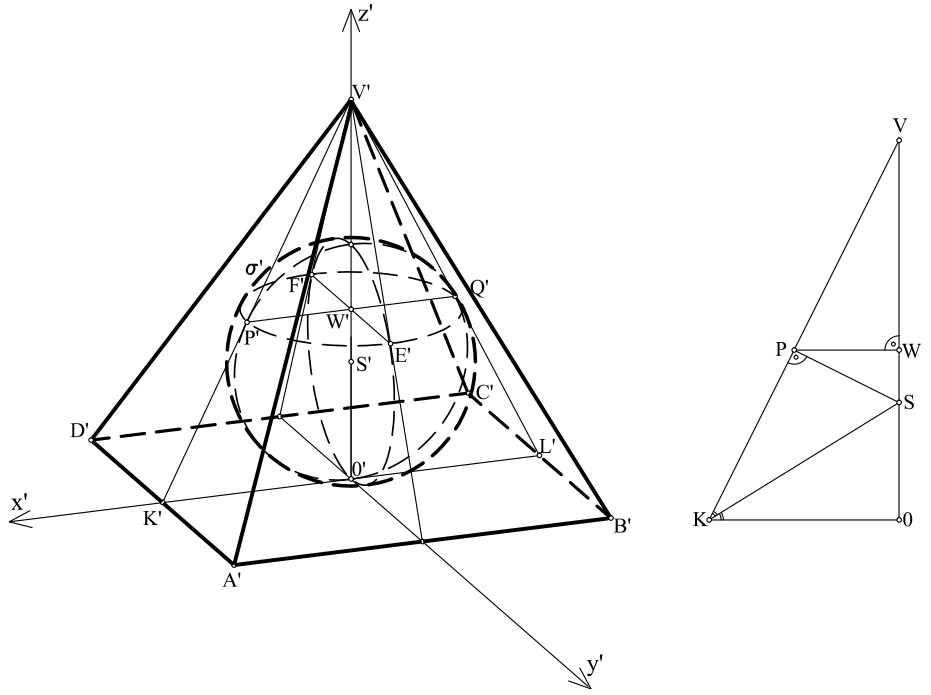
3. На аксонометричния чертеж са нанесени точки S' и W'.

4. Изобразена е окръжност σ' с център S' и радиус $r' = \frac{3\sqrt{2}}{4}r \approx 1.06r$. Това е контурната окръжност на проекцията на сферата.

5. Построени са отсечки $P'Q'$ и $E'F'$, успоредни на x' и y', съответно. Намерените четири точки са допирните точки на сферата до околните стени на пирамидата.

6. За по-добра нагледност са построени сеченията на сферата с втора и трета координатни равнини, и сечението, което минава през намерените допирни точки.

Построенията са показани на чертеж 5.



Чертеж 5

Чертежите са изработени с помощта на AUTOCAD.

Литература

[1] В. Радулов, И. Първанова. *Ръководство по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения*, (2006) УАСГ, ISBN 13978-954-724-031-5
[V. Radulov, I. Parvanova., 2006. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook*, UACG, (in Bulgarian)]

[2] В. Радулов, И. Първанова. *Ръководство по дескриптивна геометрия, Равнинни сечения*, (2012) Регалия 6, ISBN 978-954-745-220-6
[V. Radulov, I. Parvanova. *Descriptive geometry, Plane sections, Textbook*, Regalia 6,(in Bulgarian)]

[3] Д. Чорбаджиев. *Дескриптивна геометрия*, УАСГ, (1992).
[D. Chorbadgiev. 1992. *Descriptive geometry*, UACG (in Bulgarian)]

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

CONIC SECTIONS IN GEOMETRIC LOCI PROBLEMS IN MATHEMATICS PROFILED TRAINING

Penka Rangelova[1], Marta Teofilova[2], Daniela Georgieva[3]

[1,2]Faculty of Mathematics and Informatics, University of Plovdiv Paisii Hilendarski, Bulgaria,
[3]High School of Science and Mathematics "Acad. Boyan Petkanchin", Haskovo, Bulgaria
emails: [1]rangelova_penka@abv.bg, [2]marta@uni-plovdiv.bg, [3]danielatsvetkova17@gmail.com

In this work, problems of finding geometric loci of points in the plane involving conic sections are considered. The problems presented are solved by means of analytical geometry and are suitable for knowledge deepening and skill improvement of high school students in the mathematics profiled training in exercise lessons on the topic of conic sections or in extracurricular forms of learning, as well as for university students studying analytical geometry.

Keywords: geometric locus, conic section, ellipse, hyperbola, parabola, circle

КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ В ЗАДАЧИ ЗА ГЕОМЕТРИЧНИ МЕСТА НА ТОЧКИ В ПРОФИЛИРАНАТА ПОДГОТОВКА ПО МАТЕМАТИКА

Пенка Рангелова[1], Марта Теофилова[2], Даниела Георгиева[3]

[1,2]Факултет по математика и информатика, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски", [3]ПМГ „Акад. Боян Петканчин", Хасково
emails: [1]rangelova_penka@abv.bg, [2]marta@uni-plovdiv.bg, [3]danielatsvetkova17@gmail.com

В настоящата работа са разгледани задачи за намиране на геометрични места на точки в равнината, в които участват конични сечения. За решаване на задачите са използвани средствата на аналитичната геометрия. Предложените задачи са подходящи за задълбочаване на знанията и усъвършенстване на уменията на учениците от профилираната подготовка по математика в уроците за упражнение върху темата за конични сечения или в извънкласни форми на работа, както и за студенти, изучаващи аналитична геометрия.

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.180-191

2020 Mathematics Subject Classification: 97G70, 97G40.

Ключови думи: геометрично място на точки, конично сечение, елипса, хипербола, парабола, окръжност

В прогимназиалния и първия гимназиален етап учениците се запознават с някои основни геометрични места на точки (ГМТ) в равнината. Те научават, че симетралата на дадена отсечка е ГМТ, които са равноотдалечени от двата края на отсечката; ъглополовящата на ъгъл е ГМТ от вътрешността на ъгъла, намиращи се на равни разстояния от раменете му; окръжността е ГМТ от равнината, които са на равни разстояния от дадена точка от същата равнина и др. В модула по аналитична геометрия в профилираната подготовка по математика в 11. клас учениците изучават аналитичното задаване на четири криви от втора степен като ГМТ – окръжност, елипса, хипербола и парабола. Тези криви носят общото наименование конични сечения, защото се получават при пресичането на ротационна конична повърхнина с равнина при различни ъгли между секущата равнина и оста на повърхнината. Понятието ГМТ е основно в аналитичната геометрия. Прави линии, криви линии и повърхнини могат да се дефинират като ГМТ и от това определение да се изведе аналитичното им задаване с уравнение. Следвайки този принцип, елипсата, хиперболата и параболата се дефинират като ГМТ в равнината, удовлетворяващи определени свойства, свързани с разстояния до две фиксирани точки или до фиксирани точка и права. От съответното дефиниционно условие на всяка от кривите, при подходящо избрана координатна система, се извежда нейното (канонично) уравнение. В уроците за упражнения и в задачите за самостоятелна работа към темите за криви от втора степен са поставени някои несложни задачи за намиране на ГМТ [12], които формират у учениците начални умения за решаване на задачи от този тип. Казаното дотук ни дава основание да разгледаме допълнителни задачи за намиране на ГМТ, свързани с конични сечения. Целта на настоящата работа е да представим система от задачи, които могат да бъдат използвани за задълбочаване на познанията на учениците за криви от втора степен и усъвършенстване на уменията им за прилагане на апарата на аналитичната геометрия. Задачите за намиране на ГМТ, поради нестандартния си характер, особено в случая, когато търсената фигура не е предварително известна от условието, са подходящи за прилагане на изследователския подход, чрез който учениците, приемайки активната роля на откриватели, могат сами да формулират хипотези и да ги проверяват с насоките и помощта на учителя. Включването на задачи с изследователски характер в обучителния процес провокира интереса на учениците и ги насърчава да развиват способностите си да творят и разсъждават, вместо да запаметяват наизуст. Задачите за ГМТ са свързани пряко с идеята за движение, тъй като в тях, наред с постоянни, участват и подвижни елементи, което разчупва рамките на „статичната“ геометрия и стимулира аналитичното мислене и въображението. И не на последно място, методът на ГМТ намира приложение при решаването на задачи за построение (примери за използване на ГМТ и конични сечения в построителни задачи с GeoGebra могат да бъдат намерени в [1]).

В [7, 11, 14] е дадено следното определение за ГМТ: *геометрично място на точки в равнината или пространството се нарича фигура, състояща се от всички точки, съответно в равнината или пространството, притежаващи дадено свойство, и не съдържаща други точки.*

При решаването на задачи за намиране на ГМТ може да се използва подходът с доказване на следните две твърдения (необходими и достатъчни условия) [7, 11]: 1) *Права теорема. Нека точката M е произволна точка, притежаваща дадено свойство. Тогава M принадлежи на фигурата f;* 2) *Обратна теорема. Нека точката M е произволна точка от фигурата f. Тогава M притежава даденото свойство.*

Важен първоначален етап при решаването на задачи за намиране на ГМТ е изборът на подходяща координатна система, относно която разглежданите криви и точки имат възможно най-удобни за работа уравнения, съответно координати. При такъв избор и уравнението на кривата, която е търсеното ГМТ, се получава във възможно най-кратък (опростен) запис. На учениците могат да бъдат дадени предварително няколко насочващи указания, формулирани като изводи от начина на извеждане на уравненията на елипсата, хиперболата и параболата, а именно: 1) Ако в условието на задачата са дадени две фиксирани точки, то едната координатна ос може да се получи от правата през тези точки, а другата – от симетралата на отсечката с краища двете точки; 2) Ако са дадени фиксирана точка и неминаваща през нея права, то правата през точката, която е перпендикулярна на дадената права, може да послужи за едната координата ос. Другата ос може да се получи от дадената права или от права, успоредна на дадената, която е равноотдалечена от дадените точка и права.

Уравнението на кривата, която е търсеното ГМТ, трябва да бъде намерено във вид, в който участват само постоянните величини от условието на задачата. След получаването на уравнението, на учениците може да се предложи да визуализират изследваните обекти с динамичен геометричен софтуер като GeoGebra или Desmos, проследявайки как се изменя търсеното ГМТ при различни стойности на дадените величини, които играят ролята на параметри.

В работата ще използваме следните известни формули за конични сечения [2, 3, 12]:

1. *Елипса се нарича равнинна крива от втора степен, която е ГМТ, за които сборът от разстоянията до две дадени точки от равнината е постоянна величина, по-голяма от разстоянието между двете точки.* Ако относно декартова координатна система тези точки са $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, то за произволна точка $M(x;y)$ от елипсата е в сила условието $MF_1 + MF_2 = 2a$, където $a = \text{const} > c$. Точките F_1 и F_2 са фокусите на елипсата. В избраната координатна система уравнението на елипсата е

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \qquad a > b > 0, \quad c^2 = a^2 - b^2. \tag{1}$$

2. *Окръжност* с център точката $C(x_0;y_0)$ и радиус $R > 0$ се задава с уравнението

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{2}$$

Ако в уравнението (1) положим $a = b$, се получава уравнение на окръжност с център координатното начало и радиус a. Следователно окръжността е частен случай на елипса, за която двата фокуса съвпадат с центъра.

3. *Хипербола се нарича равнинна крива от втора степен, която е ГМТ, за които абсолютната стойност на разликата на разстоянията до две дадени точки от равнината е постоянна величина, по-малка от разстоянието между двете точки.* Ако относно декартова координатна система двете точки са $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, то

за произволна точка $M(x;y)$ от хиперболата е изпълнено $|MF_1 - MF_2| = 2a$, $a = \text{const} < c$. Точките F_1 и F_2 са фокусите на хиперболата. Уравнението на хиперболата е

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \quad a, b > 0, \quad c^2 = a^2 + b^2. \tag{3}$$

4. *Парабола се нарича равнинна крива от втора степен, която е ГМТ, намиращи се на равни разстояния от дадена точка (фокус) и дадена права, която не минава през точката (директриса).* Ако изберем координатната система така, че фокусът F и директрисата g да се определят съответно от: $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ и $g : x = -\frac{p}{2}$, то уравнението на параболата е

$$y^2 = 2px. \tag{4}$$

Правата $l : Ax+By+C = 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$, се допира до елипсата (1), хиперболата (3) или параболата (4), точно когато е изпълнено, съответно [3, 10]:

$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2 \text{ или } a^2A^2 - b^2B^2 = C^2, \text{ или } pB^2 = 2AC. \tag{5}$$

Задача 1. *Намерете ГМТ в равнината, за които отношението от разстоянията до две дадени точки от същата равнина е постоянна величина k.* [7, 10, 13]

Решение. Задачата може да се реши само чрез методите на елементарната геометрия (виж [7]), но ние ще разгледаме решение чрез методите на аналитичната геометрия. Прилагането на аналитичния подход ни дава възможност да достигнем до търсеното ГМТ по естествен начин, изхождайки от дадено свойство в условието на задачата. Избираме координатната система Oxy така, че O е средата на отсечката AB, Ox се определя от $\overrightarrow{AB}$, $Oy \perp AB$. Тогава $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $AB = 2a = \text{const} \neq 0$. Нека $M(x;y)$ е произволна точка от търсеното ГМТ. Тогава от условието на задачата имаме

$$\frac{AM}{BM} = k. \tag{6}$$

Пресмятаме $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$. След заместване на дължините на векторите в (6) получаваме $\left(k^2-1\right)\left(x^2+a^2+y^2\right) = 2\left(k^2+1\right)ax$. При $k \neq 1$ последното равенство може да се приведе в нормално уравнение на окръжност след разделяне на двете му страни на k^2-1 и отделяне на точен квадрат за x. Така получаваме

$$\left(x - \frac{k^2+1}{k^2-1}a\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2a^2}{(k^2-1)^2}. \tag{7}$$

Ще намерим центъра и радиуса на окръжността (7). Нека точките P и Q лежат на Ox и делят съответно вътрешно и външно отсечката AB в отношение $k : 1$. Следователно относно избраната координатна система $P\left(\frac{k-1}{k+1}a;0\right)$ и $Q\left(\frac{k+1}{k-1}a;0\right)$. Тогава центърът на окръжността е средата на PQ е, а радиусът ѝ е равен на $\frac{PQ}{2}$. Обратно, ако точката $M(x_0;y_0)$ е произволна точка от окръжността (7), то пресмятаме $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{4k^2ax_0}{k^2-1}$ и $\overrightarrow{BM}^2 = \frac{4ax_0}{k^2-1}$. Тогава $\left(\frac{AM}{BM}\right)^2 = k^2$, откъдето следва, че M удовлетворява условието на задачата. Така установихме, че търсеното ГМТ е

окръжност, определена от уравнението (7). Тази окръжност е известна като *окръжност на Аполоний* спрямо точките A и B и даденото отношение $k \neq 1$. Ако $k = 1$, то ГМТ е симетралата на отсечката AB.

Задачата може да бъде поставена и със следната формулировка: Дадена е отсечката AB и точка C, вътрешна за нея (C не е средата на AB). Намерете геометричното място на точките M, от които отсечките AC и BC се виждат под равни ъгли.

Задача 2. *В равнината са дадени две различни точки A и B. а) Намерете ГМТ M в равнината, за които сборът на квадратите от разстоянията до A и B е постоянна величина b^2.* [10] *б) Намерете ГМТ M в равнината, за които е изпълнено условието $k|AM|^2 + l|BM|^2 = b$, където $k, l, b \in \mathbb{R}$, $k + l \neq 0$.* [15]

Решение. а) При означенията и координатната система от зад. 1 имаме $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = b^2$, откъдето достигаме до зависимостта

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2 - 2a^2}{2}. \tag{8}$$

Обратно, ако $M(x_0; y_0)$ е произволна точка от множеството, определено с уравнението (8), то лесно се проверява, че $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = b^2$. Следователно търсеното ГМТ се задава с уравнението (8). Ако $b > a\sqrt{2}$, търсеното ГМТ е окръжност с център средата на AB, ако $b = a\sqrt{2}$, ГМТ е само една точка (средата на AB) и ако $b < a\sqrt{2}$, то търсеното ГМТ е празното множество.

б) Тази подточка се явява обобщение на а) и зад. 1. При същия избор на координатна система като в подточка а), от условието се достига до уравнението

$$\left(x - \frac{(l-k)a}{k+l}\right)^2 + y^2 = R, \tag{9}$$

където $R = \dfrac{b(k+l) - 4kla^2}{(k+l)^2}$. Отново се изследват три случая за знака на величината R. Ако $R > 0$, то търсеното множество от точки M е окръжност с радиус $\sqrt{R}$ и център точката $C\left(\dfrac{(l-k)}{k+l}a; 0\right)$, която дели отсечката AB в отношение $AC : BC = l : k$. Ако $R = 0$, търсеното множество съдържа само точката C и ако $R < 0$, то е празното множество. С учениците може да се направи и коментар, че ако $k + l = 0$, то ГМТ е права, перпендикулярна на AB. За облекчаване на доказателството в обратната посока, по аналогия с подточка а), центърът на координатната система може да се избере да бъде в точката C. Тогава $A(-a; 0)$ и $B\left(\dfrac{ka}{l}; 0\right)$. Относно тази координатна система уравнението на търсеното ГМТ е $x^2 + y^2 = \dfrac{bl - k(k+l)a^2}{l(k+l)}$. На учениците може да се предложи да съставят задача, която е обобщение на подточка б), и да се коментира с тях едно такова обобщение за произволен краен брой точки. *Нека $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ са дадени точки ($n \geq 2$) от една равнина, $k_1,\ k_2, \ldots, k_n$ и b са дадени реални числа, такива че $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$. Да се докаже, че множеството от точките M в същата равнина, за които е в сила условието*

$$k_1|A_1M|^2 + k_2|A_2M|^2 + \ldots + k_n|A_nM|^2 = b, \tag{10}$$

е окръжност, точка или празното множество [15]. Доказателството може да се проведе по следния начин. Нека относно декартова координатна система точките $A_i(x_i; y_i)$, където $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогава от (10) следва, че множеството на точките M се определя от уравнението

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \tag{11}$$

където $A = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $B = -2(k_1x_1 + \ldots + k_nx_n)$, $C = -2(k_1y_1 + \ldots + k_ny_n)$, $D = k_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + \ldots + k_n\left(x_n^2 + y_n^2\right) - b$. По аналогия с б), уравнението (11) може да задава окръжност, да се удовлетворява само от една точка или да не се удовлетворява от никои точки с координати реални числа.

