Съюз на математиците в България

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ

Доклади на Петдесет и третата пролетна
конференция на Съюза на математиците в България
Боровец, 1 – 5 април 2024 г.



Union of Bulgarian Mathematicians

MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS

Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

Докладите се издават със съдействието на
Института по математика и информатика при БАН

ПЕТДЕСЕТ И ТРЕТА
ПРОЛЕТНА КОНФЕРЕНЦИЯ
НА СЪЮЗА НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
Боровец, 1 – 5 април 2024 г.

Посвещава се на 135-годишнината на Факултета по математика и информатика, Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Програмен комитет:

Председател:
проф. д-р Мая Стоянова (ФМИ–СУ)

Секретари:
гл. ас. д-р Татяна Тодорова (ФМИ–СУ)
доц. д-р Христо Костадинов (ИМИ–БАН)
гл. ас. д-р Борислава Кирилова (ФМИ–СУ)

Членове:
акад. Веселин Дренски (ИМИ–БАН)
акад. Петър Кендеров (ИМИ–БАН)
акад. Олег Мушкаров (ИМИ–БАН)
акад. Петър Попиванов (ИМИ–БАН)
чл.-кор. Николай Николов (ИМИ–БАН)
проф. дн Марусия Божкова (ФМИ–СУ)
проф. дмн Петър Бойваленков (ИМИ–БАН)
проф. дмн Стефка Буюклиева (ФМИ–ВТУ)
проф. дмн Иван Ланджев (НБУ, ИМИ–БАН)
проф. дн Манчо Манев (ФМИ–ПУ)
проф. д-р Елиза Стефанова (ФМИ–СУ)
доц. д-р Силвия Бумова (ФМИ–СУ, ИМИ–БАН)
доц. д-р Филип Петров (ФМИ–СУ)
доц. д-р Първан Първанов (ФМИ–СУ)

Технически секретар:
Албена Василева (ИМИ–БАН)

Организационен комитет:

Председател:
доц. д-р Красимира Иванова (ИМИ–БАН)

Членове:
Албена Василева (ИМИ–БАН)
Иванка Стоянова (ИМИ–БАН)
Татяна Пархоменко (ИМИ–БАН)

Редакционна колегия на поредицата:

Главен редактор:
акад. Петър Кендеров

акад. Олег Мушкаров
чл.-кор. Николай Николов
проф. дмн Петър Бойваленков
проф. дмн Иван Ланджев
Албена Василева – секретар

Гост-редактор на тома:
доц. д-р Ивайло Кортезов

Предпечатна подготовка:
Татяна Пархоменко

© Съюз на математиците в България, 2024

Формат: 1000 × 700/16	Дадена за печат на 26.02.2024 г.
Печатни коли 15	Подписана за печат на 29.02.2024 г.
Тираж 150	**ISSN 1313-3330** (Print), **2815-4002** (Online)

FIFTY-THIRD SPRING CONFERENCE
OF THE UNION OF BULGARIAN MATHEMATICIANS

Borovets, April 1–5, 2024

Dedicated to the
135th Anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics,
Sofia University "St. Kliment Ohridksi"

Program committee:

Chair:
Prof. Maya Stoyanova, Ph.D. (Sofia University)

Secretaries:
Chief Assist. Prof. Tatyana Todorova, Ph.D. (Sofia University)
Assoc. Prof. Hristo Kostadinov, Ph.D. (IMI–BAS)
Chief Assist. Prof. Borislava Kirilova, Ph.D. (Sofia University)

Members:
Acad. Vesselin Drensky (IMI–BAS)
Acad. Petar Kenderov (IMI–BAS)
Acad. Oleg Mushkarov, (IMI–BAS)
Acad. Peter Popivanov (IMI–BAS)
Prof. Nikolai Nikolov, D.Sc., Corr. Member of the Bulg. Acad. Sci. (IMI–BAS)
Prof. Maroussia Bojkova, D.Sc. (Sofia University)
Prof. Peter Boyvalenkov, D.Sc. (IMI–BAS)
Prof. Stefka Bouyuklieva, D.Sc. (Veliko Tarnovo University)
Prof. Ivan Landzhev, D.Sc. (NBU, IMI–BAS)
Prof. Mancho Manev, D.Sc. (Plovdiv University)
Prof. Eliza Stefanova, Ph.D. (Sofia University)
Assoc. Prof. Silvia Boumova, Ph.D. (Sofia University, IMI–BAS)
Assoc. Prof. Philip Petrov, Ph.D. (Sofia University)
Assoc. Prof. Parvan Parvanov, Ph.D. (Sofia University)

Technical secretary:
Albena Vassileva (IMI–BAS)

Organizing committee:

Chair:
Assoc. Prof. Krasimira Ivanova, Ph.D. (IMI–BAS)

Members:
Albena Vassileva (IMI–BAS)
Ivanka Stoyanova (IMI–BAS)
Tatiana Parkhomenko (IMI–BAS)

Editorial board of the series:

Editor-in-chief:
Acad. Petar Kenderov

Acad. Oleg Mushkarov
Prof. Nikolai Nikolov, D.Sc., Corr. Member of the Bulg. Acad. Sci.
Prof. Peter Boyvalenkov, D.Sc.
Prof. Ivan Landzhev, D.Sc.
Albena Vassileva – secretary

Guest editor of the volume:
Assoc. Prof. Ivaylo Kortezov, Ph.D.

Layout editor:
Tatiana Parkhomenko

© Union of Bulgarian Mathematicians, 2024

П Р Е Д Г О В О Р

Уважаеми колеги,

Съюзът на математиците в България събира учени от Българската академия на науките, университетски преподаватели и учители – математици и информатици от цялата страна, в курорта Боровец от 1 до 5 април на 53. Пролетна конференция на СМБ.