Задача 3. *В равнината са дадени окръжност и точка C вътрешна за окръжността, различна от центъра. Намерете ГМТ на пресечните точки на допирателните, построени в краищата на всевъзможните хорди през C.* [15]

Решение. В някои задачи за ГМТ използването на векторния апарат е по-удачен избор в сравнение с използването на координати и уравнения от гледна точка на облекчаване на разсъжденията и опростяване на изчисленията (виж [8]). Чрез задачи като тази учениците могат да комбинират знанията си за линейни действия с вектори от 8. клас с новите знания за скаларно произведение и перпендикулярност на вектори.

Нека дадената окръжност има за център т. O и радиус r. Нека AB е произволна хорда на окръжността, минаваща през C, като $AC : BC = k : 1$, което е еквивалентно на

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{k+1}. \tag{12}$$

Нека допирателните към окръжността в точките A и B се пресичат в т. M. Тогава, тъй като $AM \perp OA$, $BM \perp OB$ и $OA = OB = r$, то чрез правилото за пресмятане на скаларно произведение на два вектора намираме

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OM} = r^2. \tag{13}$$

Така от (12) получаваме

$$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM} = r^2. \tag{14}$$

Нека разглежданията ни са в декартова координатна система с начало центъра на окръжността. Ако т. $C(a; b)$ и $M(x; y)$, то условието (14) задава правата с общо уравнение

$$ax + by - r^2 = 0, \tag{15}$$

която е перпендикулярна на OC. Обратно, нека т. M е от правата (15), т.е. $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM} = r^2$, а MA и MB са допирателните към окръжността през M. Ще покажем, че т. C лежи на AB. Поради (13) имаме $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OM} = \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{OM} = \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OM} = 0$. Оттук следва, че C лежи на $AB \perp OM$. Следователно правата (15) е търсеното ГМТ. Правата (15) се нарича *поляра* на точката C относно дадената окръжност, а C се нарича *полюс* на тази права. Полярите и релацията полярност на точка и права относно окръжност са дефинирани от Аполоний Пергски (262 – 190 пр. н. е.). От уравнението (15) се вижда, че полярата на точка от окръжността съвпада с допирателната в тази точка. Полярата на външна за окръжността точка е правата, съединяваща допирните точки на двете допирателни през нея, и отново се

задава с уравнението (15), ако външната точка има координати $(a; b)$. Това твърдение може да бъде оставено за самостоятелно доказване от учениците. По този начин, след като M лежи на полярата на C, то и C лежи на полярата на M (правата през A и B). Такива точки се наричат *полярно спрегнати*. Поляра на точка може да се дефинира относно произволно конично сечение по аналогичен начин.

Задача 4. *Дадени са окръжностите* $c_1 : x^2 + y^2 = b^2$ и $c_2 : x^2 + y^2 = a^2$, $b < a$. *Произволен лъч с начало общия им център пресича окръжностите съответно в т. B и A. През т. B и A са построени прави, съответно успоредни на координатните оси Ox и Oy. Намерете геометричното място на пресечните точки M на тези прави.* [6]

Решение. Нека разгледаме правите l, които съдържат лъчите през O. За тях можем да използваме декартово уравнение (в случаите, когато лъчът съвпада с положителната или с отрицателната посока на Oy, т. M съвпада с B). Тогава $l : y = kx$ и от системите с уравненията на окръжностите и правите l намираме координатите на пресечните точки, съответно $B\left(\frac{b}{\sqrt{k^2+1}}; \frac{bk}{\sqrt{k^2+1}}\right)$ и $A\left(\frac{a}{\sqrt{k^2+1}}; \frac{ak}{\sqrt{k^2+1}}\right)$. Построяваме правите l_1 през B, успоредни на Ox, $l_1 : y = \frac{bk}{\sqrt{k^2+1}}$, и l_2 през A, успоредни на Oy, $l_2 : x = \frac{a}{\sqrt{k^2+1}}$. Пресечните им точки са $M\left(\frac{a}{\sqrt{k^2+1}}; \frac{bk}{\sqrt{k^2+1}}\right)$. Тъй като в координатите на M участват постоянните величини a и b, на учениците може да се предложи да проверят дали тези точки лежат на елипса или хипербола с полуоси a и b. Наличието на сбор на квадрати в знаменателите ни насочва към проверка за елипса. Установява се, че $b^2\left(\frac{a}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 + a^2\left(\frac{bk}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 = a^2b^2$. Следователно, т. M лежи на елипсата с уравнение (1). Обратно, нека $M(x_0; y_0)$ е произволна точка от елипсата (1). Намираме координатите на пресечните точки B на правата през M, успоредна на Ox, с окръжността c_1, и на пресечните точки A на правата през M, успоредна на Oy, с окръжността c_2. Разглеждаме двойките точки A и B, които лежат в един и същи квадрант на Oxy, и установяваме, че правата AB минава през т. O.

Задача 5. *Намерете геометричното място на петите на перпендикулярите, построени от центъра на елипса, към хордите, съединяващи краищата на взаимно перпендикулярни диаметри.* (Хорда на конично сечение е отсечка, съединяваща две точки върху коничното сечение. Диаметър е хорда, минаваща през центъра на кривата.) [5]

Решение. Нека е дадена елипса с уравнение (1) с център O. Нека $l_1 : y = k_1x$ и $l_2 : y = k_2x$ са две взаимно перпендикулярни диаметъра. Тогава $k_1k_2 = -1$. Нека l_1 пресича елипсата в т. A и B, а l_2 пресича елипсата в т. C и D. Да разгледаме хордата AC, където $A\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k_1^2+b^2}}; \frac{k_1ab}{\sqrt{a^2k_1^2+b^2}}\right)$ и $C\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k_2^2+b^2}}; \frac{k_2ab}{\sqrt{a^2k_2^2+b^2}}\right)$. За хордата BD разсъжденията са аналогични. Намираме $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{v}(m; n)$, където $m = \sqrt{a^2k_1^2+b^2} - \sqrt{a^2k_2^2+b^2}$, $n = k_2\sqrt{a^2k_1^2+b^2} - k_1\sqrt{a^2k_2^2+b^2}$. Тогава $AC : nx - my = ab(k_2 - k_1)$. Построяваме правата p през O, перпендикулярна на AC,

$p : mx+ny = 0$, и намираме пресечната точка $M(x_0; y_0)$ на p и AC. Като вземем предвид перпендикулярността на l_1 и l_2, опростяваме израза $m^2+n^2 = (a^2+b^2)(k_2 - k_1)^2$. Намираме: $x_0 = \dfrac{abn}{(a^2+b^2)(k_2-k_1)}$, $y_0 = -\dfrac{abm}{(a^2+b^2)(k_2-k_1)}$. Горните изчисления ни дават идея да проверим хипотезата дали т. M лежи на окръжност. Затова пресмятаме израза $x_0^2 + y_0^2$. Така установяваме, че точката M лежи на окръжността

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \tag{16}$$

За перпендикулярните диаметри използвахме декартови уравнения. Осите Ox и Oy са една такава двойка диаметри, но Oy не може да се зададе с декартово уравнение. Затова изследваме допълнително случая за Ox и Oy. Установяваме, че петите на перпендикулярите през O към съответните хорди също лежат на окръжността (16).

Обратно, нека т. $M(x_0; y_0)$ е произволна от окръжността (16). Точката M лежи и на правата AC. Пресмятаме разстоянието от O до AC и установяваме, че е равно на радиуса на окръжността (16). Следователно $OM \perp AC$.

Задача 6. *Намерете геометричното място на центровете на всевъзможните окръжности, които отсичат от две дадени взаимно перпендикулярни прави отсечки с дължини съответно* $2a$ *и* $2b$. [5]

Решение. Избираме координатната система, така че двете взаимно перпендикулярни прави да съвпадат с двете координатни оси. Нека пресечните точки на окръжностите с Ox са $A(x_0; 0)$ и $B(x_0 + 2a; 0)$, а с Oy са $C(0; y_0)$ и $D(0; y_0 + 2b)$, $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$. Тогава търсените точки M, които са центрове на окръжности, съвпадат с пресечните точки на симетралите на хордите AB и CD и следователно имат координати $M(x_0+a; y_0+b)$. Освен това, поради $AM = CM$ получаваме $x_0\,(x_0 + 2a) = y_0(y_0+2b)$. Тези произведения участват в разликата на квадратите на координатите на точките M с противоположни знаци, което ни подсказва, че е удачно да пресметнем израза $(x_0 + a)^2 - (y_0 + b)^2$. Така установяваме, че координатите на точките M удовлетворяват уравнението

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2. \tag{17}$$

Обратно, нека $M(m; n)$ е произволна точка, удовлетворяваща уравнението (17). Ще покажем, че M е център на окръжност през точките A, B, C и D. Необходимо и достатъчно условие за това е $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{CM}^2 = \overrightarrow{DM}^2$. От тук получаваме еквивалентната система от условия: $x_0 = m - a$, $y_0 = n - b$, $x_0^2 - 2mx_0 = y_0^2 - 2ny_0$. След заместване на x_0 и y_0 в третото уравнение се убеждаваме, че то е изпълнено поради (17).

Чрез следващата задача на учениците показваме, че търсеното ГМТ може да не е само една крива, а обединението на точките върху две (или повече) криви.

Задача 7. *В равнината са дадени две точки* $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $a = \text{const} > 0$. *Разглеждат се всевъзможните двойки пресичащи се прави през* A *и* B, *такива че произведението на дължините на отсечките, които те отсичат от ординатната ос, е дадена положителна величина* b^2. *Намерете геометричното място на пресечните точки на двойките прави.* [9]

Решение. Правите през A и B пресичат Oy. Следователно за тях можем да използваме декартови уравнения. Нека те са съответно $l_1 : y = k_1(x + a)$, $l_2 :\ y =$

$k_2(x-a)$, $k_1 \neq k_2$.

Пресечните им точки $M(x_0;y_0)$ се определят като решенията на системата от уравненията на двете прави, откъдето $x_0 = \dfrac{(k_1+k_2)a}{k_2-k_1}$, $y_0 = \dfrac{2k_1k_2a}{k_2-k_1}$. Нека $N = l_1 \cap Oy$ и $P = l_2 \cap Oy$. Тогава $N(0;k_1a)$, $P(0;-k_2a)$. От условието на задачата имаме $ON.OP = b^2$, следователно $|k_1k_2| = \dfrac{b^2}{a^2}$. Предлагаме на учениците да намерят квадратите на x_0 и y_0 и да разгледат два случая за знака на k_1k_2. Ако $k_1k_2 > 0$, то $k_1k_2 = \dfrac{b^2}{a^2}$. В този случай предлагаме на учениците да съобразят, че изразът $b^2x_0^2 - a^2y_0^2$ ще бъде равен на постоянна величина. Така те установяват, че $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. Следователно търсеното ГМТ е хипербола. Когато $k_1k_2 < 0$, то $k_1k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$. Тук учениците пресмятат $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ и установяват, че търсеното ГМТ е елипса. В частност, ако $l_1 \perp l_2$, търсеното геометрично място е окръжност с радиус a.

Обратно, нека пресечните точки $M(x_0;y_0)$ на двойките прави l_1 и l_2 лежат на хиперболата с уравнение (3) или на елипсата с уравнение (1). След заместване на координатите на M в (3) и в (1) се установява, че $|k_1k_2| = \dfrac{b^2}{a^2}$, откъдето $ON.OP = b^2$.

Задача 8. *Дадени са права l и окръжност k с център C и радиус R, които се допират в точката A. Намерете множеството на центровете на окръжностите, които не минават през A и се допират до l и k.* [10]

Решение. Нека началото на координатната система съвпада с т. A, а оста Ox се определя от правата AC, като е еднопосочна с $\overrightarrow{AC}$. Тогава $C(R;0)$ и $l : x = 0$. Нека $M(x_0;y_0)$ е произволна точка от търсеното ГМТ, т.е. е център на окръжност k_1 с радиус r, допираща се до l и k. Тогава разстоянието $d(M,l) = |x_0| = x_0 = r$ ($x_0 > 0$ поради даденото в условието на задачата). Освен това $\left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{(x_0-R)^2 + y_0^2} = R + r$. От последните две равенства получаваме $x_0 + R = \sqrt{(x_0-R)^2 + y_0^2}$, откъдето достигаме до

$$y_0^2 = 4Rx_0. \tag{18}$$

Обратно, нека k_1 е произволна окръжност с център $M(x_0;y_0)$ и радиус r, като координатите на M удовлетворяват (18). Нека k_1 се допира до правата l. От $d(M,l) = x_0$ следва $x_0 = r$. От (18) имаме $\left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{(x_0-R)^2 + y_0^2} = x_0 + R = r + R$, което показва, че k_1 се допира външно до k. Следователно търсеното ГМТ е параболата $y^2 = 4Rx$.

Задача 9. *Намерете геометричното място на средите на хордите през фокуса на дадена парабола.* [4]

Упътване. Търсеното ГМТ е параболата $y^2 = p(x - \dfrac{p}{2})$, чийто връх е фокусът на дадената парабола, а нейните фокус и директриса са съответно $\left(\dfrac{3p}{4};0\right)$ и $x = \dfrac{p}{4}$.

Задача 10. *Намерете геометричното място на петите на перпендикулярите, построени от фокуса на дадена парабола към нейните допирателни.* [4]

Упътване. Търсеното ГМТ е ординатната ос.

Задача 11. *Прав ъгъл в равнината се върти, така че раменете му винаги се допират до дадена а) елипса; б) хипербола; в) парабола. Намерете уравнението на траекторията, която описва върхът на правия ъгъл при това въртене.* [10]

Решение. а) Нека елипсата е определена с уравнението (1), а т. $M(x_0; y_0)$ е върхът на правия ъгъл. Тогава M е пресечната точка на две взаимно перпендикулярни прави l_1 и l_2, съдържащи раменете на ъгъла:

$$l_1 : \ A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad l_2 : \ B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0. \tag{19}$$

Съгласно първото равенство от (5), правите l_1 и l_2 са допирателни към елипсата, точно когато:

$$a^2A^2 + b^2B^2 = (Ax_0 + By_0)^2, \quad a^2B^2 + b^2A^2 = (Bx_0 - Ay_0)^2. \tag{20}$$

След събиране на двете равенства в (20), поради $A^2 + B^2 \neq 0$, достигаме до следната зависимост за координатите на M: $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$. Обратно, нека $M(x_0; y_0)$ е произволна точка, удовлетворяваща последното равенство. Нека l_1 е права през M, която се допира до елипсата, т.е. е изпълнено първото от равенствата (20). Тогава, ако l_2 е права през M, перпендикулярна на l_1, то лесно се проверява, че е изпълнено и второто равенство от (20). Това показва, че l_2 също е допирателна към елипсата. Следователно търсената траектория на върховете на правите ъгли е окръжността $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

б) С аналогични разсъждения се достига до извода, че търсеното ГМТ се определя от уравнението $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$. Следователно, ако $a > b$, то е окръжност с център $O(0, 0)$ и радиус $R = \sqrt{a^2 - b^2}$; ако $a = b$, е точката $O(0, 0)$, а в случай, че $a < b$, е празното множество.

в) Използвайки конструкцията от а) и б) и третото равенство в (5), получаваме необходими и достатъчни условия за перпендикулярните прави l_1 и l_2 през M така, че да се допират до произволна парабола, зададена с уравнението (4)

$$pB^2 = -2A(Ax_0 + By_0), \quad pA^2 = 2B(Ay_0 - Bx_0). \tag{21}$$

Чрез събиране на равенствата (21) достигаме до зависимостта $x_0 = -\dfrac{p}{2}$. В обратната посока се доказва аналогично на подточка а).

Задача 12. *Дадена е: а) елипса; б) хипербола. Намерете геометричното място на пресечните точки на перпендикулярите през фокус на кривата към допирателните в произволна нейна точка и правите, съединяващи центъра на кривата с точките на допиране.*

Решение. а) Нека е дадена елипсата (1), $P(x_0; y_0)$, $x_0, y_0 \neq 0$, е произволна нейна точка и да разгледаме фокуса $F_2(c; 0)$. Съгласно [3], допирателната t към кривата в P има уравнение $t : \ b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$. Следователно правите l през F_2, перпендикулярни на t, се определят от $l : \ a^2y_0x - b^2x_0y = a^2cy_0$. Правите g през центъра O и P имат уравнения $g : \ y_0x - x_0y = 0$. Тогава за пресечните точки M на l и g получаваме $M\left(\dfrac{a^2}{c}; \dfrac{a^2y_0}{cx_0}\right)$, откъдето се вижда, че тези точки лежат на постоянната права $d_2 : x = \dfrac{a^2}{c}$. Обратно, нека M е произволна точка от правата d_2. Лесно се проверява, че ако M лежи на една от правите l или g, то M ще лежи и на другата права. Следователно търсеното ГМТ е правата d_2. Отбелязваме, че ако разгледаме фокуса $F_1(-c; 0)$, установяваме, че търсеното геометрично място е

правата $d_1 : x = -\frac{a^2}{c}$. Правите d_1 и d_2 се наричат *директриси* на елипсата (1), съответни на фокусите F_1 и F_2. **б)** Същият резултат се получава за произволна хипербола, зададена с (3). Така установихме, че елипсата и хиперболата имат две директриси, симетрично разположени относно центъра на кривата, като всяка от тях съответства на един от фокусите. Отбелязваме, че за да се получи директрисата на параболата (4), условието на задачата следва да бъде: *Намерете геометричното място на пресечните точки на перпендикулярите през фокуса на парабола към допирателните в произволна нейна точка и правите през точката на допиране, които са успоредни на оста на параболата.*

Накрая, след като въведохме понятието директриса на елипса и хипербола, отбелязваме, че елипсата, хиперболата и параболата могат да бъдат зададени с общо определение, като ГМТ на точки в равнината, за които отношението от разстоянията до дадена точка (фокус) и дадена права (директриса), неминаваща през точката, е постоянна положителна величина e, наречена (числен) ексцентрицитет. Ако $0 < e < 1$, то кривата е елипса, ако $e = 1$, то кривата е парабола, а ако $e > 1$, кривата е хипербола. Трите криви могат да се зададат с уравнението $y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$. Окръжността (за която $e = 0$) не може се включи в горното определение, тъй като нейната „директриса“ е безкрайната права, която не може да бъде аналитично зададена с уравнение в декартова координатна система.

В заключение отбелязваме, че задачите за изследване на геометрични места на точки чрез координатно-векторния апарат допринасят за усвояването на методите на аналитичната геометрия и са подходящи за изучаване не само в темите за конични сечения, но и в останалите теми от модула по аналитична геометрия.

Литература

[1] V. Bizova-Laleva. Construction of geometric shapes using loci and dynamic software. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology* I(7), 14 (2013), 84-89.

[2] Д. Гълъбова, М. Сидерова. Математика – 11. клас. Профилирана подготовка. Веди, 2020. [D. Galabova, M. Siderova. Matematika – 11. klas. Profilirana podgotovka. Vedi, 2020. (in Bulgarian)]

[3] Д. Гълъбова, М. Сидерова. Математика – 12. клас. Профилирана подготовка. Веди, 2021. [D. Galabova, M. Siderova. Matematika – 12. klas. Profilirana podgotovka. Vedi, 2021. (in Bulgarian)]

[4] В. Димова, А. Витанов, Г. Караджов и др. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част I. С., Техника, 1965. [V. Dimova, A. Vitanov, G. Karadzhov et al. Metodichesko rakovodstvo za reshavane na zadachi po vissha matematika, chast I. S., Tehnika, 1965. (in Bulgarian)]

[5] П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука, 1976. [P. S. Modenov, A. S. Parkhomenko. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. M., Nauka, 1976. (in Russian)]

[6] Г. Паскалев. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част I. С., 1979. [G. Paskalev. Metodichesko rakovodstvo za reshavane na zadachi po vissha matematika, chast I. S., 1979. (in Bulgarian)]

[7] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии (часты I). М., Наука, 1986. [V. V. Prasolov. Zadachi po planimetrii (chasty I). M., Nauka, 1986. (in Russian)]
[8] З. А. Скопец. Геометрические миниатюры. М., Просвещение, 1990. [Z. A. Skopets. Geometricheskiye miniatyury. M., Prosveshcheniye, 1990. (in Russian)]
[9] Ю. М. Смирнова. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., МЦНМО, 2016. [Yu. M. Smirnova. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii i lineynoy algebre. M., MTSNMO, 2016. (in Russian)]
[10] Г. Станилов, А. Борисов. Нови срещи с коничните сечения. С., Народна просвета, 1988. [G. Stanilov, A. Borisov. Novi sreshti s konichnite secheniya. S., Narodna prosveta, 1988. (in Bulgarian)]
[11] А. А. Стражевский. Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы. М., УЧПЕДГИЗ, 1954. [A. A. Strazhevskiy. Zadachi na geometricheskiye mesta tochek v kurse geometrii sredney shkoly. M., UCHPEDGIZ, 1954. (in Russian)]
[12] И. Тонов, И. Шаркова, М. Христова, Д. Капралова, В. Златилов. Математика – 11. клас. Профилирана подготовка – Геометрия. Регалия 6, 2020. [I. Tonov, I. Sharkova, M. Hristova, D. Kapralova, V. Zlatilov. Matematika – 11. klas. Profilirana podgotovka – Geometriya. Regaliya 6, 2020. (in Bulgarian)]
[13] Н. Ф. Четверухин. Методы геометрических построений. М., УЧПЕДГИЗ, 1952. [N. F. Chetverukhin. Metody geometricheskikh postroyeniy. M., UCHPEDGIZ, 1952. (in Russian)]
[14] В. Г. Чичигин. Методика на обучението по геометрия – Планиметрия. С., Народна просвета, 1964. [V. G. Chichigin. Metodika na obuchenieto po geometriya – Planimetriya. S., Narodna prosveta, 1964. (in Bulgarian)]
[15] И. Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии – Планиметрия. М., Наука, 1982. [I. F. Sharygin. Zadachi po geometrii – Planimetriya. M., Nauka, 1982. (in Russian)]

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

COMPUTER MODELS FOR THE STUDY OF PYRAMIDS WITH EQUAL EDGES INSCRIBED IN A SPHERE

Toni Chehlarova[1], **Georgi Gachev**[2]
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
e-mails:: [1]toni.chehlarova@math.bas.bg, [2]gachev@math.bas.bg

This paper provides educational resources for the study of pyramids with equal edges that are inscribed in a sphere. Potential use of the resources by students of different age groups is illustrated. A recommendation is made to use the created computer models both for obtaining the answer to a given task with sufficient accuracy and for learning the software capabilities. The possibilities for the simultaneous development of mathematical and digital competence with a focus on solving applied tasks or forming the ability to formulate hypotheses are discussed.
Keywords: computer model, pyramid, research approach, GeoGebra, critical thinking, education

КОМПЮТЪРНИ МОДЕЛИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПИРАМИДИ С РАВНИ РЪБОВЕ, ВПИСАНИ В СФЕРА

Тони Чехларова[1], **Георги Гачев**[2]
Институт по математика и информатика,
Българска академия на науките
e-mails:: [1] toni.chehlarova@math.bas.bg, [2] gachev@math.bas.bg

Представени са образователни ресурси за изследване на пирамиди с равни ръбове, които са вписани в сфера. Описани са възможности за използването им от ученици от различни възрастови групи. Направена е препоръка за работа със създадените компютърни модели както за получаване с достатъчна точност на отговор на поставена задача, така и за усвояване на софтуера. Обсъдени са възможности за едновременното развитие на математическа и дигитална компетентност, с насоченост към решаване на приложни задачи или формиране на умение за формулиране на хипотези.
Ключови думи: компютърен модел, пирамида, изследователски подход, GeoGebra, критично мислене, образование

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.192-198
2020 Mathematics Subject Classification: 97Gxx, 97Uxx.

Въведение

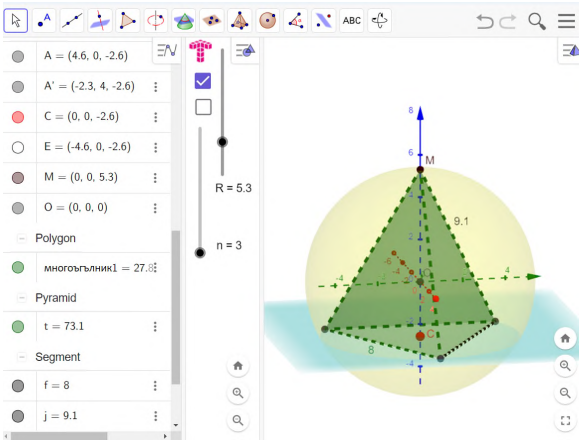
В задача в учебник по математика за 6. клас, свързана с използване на броя на ръбовете на пирамида, се използва несъществуващ обект: „За дадената пирамида (на фигура е изобразена правилна шестоъгълна пирамида) околните и основните ръбове са равни и сборът им е равен на 3.6 м. Определете дължините на ръбовете“. За извършване на изследване и формулиране на хипотези за съществуването на пирамиди с равни ръбове в [2] са представени компютърни модели, които са изработени с динамичен софтуер *GeoGebra* [5] и са предоставени във Виртуалния училищен кабинет по математика, разработван в Института по математика и информатика на Българска академия на науките [1]. Описани са и варианти на манипулативи и е обсъдена възможността за поставяне на тази изследователска задача за различни възрастови групи. Посочено е, че установяването на факта, че само три вида пирамиди могат да бъдат с равни ръбове – триъгълна, четириъгълна и петоъгълна, мотивира за продължаване на изследванията, например свързани с техни измервания.

Тук ще представим образователни ресурси за изследване на пирамиди с равни ръбове, които са вписани в сфера.

Компютърни модели за изследване на пирамидите с равни ръбове, вписани в сфера

Като имаме предвид, че учениците са установили факта, че само три вида пирамиди могат да бъдат с равни ръбове – триъгълна, четириъгълна и петоъгълна, ще разглеждаме само тези три вида пирамиди. Компютърните модели могат да се ползват на адрес `http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=274` и са свързани с решаването на две задачи.

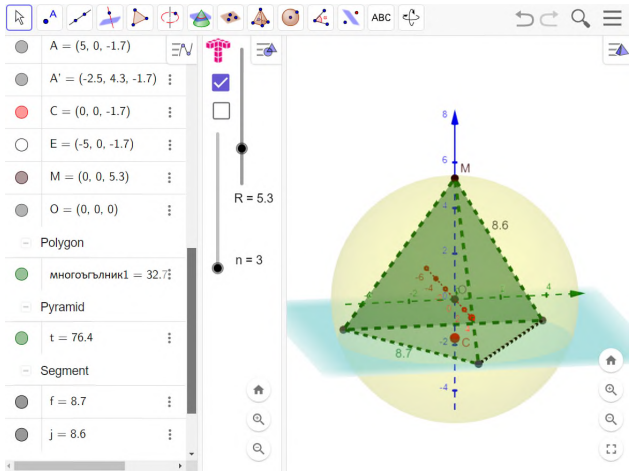
Задача 1. Намерете ръба на пирамида с равни ръбове, вписана в сфера с радиус 5,3 cm.



Фигура 1. Помощен файл с правилна пирамида, вписана в сфера

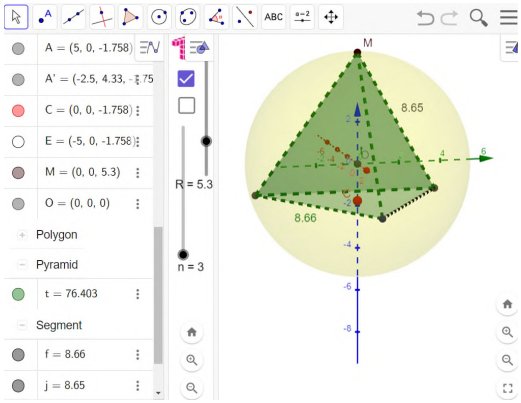
В чертожното поле на динамичния файл е изобразена правилна пирамида, вписана в сфера (фиг. 1). С плъзгача-параметър R се променя радиусът на сферата, а плъзгачът-параметър n се мени от 3 до 5 и определя вида на пирамидата, съответно триъгълна, четириъгълна или петоъгълна. С точката C се управлява равнината на основата.

Радиусът на сферата отговаря на условието, затова с преместване на точката C се стремим да получим равенство на ръбовете на триъгълната пирамида (фиг. 2).



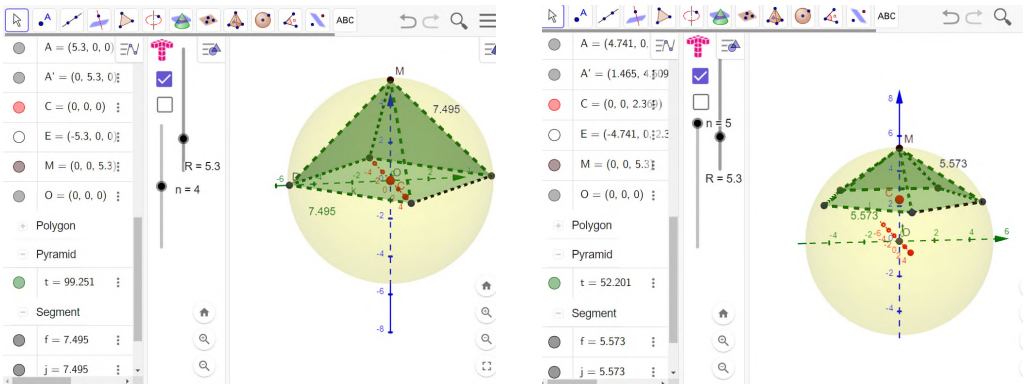
Фигура 2. Получаване на пирамида с равни ръбове

За да постигнем по-голяма точност, подходящо е да се промени точността на показване на данните (например до три знака след десетичната запетая), както и да се използва zoom за по-прецизно преместване на точката C (фиг. 3).



Фигура 3. Промяна на настройките за повишаване на точността на резултата

Аналогични са дейностите за намиране на дължината на ръба на четириъгълна и на петоъгълна пирамида, вписана в същата сфера (фиг. 4).



Фигура 4. Резултати за четириъгълна и петоъгълна пирамида

Използването на предоставения компютърен модел позволява с добра точност да се получи отговор на задачата. В конструкционния протокол на файла може да се проследи построението на конструкцията (първите стъпки може да се разгледат на фиг. 5).

	Name	Icon	Description	Value
1	Number R			R = 5.3
2	Point O		Intersection point of yAxis, zAxis	O = (0, 0, 0)
3	Point M		(0, 0, R)	M = (0, 0, 5.3)
4	Sphere a		Sphere through M with centre O	a: x² + y² + z² = 28.09
5	Point C		Point on zAxis	C = (0, 0, -1.758)
6	Line i		Line through C parallel to xAxis	i: X = (0, 0, -1.758) + λ (1, 0, 0)
7	Plane p		Plane through C perpendicular to zAxis	p: z = -1.758
8	Circle c		Intersection curve of p, a	c: X = (0, 0, -1.758) + (5 cos(t), 5 sin(t), 0)
9	Point A		Intersection point of c, i	A = (5, 0, -1.758)
9	Point E		Intersection point of c, i	E = (-5, 0, -1.758)
10	Image снимка1			снимка1
11	Number n			n = 3
12	Number α		360 / n	α = 120
13	Point A'		A rotated by angle α° about an axis perpendicular to xOyPlane and passing through O	A' = (-2.5, 4.33, -1.758)
14	Polygon многоъгълник1		Polygon(A, A', n, xOyPlane)	многоъгълник1 = 32.475

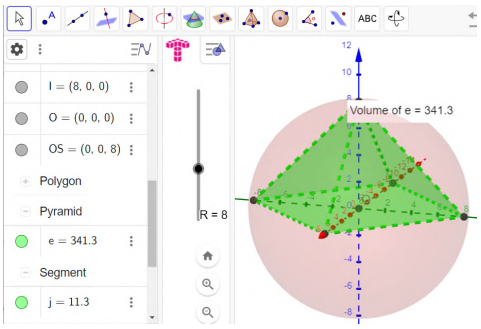
Фигура 5. Част от конструкционния протокол

При създаване на тази динамична конструкция точката C, с която се променя равнината на основата на пирамидата, е произволна точка от оста Oz. За по-лесно постигане на точен резултат за равенството на ръбовете на пирамидата, може да се въведе плъзгач-параметър и тя да се предефинира чрез координатите си.

Подходящо е да се използва този файл и за допълнителни изследвания. Например може да се направи проверка за максимален обем за всеки от трите вида правилни пирамиди, вписани в сферата, и да се формулират хипотези. Очаквано е учениците да забележат разположението на четириъгълната пирамида с равни ръбове, вписана в сфера, свързано с центъра на сферата.

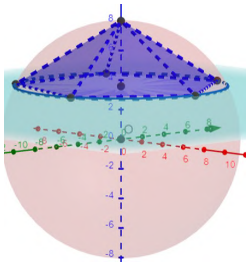
Задача 2. Намерете най-големия възможен обем на пирамида с равни ръбове, вписана в сфера с радиус 8 cm.

Тъй като съществуват само три вида пирамиди с равни ръбове – триъгълна, четириъгълна и петоъгълна, за решаване на задачата е достатъчно да се сравнят обемите им за конкретния случай. Към тази задача са предоставени няколко компютърни модела, всеки от които съдържа една или три пирамиди с равни ръбове, вписани в сфера. Радиусът на сферата R може да се променя с плъзгач-параметър. Обемът на всяка от пирамидите може да се изведе с бутон в чертожното поле, или да се използва стойността от алгебричния прозорец (фиг. 6).



Фигура 6. Използване на бутон или алгебричния прозорец за извеждане на стойности

При построяване на моделите са използвани както команди, така и инструменти от лентата с инструменти (фиг. 7).



	Name	Icon	Description	Value
1	Image снимка1			снимка1
2	Number R			R = 8
3	Point OS		(0, 0, R)	OS = (0, 0, 8)
4	Point O		Intersection point of zAxis, xAxis	O = (0, 0, 0)
5	Sphere a		Sphere through OS with centre O	a: $x^2 + y^2 + z^2 = 64$
6	Plane f			f: y = 0
7	Point O5		(0, 0, R - R (5 - sqrt(5)) / 5)	O5 = (0, 0, 3.6)
8	Plane q		Plane through O5 perpendicular to zAxis	q: z = 3.6
9	Circle r		Intersection curve of q, a	r: X = (0, 0, 3.6) + (7.2 cos(t), 7.2 sin(t), 0)
10	Point J		Intersection point of r, f	J = (-7.2, 0, 3.6)
10	Point M		Intersection point of r, f	M = (7.2, 0, 3.6)
11	Point M'		M rotated by angle 72° about an axis perpendicular to xOyPlane and passing through O5	M' = (2.2, 6.8, 3.6)
12	Angle β		Angle between M, O5, M'	β = 72°
13	Polygon многоъгълник3		Polygon(M, M', 5, xOyPlane)	многоъгълник3 = 121.7

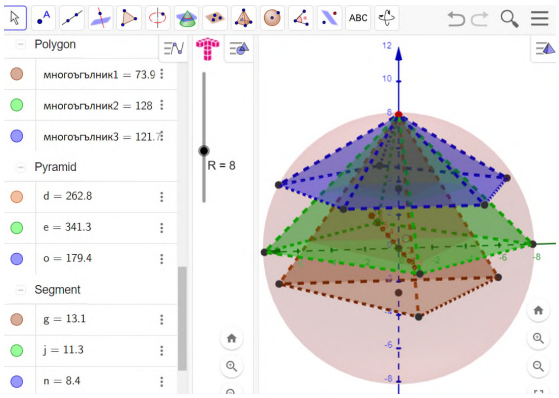
Фигура 7. Наблюдение на построението

Удобно е едновременното наблюдение на трите пирамиди за извършване на сравнения на основни измерения – дължина на ръб, лице на основа, обем на пирамида, височина на пирамида (фиг. 8).

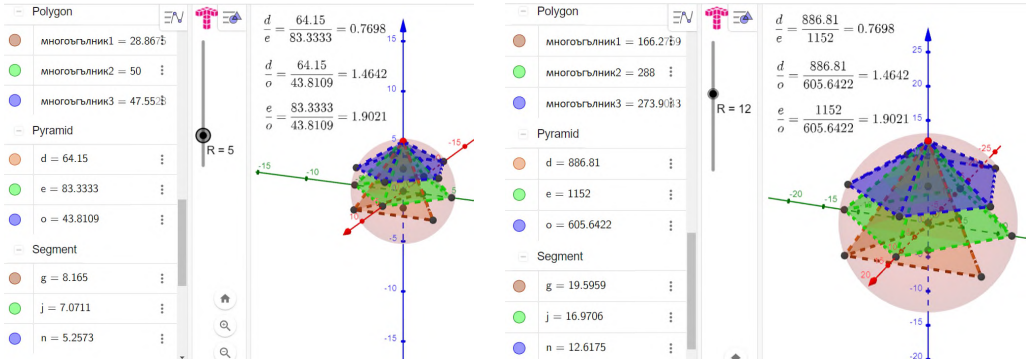
Подходящо е да се изведат някои отношения и да се наблюдава изменението им при промяна на сферата, например отношения на обемите (фиг. 9).

Очаквано е запазването на отношението на обемите – трите пирамиди са вписани в една и съща сфера, а отношението на обема на съответното кълбо и вписаната в нея n-ъгълна пирамида с равни ръбове е постоянно.