Тази година конференцията е посветена на 135-ата годишнина от създаването на Факултета по математика и информатика на Софийския университет „Св. Климент Охридски“. Началото на днешния ФМИ е поставено на 28 ноември 1889 г., когато се открива Физико-математическото отделение във Висшето училище в София. Традициите в качественото образование и подготовка на студентите във ФМИ, съчетани с непрекъснатия стремеж на преподавателите да внедряват и прилагат иновативни добри практики в обучението, са предпоставката ФМИ да е най-търсеният факултет от студентите за обучение по математика, информатика и информационни технологии в България. Колегията на ФМИ, студентите, администрацията, както и възпитаниците на ФМИ, имат право и повод за гордост, че са част от 135-годишната история на нашата алма матер и в частност на Факултета по математика и информатика. Разбира се, това задължава всички нас – преподавателите във ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“ – ежедневно да показваме и развиваме своите научни познания, професионален опит и педагогически умения, за да отстояваме и повишаваме заедно авторитета на ФМИ като лидерска образователна институция. По време на научната програма на конференцията, а така също и в неформална обстановка, благодарение на СМБ, математиците и информатиците ще могат да обменят опит, да обогатят своите познания, както и да обсъдят актуалните за динамичното ни съвремие проблеми и подходите за тяхното решаване.

Тази година ще бъдат отбелязани и редица годишнини от рождението на видни български и чуждестранни математици и информатици. Акад. Петър Попиванов ще ни разкаже интересни факти за Карл Густав Якоби по повод 220 години от рождението му и ще представи доклад на тема „120 години от рождението на чл.-кор. проф. дмн Георги Брадистилов (1904 – 1977)“. По повод 80-годишния юбилей на професор Николай Янев, доклад ще изнесе проф. Марусия Славчова-Божкова. Ще имаме удоволствието да чуем една лична изповед от проф. Боян Димитров, озаглавена „Пътят ми житейски в математиката“, а проф. Йордан Стоянов ще представи доклад на тема „Колмогоров, стохастика в България и вероятностни задачи с изненадващи решения“. Колектив от катедра Компютърна информатика на Факултета по математика и информатика на Софийския университет – доц. Атанас Семерджиев, доц. Дафина Петкова, доц. Димитър Димитров, доц. Калин Георгиев, доц. Нора Ангелова, доц. Петър Армянов, доц. Трифон Трифонов – всички ученици на проф. д-р Магдалина Тодорова, ще отбележат 60 години от нейното рождение с доклад на тема „Информатика за всички: наследството на Магдалина Тодорова – учител и учен“.

Традиционно на конференцията ще бъдат представени три доклада по покана, по един във всяка от трите секции. Проф. дн Ася Русева, ФМИ на Софийския университет, ще представи доклад на тема „Афинни блокиращи множества“ в секция А. В секция Б проф. д-р Десислава Иванова от Технически университет – София ще

представи „Анализ на големи биомедицински данни в подкрепа на прецизната медицина“, а в секция В „Математика за начинаещи програмисти“ ще ни представят доц. Красимир Манев и Румяна Караджова. По време на 53. Пролетна конференция на СМБ ще бъдат докладвани петнадесет научни съобщения, от които две са в секция А, пет в секция Б и осем в секция В.

Ще се проведе дискусия върху предстоящите промени на списъка с професии и обучението в професионални гимназии и паралелки в България с модератор проф. Галина Момчева от Института по математика и информатика на БАН. Освен това ще се проведат два квалификационни курса за учители. Първият курс е на тема „Статистически анализ на данни и тяхната компютърна визуализация“ с ръководители проф. дн Марусия Славчова-Божкова, гл. ас. д-р Деница Григорова и гл. ас. д-р Емил Каменов от ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“, а във втория курс проф. Галина Момчева от ИМИ–БАН ще обучи и подобри уменията на учителите по „Компютърно моделиране с музика“.

Ще се проведе и традиционната Ученическа секция на Ученическия институт по математика и информатика, на която ученици ще представят изследователските си проекти по математика, информатика и информационни технологии.

Изказвам своята огромна благодарност към членовете на Програмния комитет за усилията и стремежа заедно да запазим традициите и духа на Пролетната конференция на Съюза на математиците в България! Благодаря на тримата секретари на секции – доц. д-р Христо Костадинов, гл. ас. д-р Татяна Тодорова и гл. ас. д-р Борислава Кирилова, на членовете на Организационния комитет и специално на техническия секретар Албена Василева за всеотдайността, с която организира и подготви научната програма. Сърдечни благодарности на редактора на този сборник – доц. д-р Ивайло Кортезов, както и на Татяна Пархоменко – за цялостната предпечатна подготовка и техническото му оформление.

Пожелавам дните на всички участници в 53. Пролетна конференция на СМБ да са интересни в научен план, ползотворни и творчески вдъхновяващи за нови научни успехи!

София 28.02.2024 г.

проф. д-р Мая Стоянова
Председател на Програмния комитет
на 53. Пролетна конференция на СМБ

ДОКЛАДИ ПО ПОКАНА

INVITED TALKS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

ON AFFINE BLOCKING SETS*

Assia Rousseva

Faculty of Mathematics and Informatics,
Sofia University "St. Kliment Ohridksi", Sofia, Bulgaria
e-mail: assia@fmi.uni-sofia.bg

We survey the known results on the minimal size of a blocking set in the finite affine geometries $\mathrm{AG}(n,q)$.
Keywords: finite affine geometries, finite projective geometries, arcs, blocking sets, linear codes, Bruen's bound.

АФИННИ БЛОКИРАЩИ МНОЖЕСТВА

Ася Русева

Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски", София, България
e-mail: assia@fmi.uni-sofia.bg

В статията е направен обзор на известните резултати върху задачата за намиране на минималната мощност на блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n,q)$.
Ключови думи: крайни афинни геометтрии, крайни проективни геометрии, арки, блокиращи множества, линейни кодове, граница на Бруен.

1. Introduction. A set of points $\mathcal{B}$ in an affine geometry $\mathrm{AG}(n,q)$, $q=p^h$, p a prime number, is called a t-fold blocking set, or a t-fold intersection set with respect to hyperplanes, if $|\mathcal{B}\cap H|\geq t$ for every hyperplane H in $\mathrm{AG}(n,q)$ and there exists a hyperplane H_0 with $|\mathcal{B}\cap H_0|=t$. A t-fold blocking set $\mathcal{B}$ in $\mathrm{AG}(n,q)$ with $|\mathcal{B}|=N$ is referred to as an (N,t)-blocking set. In this paper, we deal with the following problem:

Given a positive integer t and a prime power $q=p^h$, determine the minimal size of a t-fold blocking set in $\mathrm{AG}(n,q)$.