Извършването на такова изследване с пирамиди е подходящо за учениците от 6. и 7. клас. Учениците, които са изучавали ирационални числа, е подходящо да продължат и с аналитично решаване на задачите. При $n = 4$ лесно се стига както до



Фигура 8. Едновременно наблюдение на трите пирамиди



Фигура 9. Наблюдение на отношения на обемите

връзката между ръба b на пирамидата и радиусът R на описаната около нея сфера $b = \sqrt{2}R$, така и до формулата $V = \frac{\sqrt{2}}{6}b^3$. При $n = 3$ се получава $b = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$, съответно $R = \frac{\sqrt{6}}{4}b$, а за обема $V = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3$. При $n = 5$ резултатите са $b = \frac{1}{5}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}R$ и $R = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}b$, а за обема съответно $V = \frac{5 + \sqrt{5}}{24}b^3$. За получаването на тези резултати разгледаните динамични файлове отново са от помощ, като е подходящо да се правят и допълнителни построения.

Заключение

Компютърни модели могат да бъдат подходящо средство за решаване на такива задачи – както за формулиране на хипотези, така и за решаване на практически задачи с достатъчна точност. За създаването на условия за едновременното развитие на математическа и дигитална компетентност, особено с насоченост към решаване на приложни задачи или формулиране на хипотези, трябва да се полагат грижи. На различни равнища се отчитат и повишените изисквания към дигиталните компетен-

тности на учителите и към компетентността им да организират обучение в контекста на STEM [4], [6]. Такива задачи се предлагат в онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“ [3] и могат да се намерят в раздела за състезания на Виртуалния училищен кабинет по математика.

Благодарност

Този материал е финансиран по Национална програма „Образование с наука“ (Споразумение между Министерството на образованието и науката и Българската академия на науките Д01-172 от 18.09.2024 година).

Литература

[1] T. Chehlarova, G. Gachev, P. Kenderov, E. Sendova. A Virtual School Mathematics Laboratory. *In: 5th National Conference on e-Learning. University of Rouse*, (2014). 146 – 151

[2] T. Chehlarova. Exploration of Pyramids with Equal Edges to Overcome Misconception. *Online journal Educational Forum* 9, 3, (2021), 13-18 (in Bulgarian)

[3] G. Gachev, P. Kenderov, T. Chehlarova. Tasks from the Online Competition "Viva Mathematics with A Computer": A Resource for Work in STEM Centers. *Mathematics and Informatics*, (2023), 66 (6), 579-595(in Bulgarian)

[4] D. Galabova. Developing STEM competence in future teachers in mathematics in the trend of STEM education. *Mathematics and Education in Mathematics*, (2022), 51, 124-136. (in Bulgarian)

[5] J. Hohenwarter, M. Hohenwarter, Z. Lavicza. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, (2009), 28(2), 135 – 146.

[6] P. Petkov, S. Georgieva, E. Koleva. Mathematics in an electronic activity with Geogebra - MEGA. *Mathematics and Education in Mathematics*, (2021), 373-380. (in Bulgarian)

IN MEMORIAM

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

IN MEMORIAM: RAYTCHO LAZAROV – MATHEMATICIAN, INSPIRER OF FUTURE GENERATIONS OF MATHEMATICIANS, A MAN WITH A CAPITAL "M" (1943 – 2024)

Petar Kenderov[1], **Evgenia Sendova**[2]
[1,2]Institute of Mathematics and Informatics,
Bulgarian Academy of Sciences
e-mails:: [1]pkend@math.bas.bg, [2]jenny@math.bas.bg

IN MEMORIAM: РАЙЧО ЛАЗАРОВ – МАТЕМАТИК, ВДЪХНОВИТЕЛ НА СЛЕДВАЩИ ПОКОЛЕНИЯ МАТЕМАТИЦИ, ЧОВЕК (1943 – 2024)

Петър Кендеров[1], **Евгения Сендова**[1]
[1,2]Институт по математика и информатика,
Българска академия на науките
e-mails:: [1]pkend@math.bas.bg, [2]jenny@math.bas.bg

Трудно е да преглътнем мъката, когато загубим приятел, който пееше, дирижираше и играеше хоро само дни преди да ни напусне! Но тази загуба не е само наша – на неговите приятели, колеги и ученици. Тя е и на математиката и информатиката, защото проф. Райчо Лазаров беше световно известен учен и ментор с международен авторитет и влияние.

Преди да предоставим думата на негови близки съратници и последователи, бихме искали да споделим няколко думи за живота и дейността му.

Проф. дмн Райчо Лазаров е роден на 23 януари 1943 г. в гр. Кърджали в семейството на Димитър Райчев Лазаров и Тодорка Киркова Джерахова. Завършва гимназия „Антим I" в гр. Златоград през 1961 г. Продължава образованието си по математика в Математическия факултет на Софийския университет „Св. Климент

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.201-212
2020 Mathematics Subject Classification: 01A70.



Охридски“ (1961 – 1963) и в Университета във Вроцлав, Полша (1963 – 1966). В периода 1968 – 1972 г. е аспирант в Московския държавен университет „Ломоносов“. Специализира в Лабораторията „Ръдърфорд“ в Англия (1976 – 1977).

Математическата колегия разпознава в лицето на Райчо Лазаров един от основоположниците на развитието на числените методи за крайни елементи. Той беше учен с неоценим принос към утвърждаването на българската математическа школа на световната сцена. Теоретичните и приложните му изследвания в областта на числения анализ, крайните разлики, крайните елементи и високопроизводителните научни пресмятания са високо оценени. Публикациите му, разработени в сътрудничество с учени от Института по математика и информатика (ИМИ) и Института по информационни и комуникационни технологии (ИИКТ) при БАН, се радват на световна известност и признание.

Сред многобройните му отличия са: Медал „Марин Дринов“ с лента на БАН (2013), почетното звание **Dr. Honoris Causa** на Софийския университет „Св. Климент Охридски“ (2006), **Медал на Института по математика и информатика при БАН** (2008), **Pichoridis Distinguished Lectureship от Университета на Крит**, Гърция (2008), както и званието **Erasmus Mundus Lecturer** в Европейското училище по индустриална математика (ESIM) в Университета Кайзерслаутерн (2008 – 2011).

Проф. Райчо Лазаров е **почетен професор на Texas A&M University**, носител на почетния знак **„За заслуги към БАН“** и **професор емеритус на ИМИ**

– **БАН**.

Райчо Лазаров създаде прекрасно семейство. Съпругата му Донка (с която са делили радости и грижи в продължение на 56 години), дъщерите им Дора и Ирина и тримата им внуци Алекс, Джак и Джордж го описват като уникален съпруг, любещ, грижовен и щедър баща и дядо.

Представа за неговата работа в България и на международната сцена, както и за изключителното му сътрудничество с колеги и ученици в периода 1986 – 1991 г., можем да получим от неговите автобиографични бележки, споделени с приятели:

За работата на Райчо Лазаров през периода 1986 – 1991 в първо лице

Защитих дисертация за доктор на математическите науки през 1982 г. и бях назначен за професор в ИМИ на 21 юли 1986 г. През 1987 г. беше открита лабораторията по „Числени методи“, която ръководех. Сред моите сътрудници в лабораторията бяха: ветеранът в областта Стефка Димова, защитила докторат във ВЦ на АН СССР; близкият ми колега и съавтор Михаил Касчиев, защитил докторат в ОИЯИ, Дубна; Наталия Кольковска, Олег Илиев и Татяна Черногорова, защитили докторати в МГУ под ръководството на акад. А. Самарский; Панайот Василевски и Таня Костова, защитили докторати под ръководството на акад. Благовест Сендов. Имах чудесни сътрудници, като Ангелина Йотова и Вая Ракидзи, както и много добри и силни студенти и докторанти, сред които Людмил Зикатанов, Иля Мишев, Иван Йотов, Светозара Петрова и Тодор Димов.

След една година като гост-професор в Университета на щата Уайоминг (1987 – 1988), създадох международни контакти и започнах работа по съвместни научни теми.

(. . .) През 1989 г. напуснах Координационния център по информатика и изчислителна техника (КЦИИТ), където преди това бях зам.-директор на Лабораторията за паралелни алгоритми с директор акад. Благовест Сендов. Тази промяна ме освободи от административни задължения, но запазих научните си връзки с ученици и сътрудници от КЦИИТ – Панайот Василевски, Светозар Маргенов, Христо Джиджев и Иван Димов.

(. . .) Сътрудничеството на лабораторията по „Числени методи“ с два института в Университета на щата Уайоминг – Institute of Scientific Computing и Enhanced Oil Recovery Institute, ръководени от професор Ричард (Дик) Юинг – се задълбочи. През лятото на 1989 г. с Олег Илиев и Светозар Маргенов прекарахме един месец в Университета на Уайоминг, работейки по съвместни теми с проф. Юинг. Една от основните задачи на института му беше подобряване на точността и ефективността на методите за решаване на математически задачи, свързани с моделиране на извличането на петрол от подземни находища.

Нашата задача беше разработването на метод, който използва сравнително груба мрежа с локално сгъстяване, така че изчислителните ресурси (операции и памет) да останат сравнително малки. Това беше типичен пример за научно-приложна задача, изискваща както математически методи за апроксимация, та-

ка и оптимално използване на компютърна архитектура с многопроцесорни машини.

(. . .) През зимата на 1990 – 1991 г. (лятото в Австралия) прекарах продуктивен период в Канбера. Участвах в лекции на Джим Брамбъл върху многомрежови методи и разделяне на области, които положиха основата за нашите съвместни статии в следващите години. Също така слушах лекции на Вернер Райнболд за нелинейни системи и изнесох две лекции по суперсходимост в метода на крайните елементи, което задълбочи сътрудничеството ми с Грахам Кери от Университета на Тексас в Остин.

В същото време работех дистанционно с Панайот Василевски върху конструиране и обосноваване на методи за локално сгъстяване на мрежата при решаване на диференциални уравнения. За три години (1990 – 1992) имах 15 публикации – един от най-продуктивните периоди в кариерата ми.

През май 1991 г. получих предложение за постоянна позиция като професор в департамента по математика на Университета на щата Уайоминг.

Спомените на Райчо Лазаров са ценни не само от фактологична гледна точка. Те разкриват и забележително повествователно умение. Спомените му се четат „на един дъх“.

В спомените на свои сътрудници и приятели

Чл.-кор. Светозар Маргенов, ИИКТ – БАН

Огромна е ролята на Райчо Лазаров в моя живот. През изтеклите 50 години той беше мой най-уважаван и обичан асистент и професор, научен и административен ръководител, и с годините все по-близък колега, съавтор и приятел. Неговата изключителна математическа ерудиция, академична етика и многостранен талант бяха вдъхновение, мотивация и неоценима подкрепа за поколения студенти и млади учени, избрали пътя към красотата на изчислителната математика.

През 1977 г. Райчо Лазаров се завърна от Англия след специализация в Лабораторията Ръдърфорд и аз имах шанса да бъда един от неговите първи дипломанти. С ентусиазъм се включихме в организирания от Райчо кръжок по метод на крайните елементи. В началото всеки от нас трябваше да представи по една глава от току-що станалата достъпна у нас в превод на руски книга G. Strang, G. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, 1973. Това се оказа инициатива с много голямо въздействие. През следващите години резултатите на Райчо Лазаров и неговите ученици дадоха основание за международно признание на българската школа в областта на вариационните числени методи за решаване на диференциални уравнения.

Силни спомени съм запазил от лятото на 1989 г. Заедно с Райчо Лазаров и Олег Илиев посетихме за един месец Университета на Уайоминг по покана на професор Ричард Юинг, директор на Института по научни пресмятания. Разработвахме математически обосновани методи с локално сгъстяване на мрежата – към този

момент един от актуалните проблеми при моделирането на нефтени полета. Това беше типичен пример на научно-приложна задача, където за ефективното ѝ решаване играеше роля както математиката, така и съответната компютърна архитектура. Сътрудничеството с Дик Юинг има много измерения. Едно от тях е свързано със създаването и развитието на секцията по Научни пресмятания, на която дълги години съм ръководител.

През 2017 г. по покана на Райчо посетих Университета на Тексас (TA&MU) в Колидж Стейшън. Започнахме дискусии по една напълно нова тематика, свързана със създаването на числени методи с оптимална изчислителна сложност за решаване на уравнения, включващи дробна степен на оператора на дифузия в многомерни области със сложна геометрия. През следващата 2018 г.публикувахме (С. Харизанов, Р. Лазаров, С. Маргенов, П. Маринов и Я. Вутов) пионерска работа, в която предложихме принципно новия метод BURA (Best Uniform Rational Approximation). Така беше поставено началото на вече утвърдилата се българска школа в областта на числените методи за дробно-дифузионни задачи.

Райчо Лазаров е инициатор и съорганизатор на най-авторитетните международни научни форуми в областта на изчислителната и приложна математика в страната, в това число поредиците от конференции "Numerical Methods and Applications" и "Large Scale Scientific Computing". Тай е един от инициаторите на българската секция на SIAM. Огромна е заслугата на Райчо за сплотеността на колегията от български учени, работещи както в България, така и в редица от най-престижните университети и изследователски центрове в чужбина.

Той беше изключително уважаван и обичан от всички нас.

Дълбок поклон и благодарност!

Проф. Веселин Петков, Institut de Mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux

Познавам Райчо още от студентските си години (1962 – 1967) и с него са свързани безброй събития и спомени. Той притежаваше изключителната способност да установява контакти и да помага на математици, работещи в най-различни области. Един от примерите, които искам да споделя, е организираната съвместно с него международна конференция „Интегрални уравнения и обратни задачи", проведена през септември 1989 г. Целта беше да поканим водещи математици, работещи в спектралната теория, теорията на разсейването и числените методи, както и млади български математици, които се занимаваха с тези области. Бяха преодолени много трудности, нужно беше да убедим мнозина, че една такава конференция ще донесе значителни ползи. Интересът надмина всичките ни очаквания – световноизвестни математици от СССР изявиха желание да участват, като за много от тях това беше първото им пътуване в чужбина.

Заедно с Райчо трябваше да организираме всичко и неговият такт, отзивчивост и решителност се оказаха безценни за мен. Допълнителна трудност беше и фактът, че за повече от месец летище София беше в ремонт и не се приемаха международни полети. Полетите бяха отклонявани към летището в Пловдив. Благодарение на Райчо успяхме да се справим и конференцията премина с голям

успех. Участваха 120 души, а докладите бяха публикувани в Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 235, 1991.

Райчо проявяваше интерес към различни области на математиката и активно подкрепяше млади български математици в тяхното творческо израстване – от аспиранти до световно признати професори. В последните години той следеше редовно видеозаписи на различни доклади. Бях много трогнат, когато след моя доклад на тема Dynamical zeta function for billiard flow, *изнесен на колоквиума на МЦМН (София, 19 март 2024 г.), той ме поздрави с думите, че това е бил най-сложният доклад, който е проследявал през последните 20 години. Това беше и последната ни среща чрез видео връзка в Zoom.*

Олег Илиев, Фраунхофер институт по индустриална математика, Кайзерслаутерн

За мен Райчо е олицетворение на блестящ учен и ефективен и внимателен ръководител. Райчо беше човек с голямо сърце – винаги загрижен, винаги готов да помогне. Той беше изключително уважаван и обичан от всички нас.

Беше есента на 1979 година, когато за първи път се срещнах с Райчо. Бях студент в четвърти курс на Московския университет, потопен в света на математиката, а той бе там по работа. Случайно чу българска реч, приближи се и се запознахме. Разговорът се завъртя около моите занимания, а когато му разказах какво изучавам, той ми предложи да избера тема за дипломна работа, свързана с тематиката, която развиваше заедно с група в София и в сътрудничество с групата на академик Самарски в Москва. Това предложение промени живота ми. Съгласих се и това щеше да бъде началото на едно дългогодишно сътрудничество и приятелство с Райчо.

След като завърших университета, започнах работа в Лабораторията по числени методи в Института по математика при БАН, ръководена от Райчо. Атмосферата в Лабораторията ме впечатли изключително много. Всички работеха с ентусиазъм, мотивирани да постигат нови научни резултати. Колективът беше изграден на основата на уважение и подкрепа – място, където нямаше завист, клюки или интриги. Обсъжданията бяха открити, а взаимоотношенията – приятелски. Често отбелязвахме празници заедно или просто се събирахме след работа, за да продължим научните дискусии в неформална обстановка.

Райчо имаше изключителен усет към младите учени. Той подкрепяше всеки, който работеше усърдно и проявяваше желание да се развива. Благодарение на него заминах за аспирантура в Московския университет. С него и с академик Самарски избрахме тема от общ интерес – моделиране на процеси на затвърдяване на метали, свързана със сътрудничество между Института по математика и Института по металознание. След аспирантурата Райчо ми възложи да координирам работата по тази тема между двата института – задача, която приех с уважение и отговорност. Това бе характерно за неговия стил на ръководене – той имаше доверие в младите и им поверяваше отговорни задачи.

През 1988 година Райчо ми повери организацията на втората международна конференция по числени методи – събитие, което той стартира през 1984 г., за

да събере учени от Изтока и Запада. Конференцията премина с огромен успех и събра изтъкнати математици от двете страни на «Желязната завеса» (която тогава вече започваше да се руши). За Райчо това беше голямо удовлетворение.

Когато Райчо се премести в САЩ, връзките му с лабораторията останаха здрави. Организираше сътрудничество със западни университети и визити, от които аз също имах възможността да се възползвам. През 1991 – 1993 година например заедно със Светозар Маргенов работехме за по няколко месеца с него и Дик Юинг в Университета на Уайоминг. Райчо не само че организираше тези визити, но и се грижеше за всяка подробност – посрещна ни на летището в Денвър, което беше на около 3 часа път от Ларами, помогна ни с настаняването и прекарваше време с нас в своя дом, помагаше дори с пазаруването.

В научната работа Райчо бе безкомпромисен към стандартите. Работата по съвместни статии с него беше истинско предизвикателство, но и невероятно обучение. Един конкретен случай остава запомнящ се – статия, върху която работихме и редактирахме цели 35 пъти, като няколко пъти започвахме от нулата. Това бе урок по професионализъм, който остави дълбок отпечатък върху мен.

Дори след като се преместих в Германия през 1999 г., връзките ми с Райчо останаха силни. Той и Дик Юинг често посещаваха Кайзерслаутерн, където подписаха меморандум за сътрудничество с местния университет. Това отвори възможности за обмен на студенти и съвместни проекти, ръководехме съвместно аспиранти.

По това време много от сътрудниците на Лабораторията по числени методи в София бяха получили добри позиции в Западна Европа и САЩ и Райчо всячески способстваше за сътрудничеството между тези, които бяха заминали, и тези, които бяха останали.

Дълбок поклон и безкрайна благодарност – това, което съм днес, дължа до голяма степен на него.

Проф. Станислав Харизанов, ИИКТ – БАН, ИМИ – БАН

Нямах честта да познавам лично Райчо преди 2015 г., когато се засякохме в Созопол на юбилейната 10-а конференция „Large-Scale Scientific Computations“, традиционно организирана от секция „Научни пресмятания“ към ИИКТ – БАН, чийто член станах в края на 2014 г. Но през годините, прекарани в Германия, съм чувал името му не един или два пъти, обикновено в контекста на „гостът ни е бивш докторант на проф. Райчо Лазаров“. Смятал съм, че немците не са много емоционални хора, особено в академичната общност. Когато обаче споменаваха името на Райчо, винаги го правеха с огромно уважение и дълбока симпатия. В Созопол моментално разбрах „тайната“ за тяхното непривично поведение.

Райчо беше изключителен човек: винаги усмихнат, разбиращ, интересуващ се и подкрепящ. Не е имало случай да дойде до Института и да не се отбие да си поговорим на чаша кафе. А темите бяха широкообхватни: от наука и олимпийска математика, до баскетбол и политика. Работната му етика бе изумителна и вдъхновяваше и другите около него. А съветите му винаги бяха ненатрапчиви, тактични, но същевременно право в целта. В периода 2018 – 2020, заедно със

Светозар Маргенов и Joseph Pasciak, Райчо имаше водеща роля за развитието на методите BURA за числено решаване на дробни по пространството елиптични задачи. Колегите от Австрия и до ден днешен на шега наричат този метод „The BUlgaRiaAn Method“, а популярността и ефективността му се измерва в трицифрен брой на независимите цитирания в SCOPUS. След всяко международно състезание по математика за ученици Райчо неизменно поздравяваше отбора ни и после правехме анализ на представянето. За съжаление така и не успяхме да се срещнем на баскетболното поле, макар и неколкократно да бяхме правили планове за това.

Поклон пред паметта на проф. Райчо Лазаров – наставник, съавтор, колега и приятел! Всички, които се докоснахме до него, станахме по-добри не само като учени, а и като хора.

Боян Димитров от името на „чуците“

Студентски години. *Някъде в средата на август 1961 г. едно министерско постановление за развитие на математиката в България събра около 400 момчета гимназисти (с Райчо Лазаров бяхме сред тях) на приемен изпит по математика с обещанието да не ходим войници в задължителната тогава казарма, ако бъдем приети в Софийския университет, специалност математика. И двамата с Райчо бяхме приети. По-късно разбрахме, че предната година така били приети Петър Кендеров, Стоян Недев, Генчо Скордев, Петър Петров, Радостин Иванов, Цветан Игнатов, Тодор Боянов, Кирил Кирчев, Любомир Лилов, Стефан Радев, Евгени Христов. По-късно те станаха групата на „Кюшетата“. Ние пък станахме „Чуците“ (дума, образувана аналогично на рак-раци, звук-звуци). Живеехме в студентските общежития на 4-ти километър. Бяхме по над 10 души на кушетки в огромни стаи, наричани читални, с по едно шкафче. За втори курс вече се бяхме разбрали с колегите от випуска и тези от общежитието да се заселим заедно. А как пееше Райчо! Току вземе китарата и подхване някоя родопска песен. От него научихме „Гурбетчията“. И до сега ме кара да потръпвам, като се сетя. . .*

Аспиранти в МГУ. *В сградата на МГУ математиците бяхме настанени от 14 етаж нагоре – всеки сам в едната от две стаички (двушки) с един вход. В другата стаичка беше настанен руснак или някой от републиките на тогавашния СССР. Райчо беше през една „двушка“ до мен. Кухните бяха с газови котлони и големи чайници и шкафчета. По средата на близо 100 метровия коридор имаше голяма зала за събрания, беседи, шахматни сеанси, другарски срещи. Помня, че там веднъж дойде тогавашният шампион Анатолий Карпов и ни победи всички в сеанс по едновременна игра на шах. При нас често идваше големият математик акад. Павел Сергеевич Александров с беседи за велики музиканти и композитори, като представяше музиката им по свой избор. Залата биваше препълнена от желаещи да го видят и чуят.*

Българските аспиранти си създадохме собствен хор. На един от конкурсите на българските хорове в Москва и жури от Българското посолство нашият хор спечели първото място, а ние с Райчо бяхме солисти.

Професионални и житейски неволи. *Когато се завърнахме от аспиранту-*

рата в Русия, повечето постъпихме на работа в ЕЦНПКММ – Единен център за наука и подготовка на кадри по математика и механика към БАН. На българска територия нашите математици успяха да се запознаят със световни светила като Дородницин, Самарски, Гнеденко, Понтрягин, Урбаник, Дейвид Кендал, Йежи Нейман. Наскоро защитилите докторски дисертации млади българи увлякоха в работата и интересите си редица студенти и ученици, жадни за научно израстване и развитие. Моите ученици доктори са 9, а Райчовите са поне двойно повече (21). Спомням си, че работеше върху числени методи и паралелни алгоритми с използване на т.нар. "крайни елементи". Това са нещо като различни градивни частици, с които може да се построи произволно приближение на всякакъв математически израз или решение на сложно уравнение. Самият Райчо умееше по този начин да пресмята с каква мощ трябва да излъчва един източник на светлина, за да се постигне определено качество на осветление на дадено разстояние от източника, след като премине през някаква среда с определена пропускливост.

Райчо е развеждал именити колеги от научната си област почти във всички възможни центрове, известни с математическото развитие и световната култура.

След като „ние, пътниците" се установихме по новите си работни места в Америка, възобновихме връзките и помежду си, и с колегите, приятелите и родата в България. Постоянно си споделяхме кой как е, какво ново в семейството, как се развиват децата, обменяхме си актуални семейни снимки. Три пъти идвах на гости на Райчо и Донка в Тексас, където имаха къща, а той работеше в Texas A&M University.

Посещенията на Райчо и Донка в България обикновено траеха по месец-два. Престояваха главно в Ямбол, в дома на Донка. Посещаваха двете си – Дора (в Ню Йорк) и Ирина (в Лондон), където са и внуците им. И винаги той организираше по една среща на „чуците" и техните семейства в София. На мене пращаше подробен отчет в характерния си стил и много снимки.

*За мен той бе „Легендарният Райчо". Ако прочетете спомените му, ще се убедите, че заслужава да бъде наричан така. Все още чувам гласа му: „**Докато грее слънце в небето,/докато волен с вятъра тичам,/тебе, Родино, аз ще обичам."***

Вземете една китара, и се опитайте да изпеете цялата песен като него.

Благодаря ти Райчо за всичко, което правеше за нас, за мен. Много ми липсваш. Обичам те приятелю!

По спомени на Таня и Панайот Василевски (написано от Таня)

С Райчо, съпругата му Донка и семейството му се познаваме от много години. От 1979 – с Райчо (най-вече професионално), но от около 1990 г. вече и с Донка Лазарова – също математик по професия, а по-късно – и с двете им Дора и Ирина, които също имат професии, свързани с математиката. Постепенно станахме семейни приятели и останахме свързани за цял живот.

Нашият професионален и дори личен живот бяха силно повлияни от подкрепа-

та, оказана ни от проф. Лазаров, особено в началните години на професионалната ни подготовка и реализация. Неговата човечност и вечен оптимизъм бяха заразителни и по негов пример ние също сме оказвали помощ и подкрепа на по-младите от нас, доколкото е било възможно.

Първото ни запознанство с Райчо стана в последната година (1979) на обучението ни за степен магистратура на Софийския университет. Двамата с Панайот се срещнахме със ст.н.с. (тогавашната титла) Лазаров в Института по математика и получихме задания за курсова работа. Трябваше поотделно да прочетем статия, отнасяща се до моделирането на един вид антена и всеки от нас да напише и даде за изпълнение програма, която решава уравненията от статията.

Този кратък епизод беше единственото, което тогава ни свързваше. Завършихме магистратурата и не предполагахме, че не само ще видим Райчо отново, но и че животът ще ни свърже в близко приятелство и че той дълго ще играе ключова роля в професионалния живот и на двама ни.

Малко след историята с курсовата работа Райчо ни извика и ни попита дали се интересуваме от работа като програмисти в новосъздаден компютърен център към ВИАС (Висш институт по архитектура и строителство). Това беше интересна перспектива за нас като току-що завършили. Макар в края на краищата да не се осъществи, я споменавам като доказателство за загрижеността на Райчо за бъдещето на двама младежи-математици, които почти не познаваше...

Да превъртим времето напред с 8 години. През 1987 г. в Института по математика бе създадена секция по Изчислителна математика, на която ст.н.с. Лазаров стана ръководител. През изминалите години Панайот и аз бяхме защитили кандидатски дисертации и бяхме започнали работа. През 1984 г. Панайот постъпи в Института по математика, към секцията по Математическо моделиране, чийто член тогава беше и Райчо Лазаров. Постепенно Панайот започна да работи с Райчо по общи теми. През 1985 г. в БАН бе създаден КЦИИТ (предшественик на ИИКТ-БАН). Райчо Лазаров стана зам.-директор на Лабораторията по паралелни алгоритми към КЦИИТ, която напусна през 1989 г.

Така през 1987 г. Райчо всъщност работи на две места – в ИМИ и в КЦИИТ, а през същата година Панайот е научен сътрудник в новосъздадената секция по Изчислителна математика с ръководител ст.н.с. Райчо Лазаров. В предходната година (1986) Панайот бе прекарал 4 месеца в Nijmegen University, Нидерландия, на специализация, финансирана от КЦИИТ и с подкрепата на акад. Сендов и ст.н.с. Лазаров. Пътищата ни с Райчо все повече се преплитаха.

Имайки предвид новоразкритата перспектива на паралелните алгоритми за ускоряване на изчисленията и по настояване на акад.Сендов, през 1988 г. Панайот се премести от секцията, ръководена от Райчо в Института по математика, в Лабораторията по паралелни алгоритми към КЦИИТ.

По същото време аз (Таня) работех вече в секцията по Математически модели в биологията към Единния център по биология в БАН, след предаване на дисертацията си през лятото на 1984 г. Когато Панайот се премести в КЦИИТ, аз кандидатствах да заема мястото му в секцията по Изчислителна математика в ИМИ. В тази секция можех да продължа изследванията си върху един нов тип

задачи с приложение в теоретичната биология. Така през 1988 г. станах член на тази секция с ръководител ст.н.с. Райчо Лазаров. По този начин през 1988 г. двамата с Панайот работехме в две различни звена на БАН, ръководени от ст.н.с. Райчо Лазаров.

По-нататък събитията започнаха да се сгъстяват. Райчо замина като гост-професор в САЩ през 1988-89 г., задълбочавайки едно ново сътрудничество с проф. Ричард Юинг (Prof. Richard Ewing) и други колеги от САЩ и Европа. Панайот все повече се ориентираше в тематиката на паралелните алгоритми и специализирани числени методи и започна сътрудничество с Райчо и с Дик Юинг. Аз започнах работа по един вид интегро-диференциални уравнения с приложения в биологията, към които изрази интерес професор Джим Дъглас, с когото съвсем случайно се запознах на конференция в Чехословакия.

Така случайностите и закономерностите се сляха в едно и през 1990 г. по препоръка на Райчо Лазаров, с подкрепата на Джим Дъглас за мен и одобрението и подкрепата на Дик Юинг, Панайот и аз заминахме на едногодишна визита в Университета на Уайоминг за сътрудничество с групата на Юинг.

При самото ни пристигане в Ларами, където се намира университета на Уайоминг, Райчо беше там за кратко време и ни посрещна. Беше спомогнал да ни наемат квартира и предложи да ни заеме пари, за да имаме за начало. Бяхме пристигнали от България през най-кризисното време – август 1990 г., без никакви пари, с всичките си дрехи и обувки и с едно от двете деца. Щяхме да получим заплати месец по-късно. Райчо не само ни даде пари назаем, за да посрещнем разноските за месеца, но и да купим кола – тя беше абсолютна необходимост. След това отидохме заедно да търсим кола и със съветите на Райчо купихме един стар Буик, модел 1978 г.

Тази постъпка на Райчо беше изключително благородна и щедра, като се има предвид, че не е разполагал с излишни пари. По-нататък и ние се отнасяхме с разбиране и помощ към пристигнали след нас българи. Доброто води до добро.

От този момент нататък нашият живот и този на Райчо и семейството му, което все още живееше в България, се преплете безвъзвратно. През следващата 1991 г. семейство Лазарови взеха решение за емигриране в САЩ, отначало в Уайоминг, а след това – заедно с Дик Юинг се преместиха в Тексас. Там Райчо и Донка преподаваха в Texas A&M University (TAMU), College station, до пенсионирането си.

През годините се срещахме често професионално и като приятели. През 90-те години Панайот беше на визити в TAMU, работейки с Райчо и негови колеги и студенти. Райчо и Донка прекараха в Калифорния една година, когато Райчо беше на сабатикал в LLNL (по покана на Панайот и на директора на звеното, в което работеше Панайот). Те също ни посетиха в Калифорния през няколко лета, през които Райчо идваше да работи в LLNL. Аз преподавах един семестър в TAMU по препоръка на Райчо през 2000 г. Докато бях там, естествено, често се срещах със семейство Лазарови. Разговаряхме и по телефона, обменяхме си картички и поздравления, осведомявахме се за живота и здравето си, съчувствахме си, съветвахме се за неща от живота. Напоследък, когато Райчо се пенсионира от TAMU

и прекарваше повече време с Донка в България, се виждахме в София и дори в Ямбол, където ги посетихме през 2022 г. В Ямбол Донка и Райчо ни разходиха из целия град, споделиха с нас мили спомени и спретнаха вечеря у дома им – в къщата, където е израснала Донка. Много мила и топла среща беше. Райчо винаги носеше подаръци за децата при посещенията си у нас, в София или Калифорния. Панайот и Райчо често се срещаха по научни конференции.

През юни 2024 г. посетих сама семейство Лазарови в апартамента им в София. Райчо и Донка с гордост ми показаха направеното, част от което – по проект на Райчо. Райчо беше в прекрасна кондиция – както винаги бодър, бързоходен и оптимистичен. Не предполагах, че това е последната ни среща...

Това, което остава, са резултатите от труда, документирани в статии и книги, и семейството – децата, внуците. Остават студентите, докторантите, които продължават труда и идеите на преподавателя и човека Райчо Лазаров. Остава спомена за добротата, слънчевия характер, оптимизма и мъдростта му.

Да, трудно е да се опишат с думи всички качества, които правеха Райчо Лазаров уникален. Той бе истински учител и приятел – човек, който не само показваше пътя, но и беше готов да ти подаде ръка, когато тръгнеш по него. Винаги ще помним неговата доброта, професионализъм, отдаденост и щедрост в идеите. Той бе неизменна опора в живота на близки, приятели, колеги и ученици и създаваше обстановка, в която всеки максимално да развие и покаже способностите си. Светлината от неговото присъствие в живота ни ще продължава да озарява пътя, по който вървим. Да е светъл и твоят път в безкрайното, приятелю!

Благодарности

Изказваме нашата гореща признателност на всички, които споделиха свои спомени за Райчо и изразяваме съжалението си, че „ограниченията на тома са твърде строги“, за да ги включим в пълния им обем.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

IN MEMORIAM: KEROPE TCHAKERIAN (1944 – 2012)

Azniv Kasparian[1], Konstantin Tabakov[2]
Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, Sofia, Bulgaria
e-mails: [1]kasparia@fmi.uni-sofia.bg, [2]ktabakov@fmi.uni-sofia.bg

IN MEMORIAM: КЕРОПЕ ЧАКЪРЯН (1944 – 2012)

Азнив Каспарян[1], Константин Табаков[2]
Факултет по математика и информатика, Софийски университет "Св. Климент Охридски", София, България
e-mails: [1]kasparia@fmi.uni-sofia.bg, [2]ktabakov@fmi.uni-sofia.bg



https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.213-222
2020 Mathematics Subject Classification: 01A70.

В края на 2024 г. се навършиха 80 години от рождението на бележития математик и дългогодишен преподавател във Факултета по математика и информатика на СУ "Св. Климент Охридски" проф. д-р Керопе Чакърян. Той беше наш учител, вдъхновител, колега и приятел. С огромна любов пишем следващите редове, за да могат тези, които го познаваха, да си спомнят за него, а за по-младите – да се запознаят и докоснат до неговата светла личност.

Проф. д-р Керопе Чакърян е роден на 27 октомври 1944 г. в град Русе. Баща му, Бартев Чакърян, е адвокат с висок авторитет в града. Майка му е дъщеря на търговеца на платове Хачерян. Не само Бартев Чакърян, но и брат му, който е зъболекар, са високо образовани за времето си и се открояват със своята интелигентност. Още като ученик, Керопе Чакърян проявява своите математически заложби. Участва успешно в математическите олимпиади и се класира в челните места. През 1962 г. завършва с отличен успех II СПУ "Баба Тонка", с усилено преподаване на математика. През следващите пет години следва във Факултета по математика и механика на Софийския университет "Климент Охридски". Още като студент, Керопе Чакърян се насочва към крайните групи и започва своята научноизследователска работа в тази област. Защитава успешно дипломна работа на тема "Крайни групи с регулярни автоморфизми". От 1968 г. до 1970 г. е асистент в катедра "Математика" на Висшия институт по машиностроене, механизация и електрификация на селското стопанство в родния си град Русе.

В началото на 1971 г. спечелва конкурс за асистент към катедра Алгебра на Факултета по математика и механика на Софийски университет "Климент Охридски". Още с встъпването си в длъжност, създава отлично впечатление с преподавателската си работа – откроява се със своята прецизност и умението си да поднася в ясен и стегнат вид дори най-сложните алгебрични резултати.
Това води до бързото му кариерно развитие – още през следващата 1972 г. е избран за старши асистент към катедра Алгебра, а от 1978 г. е главен асистент към същата катедра.

Успоредно с преподавателската си дейност, Керопе Чакърян развива интензивна научноизследователска работа в областта на крайните групи.

През 1979 г. защитава дисертация на тема "Максимални подгрупи на крайни групи".

През 1983 г. Керопе Чакърян е избран за доцент към катедра Алгебра на Факултета по математика и механика на Софийския университет, а от 2006 г. е професор към катедра Алгебра на ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски".

Научноизследователската дейност на проф. Чакърян е в областта на крайните прости групи и най-вече тези от Лиев тип. Втората половина на XX-ти век е период на изключително бурно развитие на тази както много красива, така и технически изключително трудна област на математиката. Учени от цял свят са в постоянна надпревара, като новите резултати буквално „валят", особено след 1980 г. и знаменитото първо обявление на CSFG – Класификацията на крайните прости групи.