* https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.009-017
This research was supported by the Bulgarian National Science Foundation under Contract KP-06-N72/6-2023.
2020 Mathematics Subject Classification: 51E15, 51E21, 51E22, 51A05, 94B05.

The first results on affine blocking sets were obtained independently by Jamison [11] and Brouwer and Schrijver [8]. They proved that for a 1-fold blocking set $\mathcal{B}$ in $\mathrm{AG}(n,q)$ one has the lower bound

$$|\mathcal{B}| \geq n(q-1)+1.$$

This has been generalized by Bruen in a seminal paper [9], and later on by Ball and Blokhuis. Constructions of good affine blocking are scarce and consist mainly in taking a union of lines with carefully chosen directions.

This survey is structured as follows. In Section 2, we give an overview of the known lower bounds on the size of a t-fold blocking set. Section 3 contains the known constructions for blocking sets meeting Bruen's bound. In section 4, we present a general construction in $\mathrm{AG}(n,q)$ which gives in many cases optimal blocking sets.

2. Lower bounds on the size of an affine blocking set. The first lower bound on the size of an affine blocking sets was obtained by Jamison [11].

$$|\mathcal{B}| \geq n(q-1)+1. \tag{1}$$

The same result was proved by Brouwer and Schrijver in [8]. They pointed out that the bound is sharp for all dimensions n. In the example below we sketch the proof of the fact that the size of a blocking set in $\mathrm{AG}(2,q)$ has at least $2q-1$ points. The Jamison bound for an arbitrary dimension is easily obtained by considering polynomials in n variables.

Example 1. Let $\mathcal{B}$ be a blocking set in $\mathrm{AG}(2,q)$. Without loss of generality one can take $(0,0) \in \mathcal{B}$. By doing this, we block all lines through $(0,0)$. The lines not incident with $(0,0)$ have equations $uX+vY=1$. Define:

$$F(X,Y) = \prod_{(b_1,b_2)\in\mathcal{B}\setminus\{(0,0)\}} (b_1X+b_2Y-1).$$

Clearly, $F(u,v)=0$ for all $(u,v) \in \mathbb{F}_q^2 \setminus \{(0,0)\}$. The polynomial F can be written in the form

$$F(X,Y) = F_1(X,Y)(X^q-X) + F_2(X,Y)(Y^q-Y) + G(X,Y),$$

where the degree of G in X and in Y does not exceed $q-1$, i.e. $\deg_X G \leq q-1$ and $\deg_Y G \leq q-1$. Now the polynomials $XF(X,Y)$ and $YF(X,Y)$ are zero for all $(u,v) \in \mathbb{F}_q^2$. Hence $XG(X,Y)$ and $YG(X,Y)$ are also zero for all $(u,v) \in \mathbb{F}_q^2$. By the Combinatorial Nullstellensatz [1]

$$XG(X,Y) = G_1(X,Y)(X^q-X) + G_2(X,Y)(Y^q-Y),$$

whence $G_2 \equiv 0$ and $X^{q-1}-1$ divides G. Similarly, $Y^{q-1}-1$ divides G. Hence

$$|\mathcal{B}|-1 = \deg F \geq \deg G \geq 2(q-1).$$

A generalization of the Jamison bound to subspaces of arbitrary dimension was given by Bruen in [9].

Theorem 2 ([9])**.** *For a t-fold blocking set $\mathcal{B}$ with respect to the hyperplanes in $\mathrm{AG}(n,q)$ one has*

$$|\mathcal{B}| \geq (n+t-1)(q-1)+1. \tag{2}$$

In what follows we call this bound *the Bruen bound*. The bound is non-trivial for values of t satisfying $1 \leq t \leq (n-1)(q-1)$. For $t > (n-1)(q-1)$ Bruen's bound becomes worse than the trivial bound

$$|\mathcal{B}| \geq tq,$$

obtained by counting the points of the blocking set on q parallel hyperplanes.

The proof of (2) is algebraic and does not give an idea how to construct blocking sets that meet this bound. It was pointed out by Zanella [17] that for

$$t > \frac{(n-1)(q-1)+1}{2}$$

blocking sets meeting the Bruen bound do not exist.

In [2] Ball proved that the Bruen bound cannot be attained if the parameters t, n and q satisfy some special numerical condition. Using the polynomial method he proved the following theorem.

Theorem 3 ([2]). *For $t < q$ a t-fold blocking set with respect to hyperplanes in $AG(n,q)$ has at least $(n+t-1)(q-1)+k$ points provided there exists a j with $k-1 \le j < t$ such that the binomial coefficient $\binom{k-n-t}{j} \not\equiv 0 \pmod p$.*

For $k = t$, i.e. $j = t-1$ one gets the following corollary.

Corollary 4 ([2]). *For $t < q$ a t-fold blocking set with respect to hyperplanes in $\mathrm{AG}(n,q)$ has at least $(n+t-1)q - n + 1$ points provided*

$$\binom{-n}{t-1} \not\equiv 0 \pmod p.$$

The next two theorems improve the bounds from Theorems 2 and 3. However the bounds they provide are not explicit. The proofs of these results give no idea about the structure of the blocking sets that meet the corresponding bounds.

Theorem 5 ([5]). *Let there exist an (N,t)-blocking set in $\mathrm{AG}(n,q)$, where $q = p^h$, and p is a prime. Then for all integers $\varepsilon \ge 1$ the coefficient of $X^{N-tq+\varepsilon}$ in*

$$(X-1)^{N-q^n}(X^p-1)^{\frac{(q^{n-1}-t)q}{p}}$$

is divisible by q^n.

Theorem 6 ([6]). *Assume there exists an (N,t)-blocking set in $\mathrm{AG}(n,q)$, where $q = p^h$, and p is a prime, with*

$$N = (t+n+1-e)q - n - 1 - \varepsilon,$$

where $e \in \{1,\dots,t-1\}$ and $\varepsilon \ge 1$ is an integer. Then

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{-t+e-1}{j}\binom{N}{(t-e+1)q-\varepsilon+j(q-1)} \equiv 0 \pmod{p^e}.$$

The proofs of these results are algebraic and use the so-called polynomial method (see also [3, 4, 7]).