Макар и по-значимите резултати от периода да идват от другата страна на Желязната завеса, смело може да се каже, че Керопе Чакърян е един от специалистите на световно ниво в областта, а в България той е и един от пионерите в теорията на крайните прости групи.

Неговата научна работа се отличава с изключително изящество, виртуозни ad hoc конструкции и рядък усет за оригиналност и красота. Доказателствата в работите на Керопе Чакърян са крайно нестандартни и в същото време изпипани до перфекционизъм, кратки и стегнати.

Те са отражение на вътрешния му мир – говорят за неговата изключителна самокритичност, дисциплина и организираност.

Най-общо изследванията на Чакърян в областта на крайните прости групи могат да се разделят в следните четири направления:

- Определяне с точност до изоморфизъм на простите подгрупи на крайна проста група G, което по същество е най-важната стъпка при определянето на подгруповата ѝ структура;
- Определяне с точност до спрегнатост на максималните подгрупи на крайна проста група G – заедно с първото направление, практически дава почти пълна информация за подгруповата структура на G;
- Определяне на факторизациите на крайна проста група G, т. е. представянията на G от вида $G = AB$, където особен интерес представляват простите факторизации (в които подгрупите A и B са прости) и максималните факторизации – съответно подгрупите A и B са максимални;
- Конструктивно (по възможност) установяване на $(2, 3)$-породеност и $(2, 3, 7)$-породеност (Хурвицовост) на крайните прости групи.

В началото на своята научна кариера, Керопе Чакърян, следвайки актуалните световни тенденции в областта, насочва изследователската си дейност предимно в първите две от горепосочените направления.

В първата си публикация (1974) той характеризира крайните групи, в които две силови подгрупи от взаимно прост ред са максимални.

Следва класификацията на крайните групи, които имат максимална подгрупа, изоморфна на алтернативна група A_3, A_4 или A_5.

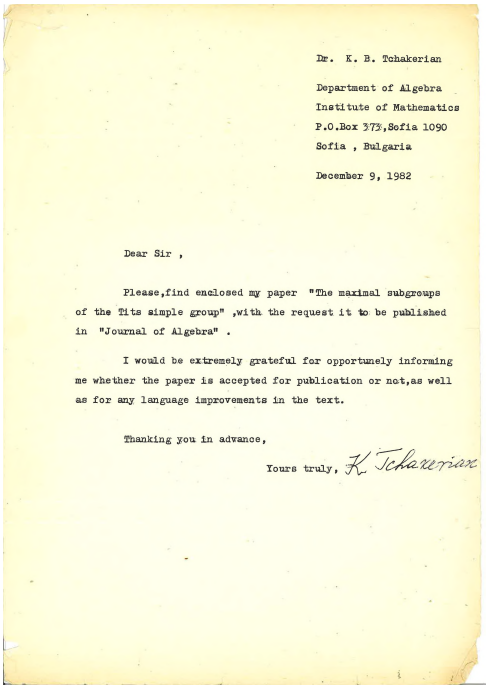
В две свои публикации за сп. Плиска (1981), Керопе Чакърян:

- Дава необходимо и достатъчно условие крайна разрешима група да притежава максимална силова p-подгрупа и класифицира крайните разрешими групи с максимална подгрупа от ред pq за различни прости числа p и q.
- Доказва простотата на крайните неразрешими групи с максимална подгрупа от ред $2p$ за нечетно просто p и класифицира тези групи.

Едни от най-значимите резултати на проф. Чакърян са получени при изследванията му върху серията групи на Chevalley-Dickson $G_2(p^n)$. В поредица от статии, съвместно с Никола Петров (Шуменски университет), публикувани в първата половина на 80-те години, е направено почти пълно описание на простите им подгрупи. Това дава възможност впоследствие, съвместно с докторанта Цанко Генчев, да бъдат определени и всички факторизации на групите $G_2(p^n)$, т. е. представянето им

като произведение на двойки собствени неабелеви прости подгрупи. Този резултат е публикуван в престижното списание Archiv der Mathematik през 1985 г.

При изследванията си върху най-атрактивния член на тази серия – групата $G_2(4)$ (съдържаща като максимална подгрупа спорадичната проста група на Janko J_2 и съдържаща се като максимална подгрупа в спорадичната проста група на Suzuki) Чакърян намира пораждащите елементи на всички 14 класа от неабелеви прости подгрупи на $G_2(4)$. Тук е постигнат и големият пробив – съвместно с Никола Петров са определени с точност до спрегнатост всички 8 класа максимални подгрупи на $G_2(4)$ и този наистина значим резултат е публикуван през 1982 г. на възможно най-престижното място – Journal of Algebra.



Dr. K. B. Tchakerian

Department of Algebra
Institute of Mathematics
P.O.Box 373,Sofia 1090
Sofia , Bulgaria

December 9, 1982

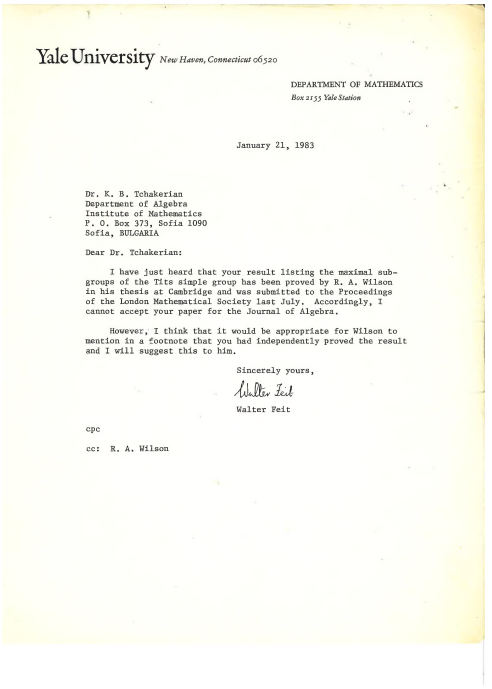
Dear Sir ,

Please,find enclosed my paper "The maximal subgroups of the Tits simple group" ,with the request it to be published in "Journal of Algebra" .

I would be extremely grateful for opportunely informing me whether the paper is accepted for publication or not,as well as for any language improvements in the text.

Thanking you in advance,

Yours truly, K. Tchakerian



Yale University New Haven, Connecticut 06520

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Box 2155 Yale Station

January 21, 1983

Dr. K. B. Tchakerian
Department of Algebra
Institute of Mathematics
P. O. Box 373, Sofia 1090
Sofia, BULGARIA

Dear Dr. Tchakerian:

I have just heard that your result listing the maximal subgroups of the Tits simple group has been proved by R. A. Wilson in his thesis at Cambridge and was submitted to the Proceedings of the London Mathematical Society last July. Accordingly, I cannot accept your paper for the Journal of Algebra.

However, I think that it would be appropriate for Wilson to mention in a footnote that you had independently proved the result and I will suggest this to him.

Sincerely yours,

Walter Feit

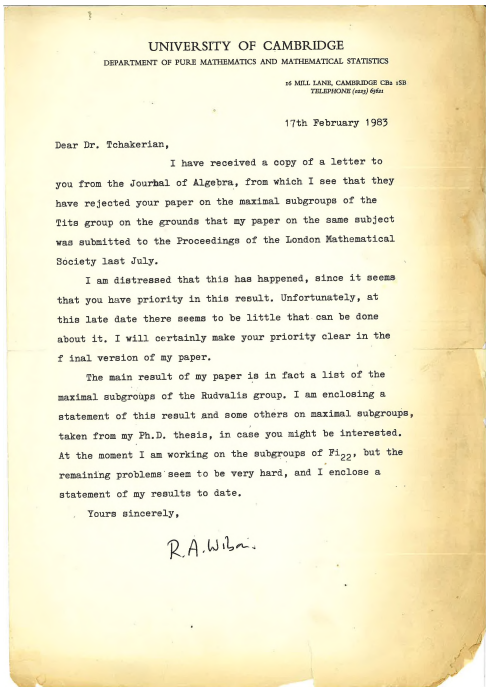
Walter Feit

cpc

cc: R. A. Wilson

Друг забележителен резултат от този период е определянето с точност до спрегнатост на осемте максимални подгрупи на една "уникална" проста група – тази на Титс – комутатор на групата на Ree ${}^2F_4(2)$. За съжаление съдбата изиграва лоша шега на проф. Чакърян, отнемайки голяма част от заслужената слава. Резултатът първоначално само е анонсиран в Доклади на БАН т.34, №12 (1981), а впоследствие оформен в статия, която в края на 1982 г. е подадена за публикуване в Journal of Algebra. Получава се отказ за публикация – причината е, че няколко месеца по-рано една от новоизгряващите звезди в областта на простите групи – Robert Wilson вече е получил аналогичен резултат (използвайки коренно различни методи) и го е изпратил за публикация в Proceedings of the London Mathematical Society. Запазена е кореспонденцията между Чакърян, Journal of Algebra, в лицето на изключителния специалист в областта на крайните групи – проф. Walter Feit и Robert Wilson. Последният съвсем чистосърдечно признава първенството на Керопе Чакърян –

факт официално отбелязан и в последващата му статия. Чак през 1986 г. резулатът на проф. Чакърян вижда бял свят – публикацията е в сп."Плиска", 8.



UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
DEPARTMENT OF PURE MATHEMATICS AND MATHEMATICAL STATISTICS

16 MILL LANE, CAMBRIDGE CB2 1SB
TELEPHONE (0223) 63311

17th February 1983

Dear Dr. Tchakerian,

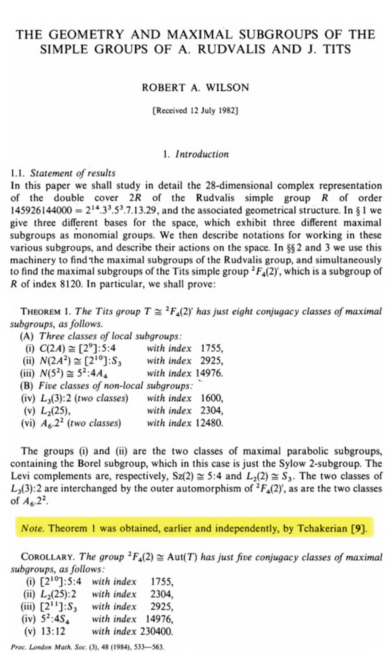
I have received a copy of a letter to you from the Journal of Algebra, from which I see that they have rejected your paper on the maximal subgroups of the Tits group on the grounds that my paper on the same subject was submitted to the Proceedings of the London Mathematical Society last July.

I am distressed that this has happened, since it seems that you have priority in this result. Unfortunately, at this late date there seems to be little that can be done about it. I will certainly make your priority clear in the final version of my paper.

The main result of my paper is in fact a list of the maximal subgroups of the Rudvalis group. I am enclosing a statement of this result and some others on maximal subgroups, taken from my Ph.D. thesis, in case you might be interested. At the moment I am working on the subgroups of Fi_{22}, but the remaining problems seem to be very hard, and I enclose a statement of my results to date.

Yours sincerely,

R.A.Wilson.



THE GEOMETRY AND MAXIMAL SUBGROUPS OF THE SIMPLE GROUPS OF A. RUDVALIS AND J. TITS

ROBERT A. WILSON

[Received 12 July 1982]

1. *Introduction*

1.1. *Statement of results*

In this paper we shall study in detail the 28-dimensional complex representation of the double cover $2R$ of the Rudvalis simple group R of order $145926144000 = 2^{14}.3^3.5^3.7.13.29$, and the associated geometrical structure. In §1 we give three different bases for the space, which exhibit three different maximal subgroups as monomial groups. We then describe notations for working in these various subgroups, and describe their actions on the space. In §§2 and 3 we use this machinery to find the maximal subgroups of the Rudvalis group, and simultaneously to find the maximal subgroups of the Tits simple group ${}^2F_4(2)'$, which is a subgroup of R of index 8120. In particular, we shall prove:

THEOREM 1. *The Tits group $T \cong {}^2F_4(2)'$ has just eight conjugacy classes of maximal subgroups, as follows.*

(A) *Three classes of local subgroups:*
(i) $C(2.4) \cong [2^9]:5:4$ *with index* 1755,
(ii) $N(2.4^2) \cong [2^{10}]:S_3$ *with index* 2925,
(iii) $N(5^2) \cong 5^2:4A_4$ *with index* 14976.

(B) *Five classes of non-local subgroups:*
(iv) $L_2(3):2$ *(two classes)* *with index* 1600,
(v) $L_2(25)$, *with index* 2304,
(vi) $A_6.2^2$ *(two classes)* *with index* 12480.

The groups (i) and (ii) are the two classes of maximal parabolic subgroups, containing the Borel subgroup, which in this case is just the Sylow 2-subgroup. The Levi complements are, respectively, $Sz(2) \cong 5:4$ and $L_2(2) \cong S_3$. The two classes of $L_2(3):2$ are interchanged by the outer automorphism of ${}^2F_4(2)'$, as are the two classes of $A_6.2^2$.

Note. Theorem 1 was obtained, earlier and independently, by Tchakerian [9].

COROLLARY. *The group ${}^2F_4(2) \cong \mathrm{Aut}(T)$ has just five conjugacy classes of maximal subgroups, as follows:*
(i) $[2^{10}]:5:4$ *with index* 1755,
(ii) $L_2(25):2$ *with index* 2304,
(iii) $[2^{11}]:S_3$ *with index* 2925,
(iv) $5^2:4S_4$ *with index* 14976,
(v) $13:12$ *with index* 230400.

Proc. London Math. Soc. (3), 48 (1984), 533—563.

Съвместната работа с Никола Петров води до още един важен резултат – класифицирани са с точност до спрегнатост класовете максимални подгрупи на простите групи на Ree ${}^2G_2(3^{2m+1})$, $m \leq 1$. За тях е доказано, че има точно $5 + \nu(2m+1)$ на брой класа максимални подгрупи, където $\nu(2m+1)$ е броят на различните прости делители на $2m+1$. Като директно следствие се получава, че групите на Ree ${}^2G_2(3^{2m+1})$, $m \leq 1$ не притежават никакви факторизации. За съжаление този силен резултат е получен по същото време – 1984-1985 г., но с други методи от Левчук и Нужин, като тяхната публикация излиза първа.

Измежду изследванията на Керопе Чакърян от този период, заслужава да се споменат и направената пълна класификация на крайните прости групи от ред $2^a.3.5.q^b$ за прости $q \geq 7$, както и последвалата класификация на крайните прости групи от ред $2^a.3^b.5.p^c$ и $2^a.3^b.7.p^c$, за прости p, които имат циклична силова 3-подгрупа.

Друго важно направление, в което работи проф. Чакърян е факторизациите на крайни прости групи. Особено продуктивна е работата с неговия ученик Цанко Генчев, впоследствие утвърдил се като специалист в тази тясна област. Освен гореспоменатата съвместна публикация за факторизациите на групите $G_2(p^n)$, друг техен забележителен резултат – отново публикуван в Archiv der Mathematik (1983), е класификацията на двойките крайни неабелеви прости групи A и B със силови 2-подгрупи $S_2(A)$, $S_2(B)$ от ред $|S_2(A)| \leq 8$, $|S_2(B)| \leq 16$, както и възможните техни произведения $G = AB$.

Други статии на същите автори класифицират крайните прости групи G от ред $|G| < 10^{12}$, които се разлагат в произведение $G = AB$ на собствени неабелеви прости подгрупи A, B, както и крайните прости групи G от Лиев тип с Лиев ранг 3 над полетата $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, които също имат факторизации на двойки собствени неабелеви прости подгрупи A, B.

Заслужава си да спомена и едно събитие от този период, в което Керопе Чакърян взема дейно участие. Става въпрос за проведената през 1986 г. Лятна школа по Алгебра във Варна – един математически форум от световна величина, чийто мащаб, поне в областта на алгебрата (в България), остава ненадминат и до днес. Освен присъствието на практически цялата гилдия български алгебристи, както и на изтъкнати специалисти от социалистическия блок (най-вече СССР), на поканата на организаторите се отзовават и сериозни имена от Западния свят. Сред лекторите личат имената на Margulis, Zel'manov, Golod, Plotkin, както и безспорните авторитети в областта на групите Zaleesskii, Zappa и Wilson. За редактори на сборника от конференцията, издаден от Spinger-Verlag, са избрани Керопе Чакърян и Лъчезар Аврамов.

В по-зрелия етап от научната си кариера, проф. Чакърян, неизбежно повлиян и от развитието на световните научни тенденции, променя малко посоката на търсенията си. Насочва усилията си върху намирането на явни пораждащи елементи от редове 2 и 3 на някои фамилии от крайни прости групи.

Известен факт е, че всяка крайна проста група се поражда от два свои елемента, като единият от тях може да се избере да бъде от ред 2 – тогава естествено изниква въпросът дали другият може да е от минимален ред 3. Такъв тип група се нарича $(2,3)$ – породена. Известно е, че ако G е $(2,3)$ – породена група, то съществува сюрективен хомоморфизъм $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to G$ на модулярната група $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ върху G. Важен клас на $(2,3)$ – породените прости групи са тези, при които произведението на пораждащите елементи е от ред 7. Такива групи се наричат $(2,3,7)$ – породени групи или Хурвицови групи и са от съществен интерес в теорията на Римановите повърхнини.

В съвместна статия с Петър Манолов (2004) са намерени явни пораждащи от редове 2 и 3 на крайните прости групи $\mathrm{PSL}_4(2^m)$ за $m \geq 2$. Същата работа доказва, че максималните подгрупи на $\mathrm{PSL}_4(2^m)$ с елемент от ред $2^{3m}-1$ са стабилизатори на едномерни или тримерни подпространства на естественото линейно представяне на $\mathrm{PSL}_4(2^m)$ с размерност 4.

В серия от статии Керопе Чакърян намира явни Хурвицови пораждащи за крайните прости групи на Ree ${}^2G_2\left(3^{2m+1}\right)$ и на Chevalley-Dickson $G_2(3^n)$ с $n \geq 2$.

Той успява да построи явни пораждащи от редове 2 и 3 на крайните прости групи $\mathrm{PSL}_5(p^n)$ за произволни прости p и произволни естествени n. Успява да намери явно $(2,3)$-пораждане на групата на Титс – ${}^2F_4(2)$.

В последните си работи проф. д-р Керопе Чакърян, съвместно с Константин Табаков, класифицира всички двойки елементи от редове 2 и 3 в крайните прости групи на Ree ${}^2G_2(3^n)$ за произволни естествени n и намира явни $(2,3)$-пораждащи на проективната специална група $\mathrm{PSL}_6(p^n)$ за произволни прости p и произволни естествени n.