3. Blocking sets meeting Bruen's bound. Affine blocking sets with $t = 1$ exist in affine geometries of arbitrary dimension n. This fact was noted by Brouwer and Schrijver in [8] who proved that a pencil of n lines in general position is such a blocking set. This blocking set is clearly not unique. One might also construct such blocking sets by induction starting from the affine line $\mathrm{AG}(1,q)$. Given a blocking set in $\mathrm{AG}(n,q)$ of size $n(q-1)+1$ construct a new blocking set in $\mathrm{AG}(n+1,q)$ by taking $n(q-1)+1$ points in any hyperplane H that form such a blocking set plus $q-1$ additional points – one in each hyperplane parallel to H.

It was noted by Ball in [2] and by Zanella in [17] that a $(q^2, q-1)$-blocking set in $\mathrm{AG}(3,q)$ can be obtained if we delete a tangent plane from the hyperbolic quadric in

PG$(3, q)$. Such blocking set meets obviously the Bruen bound for $n = 3$ and $t = q - 1$.

A non-trivial example of blocking sets with $t = 2$ lying on the Bruen bound was constructed by Ball in [2].

Fix an $(n+1)$-arc with points P_i, $i = 1, \ldots, n+1$, in a hyperplane H of PG$(n+1, q)$. Select lines L_i in $PG(n, q)$ with $P_i \in L_i$ in such a way that $L_i \cap L_n = Q_{i,i+1}$, $L_{n+1} \cap L_1 = Q_{n+1,1}$. Let $\mathcal{B}$ be the union of these lines outside H. All planes are blocked twice apart from $H_{i,i+1} = \langle P_1, \ldots, P_{i-1}, Q_{i,i+1}, P_{i+2}, P_{n+1} \rangle$ and $H_{n+1,1} = \langle P_2, \ldots, P_n, Q_{n+1,1} \rangle$. The point $P \in H_{1,2} \cap H_{2,3} \cap \ldots \cap H_{n,n+1}$ is from AG$(n, q) =$ PG$(n, q) \setminus H$. Now for every $Q \in H_{n+1,n}$ $\mathcal{B} \cup \{P, Q\}$ is an affine 2-fold blocking set of size $(n+1)q - n + 3$. If one can choose $P = Q$ then the blocking set has one point less and meets the Bruen bound. By Theorem 3 this should only be possible for $n \equiv 0 \pmod{p}$. In [2] Ball shows that this condition is also sufficient. The construction is presented on the figure below.

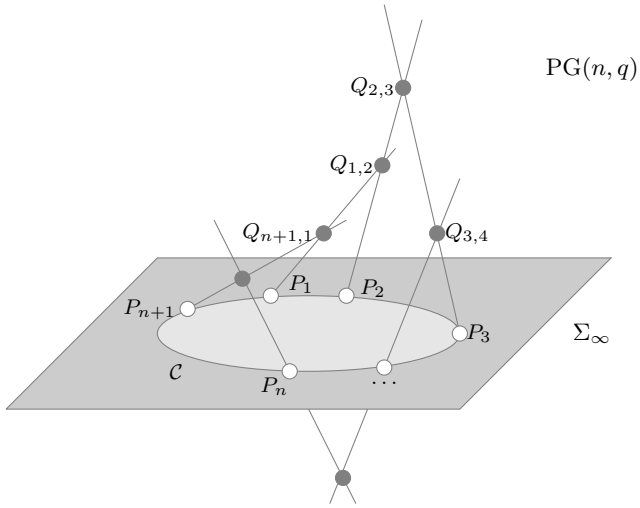


Fig. 1. An $((n+1)q - n + \varepsilon, 2)$-blocking set in AG$(n, q)$

It has been pointed out by Ball in [2] that in all cases with $t + n = q + 2$, Theorem 3 does not improve on the Bruen bound. In fact, it was demonstrated in [14] that in this case blocking sets meeting the Bruen bound can be constructed.

Theorem 7 ([14])**.** *There exists a* $(q^2, q - n + 2)$*-blocking set in* AG(n, q) *for every prime power* q *and every* $3 \leq n \leq q - 1$.

Proof. Let T be subspace of codimension 2 in $\Omega \cong$ PG(n, q) and denote by $H_0, \ldots, H_q$ the hyperplanes through T in Ω. Fix $q + 1$ points $x_1, \ldots, x_q$ in T that form a $(q+1)$-arc, a normal rational curve minus a point, say. In each of the hyperplanes H_i, $i = 1, \ldots, q$, select a line L_i meeting T in x_i. Now the set of points

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{q} (L_i \setminus x_i)$$

is a $(q - n + 2)$-fold blocking set in $\Omega \setminus H_0 \cong$ AG(n, q). This construction is presented on Figure 2 below. $\square$

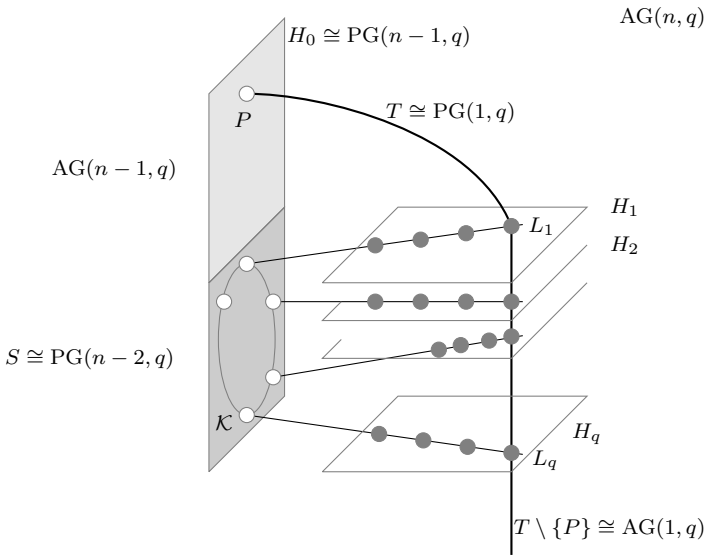


Fig. 2. The $(q^2, q-n+2)$-blocking set in $\mathrm{AG}(n,q)$

This construction can be modified further to construct t-fold blocking sets of relatively small size that are close to being optimal. They are obtained by removing $n-2+s$ points from each of the lines $L_1, \ldots, L_s$ chosen as in Theorem 7.

Theorem 8. *For every $s = 0, 1, \ldots, q+1-n$, there exist $(q^2-s(n-2+s), q-(n-2+s))$-blocking sets in $\mathrm{AG}(n,q)$.*

In the case $s = 1$ we get an optimal blocking set that meets the bound from Theorem 3.

Corollary 9. *For every q there exists an affine blocking set with parameters $(q^2 - n + 1, q - n + 1)$ in $\mathrm{AG}(n,q)$. Blocking sets of this size are optimal.*

The optimality of the latter is proved by Corollary 4. Indeed, we have

$$\binom{-n}{t-1} = \frac{(-n)\cdot(-n-1)\ldots(-q+1)}{(q-n)!}.$$

Since for $i = 0, \ldots, q-n-1$, $-n-i$ and $q-n-i$ are divided by the same power of p, we get that $\binom{-n}{t-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Summing up, up to this moment the only known families of blocking sets meeting the Bruen bound are the following:

(1) $t = 1$: for all n and all q (Brouwer-Schrijver);

(2) $t = 2$: for all $n \equiv 0 \pmod{p}$, where $p = \operatorname{char} \mathbb{F}_q$ (Ball);

(3) $t = q-n+2$: for all $3 \le n \le q-1$ and all q (Landjev-Rousseva).

It is conjectured that blocking sets meeting the Bruen bound do not exist for $t \ge q$.

4. General constructions. We start this section with a theorem which describes a general construction for blocking sets in $\mathrm{AG}(n,q)$.

Theorem 10 ([15]). *Let $n \geq 3$ be a positive integer and let $q = p^h$ be a prime power. Assume there exist*

– *an (M,w)-arc in $\mathrm{PG}(r,q)$, where $2 \leq r \leq n-2$, and*

– *an (M',u)-blocking set in $\mathrm{AG}(n-r-1,q)$.*

Then there exists an (N,t)-blocking set in $\mathrm{AG}(n,q)$ with

$$N = qM, \quad t = \min\{M - w, aqu\},$$

where $a = \lfloor M/M' \rfloor$.

The theorem is presented on Figure 3 below.

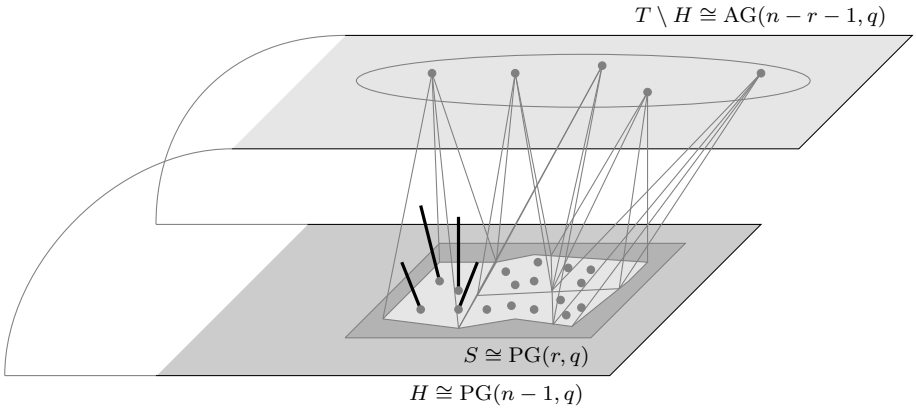


Fig. 3. General construction for affine blocking sets

An important special case of the theorem is obtained when the arc $\mathcal{K}$ and the blocking set $\mathcal{L}$ have the same size.

Corollary 11. *Let $n \geq 3$ be a positive integer and let $q = p^h$ be a prime power. If there exist*

– *an (M,w)-arc in $\mathrm{PG}(r,q)$, for some r satisfying $1 \leq r \leq n-2$, and*

– *an (M,u)-blocking set in $\mathrm{AG}(n-r-1,q)$*

then there exists an (N,t)-blocking set in $\mathrm{AG}(n,q)$ with

$$N = qM, t = \min\{M - w, qu\}.$$

The next two examples provide constructions for blocking sets meeting the bound from Theorem 6. These are the first examples of blocking sets lying on the implicit bound from Theorem 6. They exploit the connection between linear codes and (multi)sets of points in finite projective geometries (see also [12, 13, 16]).

Example 12. In this example we consider the parameters $n = 9$, $t = 8$, $q = 8$. By Theorem 6 (cf. also the tables in [6]) one has that the size of an $(N,8)$-blocking set in

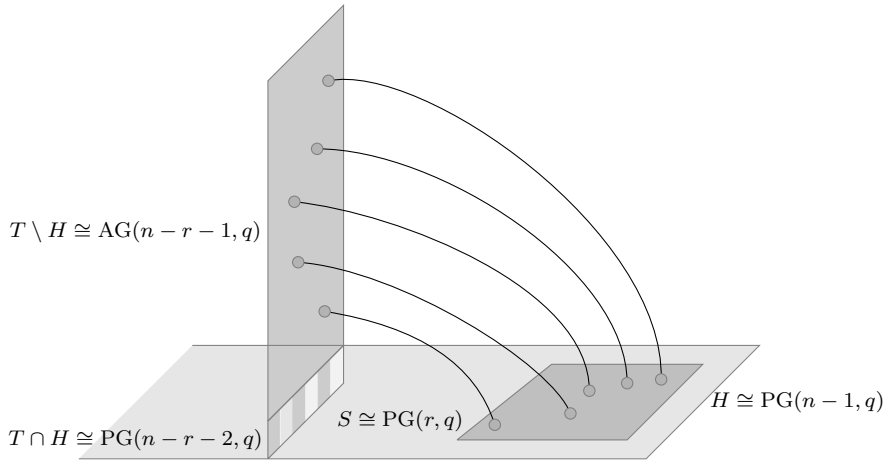


Fig. 4. The construction from Corollary 11

$\mathrm{AG}(9,8)$ is lowerbounded by $N \geq 120$. Assume that there exists a $(119,8)$-blocking set in $\mathrm{AG}(9,8)$, i.e. $N = 119$, $t = 8$, $n = 9$, $q = 8$. Now