За тези повече от 40 години преподавателска и научна работа във Факултета по

математика и информатика (механика) на СУ "Св. Климент Охридски", проф. д-р Керопе Чакърян оставя особено ярка следа. Със сигурност в съзнанието и спомените на студентите си, той е останал като символ на отличен лектор, прекрасен мотиватор за изявените, строг, но справедлив съдник за неуверените. Приносите му обаче далеч не се ограничават само с процеса по обучението на студенти по алгебра. От далеч не по-малко значение е влиянието му върху развитието на катедра Алгебра. Всеки един от членовете ѝ (в това число и пишещите тези редове) свидетелства за топлото му, "бащинско" отношение, за получените десетки безценни съвети, за красивите математически задачи, които поставяше или ни помагаше да разрешим, за този неповторим негов хумор. Повече или по-малко той е съдействал за развитието ни като преподаватели, като учени, а защо не и като по-добри човеци. Един безспорен авторитет и вдъхновител на всички около себе си.

С типичната си балансираност и с широтата на мирогледа, Керопе Чакърян често надскача границите на звеното – не един и два пъти е давал и редица сполучливи предложения за подобряване на административната работа във Факултета по математика.

Пример за последното ни дава в спомените си доц. Ангел Попов. Той разказва как още в края на 70-те години на миналия век, при промяната на учебните планове и програми в тристепенната тогава форма на обучение, младият Керопе Чакърян участва активно в процеса, проявявайки уменията си за работа в екип, уважението към колегите, задълбочеността и широката си математическа култура. Доц. Попов ясно си спомня за далновидността и професионализма на Керопе Чакърян, за умението му да убеждава с конкретни, детайлни доводи, за толерантността му към мнението на околните и деликатността, с която е посочвал нецелесъобразността на някои идеи и излагал своите добре обмислени предложения.

Проф. д-р Керопе Чакърян е бил дългогодишен (повече от 20 години) уважаван член на Факултетния съвет, както и на Учебните комисии, към Факултета по математика и информатика на Софийския университет.

Ръководител е на катедра Алгебра в периода 1999-2007 г.

През 2006-2007 г. е бил и заместник-декан на ФМИ по научноизследователската дейност.

Заслужава да се отбележи, че в отделни периоди проф. Чакърян е бил член на Специализирания научен съвет по математика на ВАК, а през 2010г. член на Комисията по математически науки на ВАК.

Проф. д-р Керопе Чакърян е съавтор на редица учебници и сборници върху задължителния материал по алгебра за бакалаври от ФМИ. Заедно с акад. проф. дмн Стефан Додунеков е написал книгата "Задачи по теория на числата", която се използва от дълги години както за трениране на участниците в ученическите състезания и олимпиади, така и за подготовка на бъдещите учители по математика.

Измежду учебните пособия, написани с участието на проф. д-р Керопе Чакърян, особено внимание заслужава книгата "Теория на Галоа". Първото издание от 1990 г. се състои от майсторски формулирани и подходящо подредени задачи, които запознават с основните резултати от областта. Във второто, преработено издание от 2010 г., по-важните резултати са обособени като теоретична част, а останалите са формулирани като задачи. Книгата е написана от проф. д-р Керопе Чакърян, доц.

д-р Пламен Сидеров и доц. д-р Ангел Попов. Ангел Попов си спомня, че всеки от тримата автори е подготвил част от учебника, а после съвместно са редактирали получения текст, като водещата роля в обсъжданията е била на Керопе Чакърян. Процесът на съвместната работа е жив в съзнанието на доц. Попов – той ясно си спомня за чудесната дружеска атмосфера между тримата, за оригиналните математически "хрумки", за шегите и закачките помежду им, но също и за елегантните алгебрични подходи и решения.

Тук е мястото да споделим още един спомен за проф. Чакърян. Той идва от проф. Татяна Гатева-Иванова:

Пиша тези редове с чувство на възхищение и тъга. Възхищение от прекрасния образ на нашия колега Керопе Чакърян и тъга, защото той ни напусна преждевременно. Ясно си спомням моята първа лична среща с Керо. Катедра Алгебра реши младият асистент К. Чакърян да бъде рецензент на моята дипломна работа като студент по алгебра. Беше спешно и той предложи да донеса работата в дома му, на Орлов мост. Отидох с известно страхопочитание, някой отвори вратата и ме покани. В един голям хол Керо и една тъмнокоса жена играеха табла. Керо ме поздрави с усмивка, и двамата бяха млади и красиви. Забелязах, че Керопе ми напомня много Адриано Челентано, мой любим певец от 70'те и това ме поуспокои. След няколко години, вече като асистент в СУ водех упражнения по Абстрактна Алгебра – Теория на групите и теория на Галоа, курс на К. Чакърян. Ясно си спомням какъв отличен лектор беше Керо и колко добре беше организиран курсът. Керо се срещаше с нас, асистентите, ежеседмично и дискутирахме поважните задачи, които трябваше да обсъждаме на всяко упражнение. Тогава все още нямаше учебник и ръководството по Алгебра на български език и Керо ползваше чудесната монография "Алгебра" на Ван дер Варден (превод на руски език). На упражненията решавахме сериозни задачи, много от които допълваха теорията. За мен беше радостно и вълнуващо да бъда част от този прекрасен курс. Керопе Чакърян беше истински професионалист, експерт по Теория на Групите. Една от големите му заслуги беше написването на "Ръководство по висша алгебра и теория на Галоа", А.Попов, П. Сидеров, К. Чакърян, 1990. Пазя първото издание, с автографа на Керо и неговите най-добри пожелания към мен. С удоволствие ползвам това безценно ръководство в моята преподавателска дейност в Американския Университет в България. Керопе Чакърян беше прекрасен-много интелигентен, човек с достойнство, почтен, сериозен, но и с прекрасно чувство за хумор. Татяна Гатева-Иванова, Професор, Американски Университет в България.

Няма как да не споменем и за още една – особено любима на проф. Чакърян насока в професионалния му път – работата му с изявени средношколци, подготовката им за състезания, съставянето на задачи за ученически олимпиади. В продължение на няколко десетилетия сигурно няма български математически талант, който да не е чувал името му, а мнозина са имали привилегията да слушат негови лекции, или да водят подготовка под неговото вещо ръководство.

Част от тези талантливи деца, тогава, днес са вече осъществени математици и информатици и работят някъде из научните центрове по света. Искрено вярваме, че те носят, запазена някъде в себе си, частица от този "красив" математически ум на своя някогашен учител проф. Керопе Чакърян.

БЛАГОДАРНОСТИ: В заключение бихме искали да изкажем сърдечните си благодарности на колегите и приятелите, които споделиха спомените си с нас, за да ни помогнат да напишем този материал. Специално ще отбележим имената на Ангел Попов и Татяна Гатева-Иванова. Благодарим и на всички бивши и настоящи членове на катедра Алгебра към ФМИ на СУ, както и на колегите от секция Алгебра към ИМИ – БАН, с които в процеса на писане поговорихме за личността на Керопе Чакърян и които ни накараха да си спомним с усмивка за неговата светла памет.

Научни трудове на проф. Керопе Чакърян

1. К. Чакърян, Крайни групи, в които две силови подгрупи са максимални., Год. СУ, Мат. фак., 66 (1971/72 (1974)), , vol:66 , 1974, pages:349-352

2. K. Tchakerian, Simple groups of order $(2^a).3.5.(q^b)$., SERDICA (Bulg. math. publ.), vol:5, 1979, pages:351-361

3. K. Tchakerian, Finite groups having a maximal subgroup isomorphic to A_5., Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:32, 1979, pages:1161-1163

4. K. Tchakerian, Groups containing a three-prime simple group., Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:33, 1980, pages:1165-1167

5. K. Tchakerian, A note on simple groups of order $(2^a).(3^b).5.(p^c)$. , Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:33, 1980, pages:1037-1038

6. К. Чакърян, Конечные группы с максимальными подгруппами порядков p^n и pq. , ПЛИСКА (Бълг. мат. студии), vol:2, 1981, pages:116-118

7. K. Tchakerian, Generators for the simple subgroups of $G_2(4)$., Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:34, 1981, pages:159-162

8. K. Tchakerian, Finite nonsolvable groups having a maximal subgroup of order $2p$., PLISKA (Studia math. bulg.), vol:2, 1981, pages:157-161

9. N. Petrov, K. Tchakerian, The maximal subgroups of $G_2(4)$. , J. Algebra, vol:76, 1982, pages:171-185

10. N. Petrov, K. Tchakerian, Simple subgroups of $G_2(p^n)$, $p = 2$ or 3., Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:35, 1982, pages:1193-1196

11. K. Tchakerian, Ts. Gentchev, On products of finite simple groups. , Arch. Math., vol:41, 1983, pages:385-389,

12. K. Tchakerian, The maximal subgroups of the Tits simple group., PLISKA (Studia math. bulg.), vol:8, 1986, pages:85-93

13. N. Petrov, K. Tchakerian, Simple subgroups of $G_2(q)$. , Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:39, 1986, pages:13-16

14. Ts. Gentchev, K. Tchakerian, Products of finite simple groups., Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:40, issue:1, 1987, pages:5-8

15. K. Tchakerian, N. Petrov, Maximal subgroups of ${}^2G_2(q)$., Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Mec., vol:79, 1989, pages:215-221

16. N. Alnader, K. Tchakerian, Factorizations of finite simple groups., Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Mec., vol:79, 1989, pages:357-364

17. Н. Петров, К. Чакърян, Конечные простые группы и их максимальные подгруппы. , Алгебраические структуры , ред. М. Гаврилов, В. Н. Латышев, Сборникът е приет за печат в УИ "Кл. Охридски"1988/1989 г., 1989, pages:452-473

18. Ts. Gentchev, K. Tchakerian, Factorizations of simple groups of order up to 10^{12}., Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:45, issue:1, 1992, pages:9-12

19. Ts. Gentchev, K. Tchakerian, Factorizations of the groups of Lie type of Lie rank three over fields of 2 or 3 elements. , Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Mec., vol:85, 1993, pages:83-88

20. P. Manolov, K. Tchakerian, $(2,3)$-generation of the groups $PSL_4(2^m)$., Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Inf., vol:96, 2004, pages:101-104

21. K. Tchakerian, An explicit $(2,3,7)$-generation of the simple Ree groups ${}^22G_2(3^n)$., Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:58, issue:7, 2005, pages:749-752

22. K. Tchakerian, $(2,3)$-generation of the groups $PSL_5(q)$., Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Inf., vol:97, 2005, pages:105-108

23. K. Tchakerian, Generators for some simple subgroups of the Tits group ${}^2F_4(2)'$., Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:61, 2008, pages:167-168

24. K. B. Tchakerian, An explixit $(2,3,7)$-generation of the simple groups $G_2(3^n)$. , Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:64, issue:8, 2011, pages:1077-1082

25. K. Tabakov, K. Tchakerian, $(2,3)$–generation of the groups $PSL_6(q)$., Serdica Math. J., vol:37, issue:4, 2011, pages:365-370

26. K. B. Tchakerian, A Hurwitz type generation property of the groups $G_2(3^n)$, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:65, issue:7, 2012, pages:875-880,

27. K. Tabakov, K. Tchakerian, Pairs of elements of orders 2 and 3 in the Ree groups ${}^2G_2(3^n)$., Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol:66, issue:2, 2013, pages:171-176.

ЮБИЛЕЕН ДОКЛАД

ANNIVERSARY

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

JENNY SENDOVA – AN ONGOING MATHEMATICAL SUITE

Konstantin Delchev
Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences
e-mail: kdelchev@math.bas.bg

ЖЕНИ СЕНДОВА – МАТЕМАТИЧЕСКА СЮИТА С ПРОДЪЛЖЕНИЕ

Константин Делчев
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките
e-mail: kdelchev @math.bas.bg



Доц. Евгения Сендова, или Жени, както всички я знаят, е един от хората, чиято дейност много трудно може да бъде описана в рамките на доклад, защото огромната част от нея не се побира в стандартизираните формални критерии, по които често

https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.225-232
2020 Mathematics Subject Classification: 01A70.

описваме науката. Като един от доайените на математическото образование, тя е оставила своята следа в редица дейности и структури – от Проблемната група по образованието (ПГО), ръководена от акад. Сендов, през самото начало на обучението по информатика в средното образование у нас, до дългогодишното ѝ участие в Research Science Institute (RSI), изключително успешният Ученически институт по математика и информатика и множество европейски образователни инициативи под шапката на Scientix. Тя е неизчерпаем източник на знания и житейски опит, който е прилагала щедро за подкрепата на математическата колегия в България и чужбина.

Въпреки това, обаче, най-важното сред този списък остава скрито. А именно – способността ѝ да свързва хората, да мотивира и да вдъхновява. Нейните успехи са не само в собствената ѝ дейност, но и в стотиците колеги, които е вдъхновила да започнат и да продължават да се занимават с математика и информатика. Тази нейна способност да създава общност и да насърчава сътрудничеството между различни поколения учени я прави неоценим партньор и ментор. Жени е пример за това как един човек може да се отличи не само чрез собствената си работа, но и чрез влиянието си върху други хора, което продължава да расте и да се развива във времето. Жени Сендова произхожда от семейство, чиято история е в сърцето на Балканския въпрос, и може би това е едно от нещата, което е спомогнало тя да бъде толкова интернационална и отдадена на работата между хора от различни държави и потекла.

Майка ѝ, Мария Стефанова Коларова (по баща Трайкова), е родена в Битоля в многолюдно семейство, в което (както често е споделяла) са се пеели български песни и рецитирали български стихотворения. А баща ѝ, Йовко Тодоров Коларов, е офицер от зенитната артилерия, пенсиониран на 37 годишна възраст (с поколението на последните царски офицери). Атмосферата, в която Жени и брат ѝ Тодор отрастват – всяка година (до прогимназиална възраст) в различни градове (Асеновград, Шумен, Пловдив, София), а през лятото – в малки села (Галата, Корен), в които се провеждат военни лагери, е много стимулираща като отношение към образованието. Според родителите ѝ то трябва да включва задължително музика, изобразително изкуство и спорт, да развива любознателност към науката, пълноценното общуване и любов към живота. От тях тя наследява най-важното послание – да изживяваш ученето като привилегия и радост цял живот и да не се боиш да почнеш нови неща и след пенсионирането си... И дори още по-важното – да споделяш любовта си към това, което правиш, с другите!

Ранните изследвания на Жени Сендова – моделирането на клетката и алгоритмичното създаване на музика са пример за тематика, изпреварила времето си. Петдесет години преди „готовият за употреба“ генеративен изкуствен интелект и системи като Алфа Фолд или Ево 2, тя е работила върху подобни въпроси, с наличните за времето си методи и материали. Именно заради това, и до днес, тя продължава да съчетава визията на образователния деец с визията на учения и иноватора. В лицето на учителите тя вижда колеги, готови да споделят идеи и опит в общност, а в лицето на средношколците – „ученик, въоръжен с компютър“ (по думите на Б. Сендов), а не обект на образование, на когото технологиите непрекъснато пречат и го разсейват.

Особено интересен кръговрат преживяват интересите на Жени към музиката

в компютърен контекст. Дипломната ѝ работа (1969) е Алгоритмично композиране на 8-тактови мелодии – тема, не само одобрена, но насърчена от проф. Благовест Сендов като първи опит в България. В алгоритъма, реализиран програмно на компютъра Минск-2, намират отражение закономерности, свързани с ритъма, музикално-височинните отношения, ладово-хармоничната структура и мащабната структура на една мелодия. С научния си ръководител, Стефка Димова, впоследствие (1970 – 1971) Жени обогатява алгоритъма за композиране с нейния алгоритъм за четиригласна хармония, при което двете стъпват на алгебрична формализация на тоналната музика, предложена от Пиер Барбо въз основа на свойствата на една крайна адитивна група. По-късно, като елемент от докторската си дисертация на тема „Компютърни микросветове и модели за интегриране на учебния и творческия процес“ (2000) Жени разработва образователен музикален микросвят на няколко диалекта на Лого (Logo Writer и Comenius Logo), в който са дефинирани традиционните музикални обекти и операции върху тях.

Един от нейните ученици, Христо Стайков, наследява тематиката (с проект на RSI'15 върху генериране на джазова импровизация с помощта на невронни мрежи). На конференцията, посветена на 80-годишнината на рождението на проф. Петър Бърнев, двамата изнасят съвместен доклад на тема: „Компютърното творчество – вчера, днес и утре“, където в заключителните си думи тя благодари на първия си учител по програмиране, проф. Бърнев, и на първия български изследовател на компютърното творчество в музикален контекст, проф. Стефка Димова.

Друг млад учен, когото Жени Сендова вдъхновява да поеме щафетата, е Цветелин Андреев, с когото двамата разработват образователни сценарии за вариации върху музикална тема в блоков език за програмиране SNAP!, предназначени за горния курс по информатика. Подобни интегрирани сценарии, част от т. нар. STEAM (разширение на природоматематическите и инженерните науки с изкуство) са потенциално решение на проблема с малкия хорариум на различни предмети и също така – на общата нужда за образование чрез правене и чрез експеримент.

Едно от важните послания на самата Жени към учениците ѝ е да не приемат временните си неуспехи като провали, а като житейски уроци. Тя дава пример с редица свои „провали“ (неуспешно кандидатстване в Музикалната гимназия, презаписване в първи курс математика във Факултета по математика и информатика (тогава ФМФ) на Софийския университет, неуспешно явяване на конкурс за научен сътрудник, двукратно неуспешно кандидатстване за Фулбрайт), като подчертава, че от дистанцията на времето тези провали са се оказали предпоставка за най-прекрасните професионални и житейски радости, включително срещата със съпруга ѝ Божидар Сендов като състудент (1963), дипломната ѝ работа под ръководството на Стефка Димова на тема алгоритмична музика, работата ѝ в екипа на проф. Благовест Сендов и проф. Румен Цанев върху един математически модел на диференциация на клетката, работата като преподавател по изчислителна математика в Националната математическа гимназия, по-късно като асистент по анализ на проф. Владимир Чакалов и на проф. Иван Проданов в рамките на Единния център по математика и механика, работата с учители и ученици в Проблемната група по образование, участието в редица международни проекти, свързани с иновации в образованието с акцент върху изследователския подход, довели до поканата да преподава в RSI като тютор (от 1997 до днес)...

Както е споделяла с приятели, още от основаването на Проблемната група по образованието Жени се вълнува от създаването на Буквара (за който Благовест Сендов говори на сътрудниците си от сектора Математическо моделиране) на всяка обедна почивка. А първото ѝ официално участие е като редактор на първия учебник по Лого (написан от Румен Николов като част от интегрирания предмет „Език и математика“, 1984), а впоследствие – негов съавтор в „Информатика за начинаещи“, с основен принос във връзката на информатиката с музиката и изобразителното изкуство. По-късно тя ще ръководи и списание Информатика и математика, предназначено за учителите от ПГО. Обезателно следва да се спомене и значението на Жени Сендова за навлизането в България на един от най-устойчивите образователни инструменти по информатика – езикът Лого. Целта на обучението по информатика в общообразователната система не е да създаде програмисти, а да възпита базова грамотност за писане на код и способност за алгоритмично мислене. Посредством Лого могат да бъдат постигнати и двете цели, като в допълнение се осъществяват множество междупредметни връзки с математиката, а в днешно време – и с началното образование по роботика. Нещо повече, идеите на това обучение спокойно могат да бъдат приложени в среден курс и дори по-надолу.

Лого е един от малкото езици, който може да се похвали с подобно дълголетие – създаден е в края на 60-те години от Сиймур Пепърт и негови колеги в BBN, сега по-известна като Raytheon. Първоначално малко повече от диалект на Лисп, визията на Пепърт за костенурковата геометрия го превръща в изключително обучително пособие. Нещо повече, оригиналните парадигми за преподаването с негова помощ силно наподобяват изследователското обучение, формализирано като концепцията за изследователски подход в образованието (inquiry-based learning) доста по-късно, и са в голямо съгласие с вижданията на Дьорд Пойа за обучението по математика. В България езикът получава български превод и успява отлично да се интегрира в концепцията на „Сендовската система“. Жени Сендова разшири неимоверно обхвата на Лого за българското образование. Тя е човекът, „виновен“ както за лесния и елегантен увод в програмирането с Лого, достъпен дори за деца от втори клас, така и за най-сериозния материал който е бил презентиран и преподаван с него – фрактална геометрия и случайни процеси. Тези теми излизат далеч извън обхвата на средното образование (и по принцип от възможностите на Лого), но с помощта на съвсем прости алгоритми, Жени Сендова успя да предизвика интерес към тях у много от участниците в УчИМИ, а вероятно – и в RSI.

Този подход – на простия и ефектен увод, с достъпни инструменти, в иначе сериозен математически апарат, изигра голяма роля за поддържането на интереса на учениците в ранните години на УчИМИ и за ориентирането им в плодотворни теми на работа. Той не трябва да се бърка с концепцията за edutainment, която по-скоро създава илюзия за разбиране. Скриптовете на Лого, математическите пъзели и генеративните алгоритми, които Жени продължава да демонстрира, по-скоро създават усещането за любознание и подтикват учениците самостоятелно да се насочат към учене и изследване на материала, до нивото, до което те се чувстват мотивирани да стигнат.

Една от програмите, с които най-много се свързва името на Жени Сендова, е Research Science Institute. RSI е създаден през 1984 г. от адмирал Хаймън Рикоувър, влиятелна фигура във флота на САЩ през Студената война, известен като

„бащата на ядрения флот“. Визията на Рикоувър за RSI е да насърчи по-задълбочено разбиране и по-професионалното занимание на гимназистите с изявени способности и интерес към природоматематическите и инженерните науки (STEM). В неговите възгледи, предоставяйки на тези ученици интензивен и реален изследователски опит, те ще бъдат по-добре подготвени да допринесат за научния напредък и да се справят със сложните предизвикателства на бъдещето. Над 40 години по-късно, ние знаем, че тези негови възгледи се потвърдиха и през RSI са минали редица бележити лица на съвременната наука, като Терънс Тао и Феng Джанг, създателят на CRISPR/Cas9. Управлявана от създадения от адмирал Рикоувър Center for Excellence in Education (CEE), RSI е силно конкурентна лятна програма, която в днешно време се провежда в Масачузетския технологичен институт (MIT) под ръководството на Джоан Дидженаро, близък сътрудник и съратник на адмирал Риковер. Програмата събира ученици от цял свят, създавайки международна среда, в която те могат да участват в иновативни изследователски проекти под ръководството на лични ментори и опитни тютори. България започва да изпраща участници в RSI, благодарение на Международна фондация „Св. св. Кирил и Методий“. Жени Сендова става част от програмата като тютор в края на миналия век.

Работата на тютора/наставника в една интензивна научна програма за ученици е изключително многолика и в известен смисъл – неблагодарна. Докато научните ръководители работят с 1-2, много рядко трима и повече ученици, тюторите работят с групи от 12, понякога до над 20 ученици. Тяхната отговорност е основно педагогическа. Те помагат както с усвояването на научни познания, така и с меки умения, необходими за една научна кариера – комуникационни умения във формална и неформална среда, работа в екип с хора от различни етноси и култури, критическо мислене, справяне със стреса. Жени Сендова донася опита и уменията на хора като проф. Джон Рикърт и д-р Марк Соул в България и сама става пример в тази роля на много колеги, както в България, така и в САЩ, вече повече от 25 години. Особено внимание заслужава и фактът, че тя е сред малцината жени образователни дейци от Европа, които помогнаха за създаването на интензивни и научни летни програми в Саудитска Арабия, когато страната постепенно започна наченки на реформи в средата на миналото десетилетие.

От 90-те години насам Жени не само е работила със стотици ученици върху техните умения и професионална етика, но и е подготвила много други млади ментори и тютори, които да продължат делото ѝ. Нейна е и една от главните заслуги RSI да не прекъсне по време на пандемията от коронавирус, съумявайки да създаде онлайн организация, обхващаща участници от пет континента и над 15 часови зони. Безупречните ѝ организационни умения и широката мрежа контакти направиха така, че в условия, в които някои ученици едва можеха да излизат от къщи, те все пак можаха да изпитат усещането от това да правиш наука и да търсиш отговора на отворени научни въпроси. Всяка година България изпраща двама участници в RSI, като първоначално тяхната селекция е била през инициативите на МФ „Св. св. Кирил и Методий“, а след това – чрез УчИМИ, в чието създаване, освен МФ „Св. св. Кирил и Методий“, участват още Фондация „Еврика“, СМБ и ИМИ-БАН. Дори след отварянето на селекцията към науки, различни от математиката и информатиката, традиционният процес на селекция, създаден от Жени Сендова, се запази. Интервюто, на което са поканени участниците, лауреати на различни науч-

ни конкурси, представлява целодневно събитие, в рамките на което те демонстрират както научната и езиковата си подготовка, така и социални си умения и обща култура. Когато през 2018 г. CEE предприе мерки по създаване на стандарти за избора на международни участници, българският подход се оказа един от най-строгите и взискателните в света.

Строгата селекция и подкрепата на Жени са и основна причина за успешното представяне в школата – традиционно високите научни постижения на българските участници в RSI включват петнадесет пъти признанието „top 5" (сред петте най-добри във всички STEM области, което означава – най-добрите писмени и устни презентации по математика/информатика). Но нейната основна гордост е учениците ѝ да чувстват като най-голяма награда принадлежността си към международна научна общност, в която ще творят съвместно с приятели през целия си професионален живот и ще наставляват следващите поколения – както в България, така и от разстояние.



Жени активно поддържа мрежата български алумни на RSI и УчИМИ, мнозина от които днес са активни и перспективни български математици и информатици, учени, преподаватели, ментори – Станислав Харизанов, Калоян Славов, Ива Рашкова, Веселин Димитров, Тодор Колев, Антони Рангачев, Веселин Кулев, Тодор Биларев, Боян Петров, Никола Чипев, Катрина Евтимова, Георги Керчев, Катерина Велчева, Рафаел Рафаилов, Станислав Атанасов, Калина Петрова, Валерия Станева, Яница Пехова, Румен Данговски, Петър Гайдаров, Христо Стоянов, Дона-Мария Иванова, Кристиан Георгиев, Димитър Карев, Таня Оцетарова, Димитър Чакъров, Виктор Колев, Ангел Райчев, Илияс Номан, Радостин Чолаков и др.

Структурата в България, която извършва дейности, сходни с тези на CEE, е учреденият през 2000 г. Ученически институт по математика и информатика, а от

2014 г. насам и Ученическият институт на БАН, създаден по подобие на УчИМИ. УчИМИ има две научни сесии годишно и собствена международна лятна школа, в рамките на три седмици, инспирирана от модела на RSI и изградена с неоценимата помощ на Жени Сендова, чиито опит и контакти помогнаха неимоверно за издигането на нивото до една от най-добрите научни школи по математика в Европа. Школата също така придоби собствен облик и структура, с разделяне на длъжността на тютора между научните ръководители и т.нар. „съветници“, студенти – бивши възпитаници на УчИМИ, като така самите те имат възможност да получат опит и обучение в наставничеството на ученици. Жени продължава да има неоценимо значение за привличането на международни партньори на школата и остава един от основните съветници за нейното провеждане, както и активен участник и лектор в нейната заключителна седмица. В България дейността на Жени Сендова се простира далеч отвъд работата с ученици с повишен интерес към STEM и много след приключването на дейността на Проблемната група по образованието. С включването на България в рамковите програми за наука на Европейския съюз, Жени Сендова и акад. Петър Кендеров са сред пионерите, които започват да създават трайни педагогически връзки с колеги от Германия, Австрия, Италия и др. Натрупаният у нас опит отлично се комбинира с концепцията за изследователския подход в образованието, развивана първоначално в Швейцария и Германия, и постигнала бързи успехи в редица държави, а геометричният софтуер като Геонекст и в последствие – Геогебра се оказа изключително подходящ за илюстриране и „раздвижване“ на геометричния материал в средното образование. Огромно количество подобни ресурси бяха създадени от Жени Сендова и нейни съавтори и сътрудници – доц. Любомир Давидов, проф. Тони Чехларова, Деси Димкова, Албена Василева и други.

Особено важни са материалите, обхващащи теми, попадащи както извън стандартния гимназиален материал, така и извън „олимпиадната математика“ – симетрии, покрития и паркетирания, движения, фрактали, класически пъзели, известни основно от преводните статии на Мартин Гарднър и вече трудни за намиране. Успоредно с тях бяха обучени и преподаватели, способни да работят с тях по креативен и адаптивен начин, съгласно нуждите на собствените си ученици и нивото на материала, подходящо за тяхната възраст. Един от най-ценните принципи в тези обучения беше наблягането на задачи без праг и таван, т.е. въпроси, които могат да бъдат зададени на много базово ниво, на ученици с малък багаж и умения и въпреки това да бъдат интересни на онези с повишен интерес и практика, които дори могат да достигнат до отворени въпроси при изследването им. Училищната геометрия се счита за особено трудна при тези проблеми, защото евклидовата геометрия е принципно решена. Задачите, които Жени Сендова представи, обогатявайки чисто геометричната тематика с комбинаторни, игрови или алгебрични елементи, предоставиха елегантно решение на този въпрос и също така – възможност за учениците да погледнат на геометрията по нов начин.

Много от тези ресурси бяха създадени в рамките на активно международно сътрудничество, като Жени Сендова беше активен участник в едни от първите български проекти, финансирани от рамковите програми за наука и иновации на ЕС. Първоначалните партньорства, в сравнително камерни консорциуми (като примерно ObDiMat) се превърнаха в непрекъсната дейност, чрез участие в редица големи

европейски проекти като Fibonacci, MaSciL, KeyCoMat и др., често в рамките на European Schoolnet и в последствие – Scientix. В ролята си на посланик на Scientix, Жени изгради голяма мрежа от талантливи и мотивирани учители и ментори в прогимназиален, в гимназиален и дори в начален курс на средното образование. Дейността ѝ намери и отражение в инициативата за създаване на иновативни училища, където тя успешно продължава да защитава тезата, че чисто материалните иновации, като електронни дъски, бележници и табла, не са критерий за иновативно училище, а това са единствено иновациите в самия начин на преподаване. Който след това би могъл да има нужда или не от съответната логистика и инвентар.

В днешно време смело можем да кажем, че възможностите за изследователско и проектно-базирано обучение никога не са били по-добри. Достъпните настолни компютри и мобилни устройства, системите за виртуална и добавена реалност, изкуственият интелект, тримерното принтиране са технологии с перфектна приложимост в една динамична и иновативна класна стая. Повечето от тях са били едва в зародиш, когато Евгения Сендова започва своята активна педагогическа дейност. Няма по-голямо свидетелство за нивото и принципната важност на постиженията ѝ от теста на времето – от това, че огромният технологичен ръст не ги направи морално остарели. Напротив, новите технологии само подобриха приложимостта на нейните методи и позволиха повече ученици и преподаватели да имат достъп до тях. А общността от учени и изследователи, която Жени съумя да създаде около себе си, продължава да подкрепя развитието на млади учени, мотивирани от нея и нейните дейности да направят първите стъпки в научната си кариера.

Честита 80-годишнина, Жени! Желаем ти още дълги години да ни вдъхновяваш с неизчерпаемата си енергия!

СЪДЪРЖАНИЕ

ПРЕДГОВОР 5

ДОКЛАДИ ПО ПОКАНА

Михаил И. Кръстанов, Надежда К. Рибарска. Множители на Лагранж в динамичната оптимизация 9

Петя Копринкова-Христова. Вдъхновени от мозъка модели и техни приложения 18

Кирил Банков. Мястото на математическото образование в световната науки 25

СЕКЦИЯ А: МАТЕМАТИЧЕСКИ СТРУКТУРИ

Цветелина Динкова, Радостина Енчева, Айнур Али. Едно параметрично представяне на обобщената фокална крива на сферична крива, която не е спирала 39

Теодора Запрянова, Дико Суружон. Върху една задача от книгата "Апроксимация на функции" на Дж. Г. Лоренц 46

Павлина Йорданова. Вероятности за асиметрични p-външни стойности 51

СЕКЦИЯ Б: МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ И ИНФОРМАТИКА

Елица Атанасова. Начини за въвеждане на оптимизационни алгоритми и математическо моделиране в училищния курс по математика 63

Витали Атиас, Ангел Георгиев, Владимир Вълканов. Представяне на иновативни идеи в търговията с енергия между равнопоставени партньори с блокчейн технология 69

Тодор Брънзов, Цветелин Заевски. Функционален модел на система за събиране на данни докладвани от пациентите 78

Лиляна Русенова, Елена Сомова. Облачен модел на корпоративно обучение, базиран на BPMN диаграми на бизнес процеси 84

Валентин Чочев, Свилена Арабаджиева. Числено изследване на опасните фактори на пожар в пътнически железопътен вагон 91

СЕКЦИЯ В: ОБРАЗОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Даниел Денев. Обучение по код на Хеминг с помощта на дидактични инструменти – методологични исторически аспекти 103

Ивайло Димитров, Мехмед Коджа. Метод за решаване на екстремални задачи в планиметрията 109

Диляна Димитрова. Оценка на ефективността на практическите упражнения в курсовете по криптография и автентикация в обучението по киберсигурност 118

Слави Кадиев. Обзор и анализ на литературни източници относно механични методи за създаване на задачи 125

Драгомир Марчев, Албена Иванова-Неделчева, Наталия Павлова. Възможности на астрономическата обсерватория към астрономическия център на Шуменския университет за STEAM-обучение 143

Севинч Мустан. Приложение на проектно-базирано обучение с игровизация чрез използване на STEM карти 150

Юлия Нинова. Приложение на композиция на хомотетии и на хомотетия (теореми на Бутен) 158

Люба Петрова, Наталия Павлова. Формиране на метакогнитивни компетентности чрез създаване на игри 167

Ирена Първанова, Венцислав Радулов. Сфера, описана около и вписана в многостен 173

Пенка Рангелова, Марта Теофилова, Даниела Георгиева. Конични сечения в задачи за геометрични места на точки в профилираната подготовка по математика 180

Тони Чехларова, Георги Гачев. Компютърни модели за изследване на пирамиди с равни ръбове, вписани в сфера 192

IN MEMORIAM

Петър Кендеров, Евгения Сендова. Райчо Лазаров – математик, вдъхновител на следващи поколения математици, Човек (1943 – 2024) 201

Азнив Каспарян, Константин Табаков. Керопе Чакърян (1944 – 2012) 213

ЮБИЛЕЕН ДОКЛАД

Константин Делчев. Жени Сендова – математическа сюита с продължение 225

CONTENTS

PREFACE 5

INVITED TALKS

Mikhail I. Krastanov, Nadezhda K. Ribarska. Lagrange multipliers in dynamic optimization 9

Petia Koprinkova-Hristova. Brain-inspired models and their applications 18

Kiril Bankov. The place of mathematics education in the world sciencers 25

SECTION A: MATHEMATICAL STRUCTURES

Cvetelina Dinkova, Radostina Encheva, Aynur Ali. One parametric representation of the generalized focal curve of a non-helical spherical curve 39

Teodora Zapryanova, Diko Souroujon. On a problem from the book "Approximation of functions" by G. G. Lorentz 46

Pavlina K. Jordanova. Probabilities for asymmetric p-outside values 51

SECTION B: MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

Elitsa Atanasova. Ways to introduce optimization algorithms and mathematical modeling in the school mathematics course 63

Vitali Atias, Angel Georgiev, Vladimir Valkanov. Revolutionizing Peer-to-Peer Energy Trading with Blockchain Technology 69

Todor Branzov, Tsvetelin Zaevski. Functional model of PROs data collection system 78

Lilyana Rusenova, Elena Somova. Cloud-based corporate training model based on BPMN business process diagrams 84

Valentin Chochev, Svilena Arabadzhieva. Numerical study of the hazardous factors of a fire in a passenger railway car 91

SECTION C: EDUCATION IN MATHEMATICS AND INFORMATICS

Daniel Denev. Training on Haming code with the help of didactic tools – methodological and historical aspects 103

Ivaylo Dimitrov, Mehmed Kodzha. A method for solving extremal problems in plane geometry 109

Dilyana Dimitrova. Evaluating the effectiveness of practical exercises in cryptography and authentication courses of cybersecurity education 118

Slavi Kadiev. An overview and analysis of literature on mechanical methods for problem creation 125

Dragomir Marchev, Albena Ivanova-Nedelcheva, Nataliya Pavlova. Opportunities of the astronomical observatory at the astronomical center of University of Shumen for steam education 143

Sevinch Mustan. Application of project-based learning with gamification using STEM cards 150

Julia Ninova. Application of composition of dilations and dilation from point (Boutin's theorems) 158

Lyuba Petrova, Nataliya Pavlova. Formation of metacognitive competences through creating games 167

Irena A. Parvanova, Vencislav D. Radulov. Circumsphere and Insphere of a Polyhedron 173

Penka Rangelova, Marta Teofilova, Daniela Georgieva. Conic sections in geometric loci problems in mathematics profiled training 180

Toni Chehlarova, Georgi Gachev. Computer models for the study of pyramids with equal edges inscribed in a sphere 192

IN MEMORIAM

Petar Kenderov, Evgenia Sendova. Raytcho Lazarov – mathematician, inspirer of future generations of mathematicians, a Man with a Capital "M" (1943 – 2024) 201

Azniv Kasparian, Konstantin Tabakov. Kerope Tchakerian (1944 – 2012) 213

ANNIVERSARIES

Konstantin Delchev. Jenny Sendova – an ongoing mathematical suite 225