$$119 = (t+n+1-e)q - n - 1 - \varepsilon = 134 - (8e+\varepsilon),$$

whence $e = 1, \varepsilon = 7$. Now by Theorem 6

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \sum_{j=0}^{8} (-1)^j \binom{-8}{j} \binom{119}{57+7j} \pmod 2 \\ &\equiv \sum_{j=0}^{8} \binom{7+j}{j} \binom{119}{57+7j} \pmod 2 \\ &\equiv \binom{119}{57} + \binom{119}{113} \equiv 1+0 \pmod 2, \end{aligned}$$

a contradiction.

We try our construction for different choices of the dimension r. Let us take $r = n-3 = 6$. For the construction we need an arc in $\mathrm{PG}(6,8)$ and a blocking set in $\mathrm{AG}(2,q)$. We take an arc with parameters $(15,7)$ associated with the $[15,7,8]_8$-code which is obtained by shortening the quasicyclic $[16,8,8]_8$-code (cf. [10]). The blocking set in $\mathrm{AG}(2,q)$ is a $(15,1)$-blocking set, e.g. the union of two nonparallel lines. Now Corollary 11 yields a $(120,8)$-blocking set which meets Ball's lower bound and is therefore optimal.

A possible generalization of this construction would be the following. Take $q = t = 2^h$, and $n = 2^h + 1$. Now by Theorem 6 there exists no $(N-1, t-1)$ affine blocking set in $\mathrm{AG}(n,q)$ with $N = 2^{2h+1} - 2^h$. Thus a hypothetical $(2^{2h+1} - 2^h, 2^h)$-blocking set would be optimal. In fact, our construction above solves the case $h = 3$. A possible construction would use Corollary 11 with a $(2^{h+1}, 1)$-blocking set in $\mathrm{AG}(2, 2^h)$ and a $(2^{h+1}-1, 2^h-1)$-arc in $\mathrm{PG}(2^h-2, 2^h)$. In coding theoretic terms this arc is associated with a code with parameters $[2^{h+1}-1, 2^h-1, 2^h]_{2^h}$. If we were able to construct linear codes with these

parameters for $h \geq 4$, we would immediately get an infinite family blocking sets meeting the implicit Ball bound from Theorem 6.

Example 13. In this example, we fix $q = 4$ and $n = 4s + 1$, where $s \geq 1$ is an integer. We apply Corollary 11 with $r = 3s - 1$. Thus for the construction we need an arc $\mathcal{K}$ in $\mathrm{PG}(3s - 1, 4)$ and a blocking set $\mathcal{L}$ in $\mathrm{AG}(s + 1, 4)$. A natural choice for $\mathcal{L}$ is a $(3s + 4, 1)$-blocking set meeting Bruen's bound. Such a blocking set does exist in all dimensions. For $\mathcal{K}$ we would like to have an arc with parameters $(3s + 4, 3s)$ which is associated with a linear $[3s + 4, 3s, 4]_4$-code.

It is known that caps are associated with linear codes of dual distance at least four, i.e. if C is a linear code associated with a cap then $d(C^\perp) \geq 4$. Hence the orthogonal to the codes needed in our construction are $[3s + 4, 4]_4$-codes that are associated with caps in $\mathrm{PG}(3, 4)$. Since the maximal size of a cap in $\mathrm{PG}(3, 4)$ is 17, we get codes with the required parameters only if $3s+4 \leq 17$, i.e. for $s = 1, 2, 3, 4$ (cf. also Grassl's tables [10]). In these four cases Corollary 11 produces a $(12s + 16, 4)$-blocking set in $\mathrm{AG}(4s + 1, 4)$.

Remarkably, the constructed four blocking sets are optimal. Calculating the conditions of Theorem 6 we obtain that there is no $(12s+5, 4)$-blocking set in $\mathrm{AG}(4s+1, 4)$ for $s = 1, 2, 3, 4$ (the lower bounds for the cases $s = 1, 2$ are contained also in Table 1 at the end of [6]). Such a blocking set does not exist also for $s = 5$. Unfortunately, in this case we cannot construct a $(76, 4)$-blocking set from our construction due to the nonexistence of a $[19, 15, 4]_4$-code. We can take a $[20, 15, 4]_4$-code instead and get a $(80, 4)$-blocking set which lies relatively close to the lower bound of 76.

REFERENCES

[1] N. Alon. Combinatorial Nullstellensatz. *Combin. Probab. and Computation*, **8**, no. 1–2 (1999), 7–29.

[2] S. Ball. On intersection sets in Desarguesian affine spaces. *European J. Comb.*, **21** (2000), 441–446.

[3] S. Ball. On sets of vectors of a finite vector space in which every subset of basis size is a basis. *J. Eur. Math. Soc.*, **14** (2012) 733–748.

[4] S. Ball, J. De Beule. On sets of vectors of a finite vector space in which every subset of basis size is a basis II. *Des. Codes Cryptogr.*, **65** (2012) 5–14.

[5] S. Ball, A. Blokhuis. A bound for the maximum weight of a linear code. *SIAM J. Discrete Math.*, **27** (2013) 575–583.

[6] S. Ball. A p-adic condition on the weight of a codeword of a linear code. *Des. Codes Cryptogr.*, **72** (2014) 177–183.

[7] A. Blokhuis. On multiple nuclei and a conjecture of Lunelli and Sce. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **3** (1994), 349–353.

[8] A. E. Brouwer, A. Schrijver. The blocking number of an affine space. *J. Combin. Th. Ser. A*, **24** (1978), 251–253.

[9] A. A. Bruen. Polynomial multiplicities over finite fields and intersection sets. *J. Comb. Th. Ser. A*, **60** (1992), 19–33.

[10] M. Grassl. Code Tables: Bounds on the parameters of various types of codes, `http://codetables.markus-grassl.de`.

[11] R. Jamison. Covering finite fields with cosets of subspaces. *J. Comb. Th. Ser. A/* **22** (1977), 253–256.

[12] I. Landjev. Linear codes over finite fields and finite projective geometries. *Discrete Mathematics*, **213** (2000), 211–214.

[13] I. Landjev. The geometric approach to linear codes, in: Finite Geometries (eds A. Blokhuis, J. Hirschfeld, D. Jungnickel, J. Thas), Ser. Developments in Mathematics, 2001, 247–257.

[14] I. Landjev, A. Rousseva. On the sharpness of Bruen's bound for intersection sets in Desarguesian affine spaces. *Designs, Codes and Cryptography*, **72** (2014), 551–558.

[15] I. Landjev, A. Rousseva. A General Construction for Affine Blocking Sets, *Results in Mathematics* **75** (2020), #142.

[16] I. Landjev, L. Storme. Linear codes and Galois geometries, chapter 8 in: "Current research topics in Galois geometries" (eds. L. Storme and J. De Beule), NOVA Publishers, 2012, 187–214.

[17] C. Zanella. Intersection sets in $AG(n, q)$ and a characterization of the hyperbolic quadric in $\mathrm{PG}(3, q)$. *Discrete Math.* **255** (2002), 381–386.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

BIG BIOMEDICAL DATA ANALYTICS IN SUPPORT OF PRECISION MEDICINE*

Desislava Ivanova
Technical University of Sofia, Faculty of Applied Mathematics and Informatics,
Sofia, Bulgaria
e-mail: d_ivanova@tu-sofia.bg

The goal of this paper is to present the major outcomes of the author scientific research in the area of Big Biomedical Data analytics in support of precision medicine, specifically genomics and oncology. The main parts of the paper reveal the state-of-the art in big data technologies and their significance for the advance of molecular biology and medicine in the context of the computational paradigm for scientific research. Furthermore, it presents approaches for gene finding and early detection of breast cancer and thyroid cancer based on big biomedical data analytics.
Keywords: big data, biomedical analysis, knowledge data discovery, precision medicine.

АНАЛИЗ НА ГОЛЕМИ БИОМЕДИЦИНСКИ ДАННИ В ПОДКРЕПА НА ПРЕЦИЗНАТА МЕДИЦИНА

Десислава Иванова
Технически университет – София, Факултет Приложна математика и информатика,
София, България
e-mail: d_ivanova@tu-sofia.bg

Целта на тази статия е да представи основните резултати от научните изследвания на автора в областта на анализа на големи биомедицински данни в подкрепа на прецизната медицина, по-специално геномиката и онкологията. Основните части на статията разкриват най-съвременните технологии за големи данни и тяхното значение за напредъка на молекулярната биология и медицина в контекста на изчислителната парадигма за научни изследвания. Освен това, статията представя подходи за откриване на гени и ранно откриване на рак на гърдата и рак на щитовидната жлеза въз основа на анализ на големи биомедицински данни.
Ключови думи: големи данни, биомедицински анализ, откриване на данни от знания, прецизна медицина.

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.018-024
2020 Mathematics Subject Classification: 68-XX, 92-XX.

1. Introduction. In recent times, Big Data has garnered widespread recognition as a transformative force in scientific research and a highly promising trend in the realm of Information Technology (IT). This paradigm shift, labelled "Data-Intensive-Scientific-Discovery" (DISD), is reshaping the landscape of experiments and knowledge discovery. Advanced technologies like Big Data Analytics, Internet of Things (IoT), and Cloud Computing present researchers with potent tools for Knowledge Data Discovery (KDD) and intelligent decision-making. These KDD solutions play a pivotal role in detecting intricate DNA anomalies, identifying rare genetic diseases, and addressing cancer. This forward-thinking approach proves particularly advantageous in the analysis of big biomedical data for precision medicine, offering substantial societal and health-related benefits. Precision medicine has been one of the hottest topics nowadays and involves disease treatment that considers individual genetic profile, environmental specifics, and lifestyle of the individual.

2. Big data in scientific research. In recent years, Big Data has been recognized by eminent scientists, researchers, and analysts as a transformative force in scientific studies and a challenging trend in Information Technology (IT) [4, 7]. This acknowledgment has accelerated the development of methods and technologies for processing large volumes of data, leading to profound shifts in scientific research paradigms. The emergence of the novel scientific paradigm, "Data-Intensive Scientific Discovery (DISD)", has revolutionized scientific research and innovations, encompassing phases such as data accumulation, filtering, integration and presentation, analysis, and data-intensive decision making. This paradigm introduces challenges in processing technologies, including data accumulation and storage, searching, sharing, analysis, visualization, high-performance processing resources, parallel and distributed processing, parallel input/output, and in-memory processing. Scalability and streaming pose primary challenges in Big Data analysis, revolutionizing fundamental scientific studies in molecular and computational biology.

In 2001, the formal definition of Big Data introduced the 3V model by Doug Laney, encapsulating Volume, Velocity, and Variety. Prominent entities like Gartner, IBM, and Microsoft continue to use this "3Vs" model to delineate Big Data characteristics. A 2011 IDC report asserts the emergence of new technologies to extract value from diverse and big data, leading to the 4V model—Volume, Variety, Velocity, and Value. The modernized 5V model introduces Veracity, emphasizing data accuracy and reliability within Big Data.

The Strategic Research and Innovation Agenda (SRIA) of the European Big Data Value Association (BDA) highlights Big Data's revolutionary impact on fundamental science, with biology and medicine leading the way. The next generation of data analysis methods must adeptly handle diverse big data sources, characterized by varying attributes, trust levels, and update frequencies. Effective knowledge acquisition through data analysis is crucial, as the European Commission designates Big Data as a primary asset for the development of fundamental scientific research across all sectors.

Molecular and computational biology, heavily reliant on big data, is a key area of focus, with intensive research in bioinformatics driving innovative methods for processing and analyzing biological and biomedical data.

3. Big data in support of precision medicine. It is widely recognized that a medical treatment effective for some patients may not be suitable for others, and indi-

viduals can experience varied reactions to the same drug. The aspiration to tailor medical approaches to individual characteristics has been a longstanding goal in medicine, with Precision Medicine referring to the customization of medical treatment based on individual patient characteristics. This involves categorizing individuals into subpopulations with variations in disease sensitivity, biology, prognosis, or response to specific treatments, rather than creating unique drugs or medical devices for each patient. In cancer treatment, understanding the genetic profile is crucial, especially for diseases like breast cancer considered genetic disorders due to mutations in specific genes. Precision medicine groups patients based on their specific characteristics, facilitating the assignment of optimal treatment based on the characteristics of the target group [5].

The journey of precision medicine begins with genomics, relying on omics platforms for comprehensive analysis and multi-scale data interpretation. Big Genomic Data platforms like Google Genomics, IBM Reference Architecture for Genomics, and SAP®Connected Health platform serve as collaborative hubs, fostering the creation of patient-centric solutions to enhance healthcare, reduce costs, and offer connected healthcare services. Since the year 2000, the medical and biological sciences have entered the post-genomics era, marked by the advent and significant development of genomics. The rise of genomics is driven by advanced technology for complete genomic sequencing, specifically determining the nucleotide sequence of entire genomes [1, 5].

The big genomic data ecosystem's conceptual model includes the latest DNA sequencing technologies, the generation of "omics" data, in silico technologies producing insilico experimental data, genome databases, cancer genome databases, and associated technologies like the Internet of Medical Things (IomT) and cloud technologies. A new challenge has emerged as the capacity of genomic databases is expanding faster than the capability of analytical tools.

In addition to genomics, medical images represent a rapidly expanding source of Big biomedical data in healthcare. The volume of storage required for medical images has tripled since 2005, prompting healthcare institutions to turn to cloud solutions for ample storage capacity. Medical imaging cloud technologies encompass web-based platforms for imaging analytics, offering high-speed cloud computing infrastructures, advanced visualization, deep learning, and cloud-based storage and sharing of medical images. The collection and aggregation of patient-generated health data from Internet of Medical Things (IomT) devices play a pivotal role in population health management, emphasizing the importance of proficiency in Big Data Analytics for society to deliver high-quality patient care.

4. Big genomic data analytics for gene finding. In the current landscape, there is a critical need for efficient algorithms and computational power to analyse the escalating volumes of data across diverse industries. Genomics emerges as a prominent sector within the realm of big data, requiring not only the extraction of meaningful information but also the acquisition of knowledge, uncovering insights, identifying patterns, and making sense of the data. Past methods, including statistical and graph theoretical approaches, data mining, and machine learning, have seen partial success in terms of performance, particularly in dealing with the complex nature of living organisms, where the coordinated actions of different gene groups play a crucial role. Identifying the "active and deactivated" genes, especially in the genomics era, poses a significant challenge, with promoters being key elements involved in differential transcription regulation [6].

Promoters, situated near the starting point of protein biosynthesis, play a pivotal role in coordinating gene expression through distinct transcriptional control mechanisms. The presented results stem from experimental exploration focused on detecting enhancer-promoter interactions in Genomic Big Data, utilizing machine learning algorithms such as Decision Tree (DT) and Support Vector Machine (SVM) [8]. The pipeline involves pre-processing, classifier application to identify enhancer-promoter interactions, and presenting the experimental results. Feature extraction from DNA sequences of enhancer and promoter elements is conducted using two approaches: searching for known transcription factor binding site motifs and employing a word embedding model for direct sequence embedding into a new feature space. The subsequent stage focuses on data classification based on extracted features, employing Decision Tree and Support Vector Machine classifiers.

Operating within the Apache Spark environment [12], the experimental framework facilitates streaming and real-time analysis of big data. Leveraging the Apache Spark machine learning library (MLlib) in Python, the investigation utilizes enhancer-promoter interaction data from the TargetFinder project [14], encompassing six cell lines. The developed software, coded in Python, implements the proposed approach using Decision Tree and Support Vector Machine classifiers. The detection of enhancer-promoter interactions, a challenging genomics phenomenon, is experimentally explored through machine learning, demonstrating competitive accuracy levels ranging from 91% to 95%.

5. Big data in support of cancer detection. Today, medical treatment plans are often generic and not specifically tailored to individual patients, resembling what doctors would prescribe to anyone with the same condition. This approach is rooted in "standards of care", which are the best courses of prevention or treatment for the general population. In the context of breast cancer, these standards typically involve routine self-exams, mammograms after a certain age, and conventional chemotherapy if a tumor is detected. In case the initial treatment proves ineffective, doctors and patients proceed to the next option in a trial-and-error fashion, with significant stakes involved [1, 5].

Each person possesses a unique variation in the human genome, and while most variations have no impact on health, an individual's well-being is influenced by genetic variations along with behaviours and environmental factors. Modern advances in personalized medicine leverage technology to confirm a patient's fundamental biology, including DNA, RNA, or proteins, ultimately leading to the confirmation of diseases [4]. The concept of personalized medicine can be applied to innovative and transformative approaches in healthcare, enabling predictions of a person's risk for a particular disease based on one or several genes. All these activities aligned with the concept of personalized medicine generate a substantial amount of data (big medical datasets) that requires processing and analysis.

5.1. Big data analytics for early detection of breast cancer. Breast cancer initiates when breast cells undergo uncontrolled growth, resulting in a tumor that can be detected through an X-ray or felt as a lump. The malignancy of the tumor is determined by its ability to invade surrounding tissues or metastasize to distant areas of the body. While predominantly affecting women, breast cancer can also impact men, originating from different parts of the breast, often starting in the ducts or glands responsible for milk production [2, 4].

Personalized medicine plays a significant role in advancing preventive care for breast cancer. For example, women with a family history of breast or ovarian cancer are often genotyped for mutations in the BRCA1 and BRCA2 genes. These genes produce tumor suppressor proteins crucial for DNA repair and stability. Mutations in these genes, when inherited, elevate the risk of several cancers, including breast and ovarian cancer. The proposed conceptual model for early breast cancer detection aims to provide expert oncologists with a second opinion, enhancing accuracy, reducing biopsy rates, and saving time. The model involves stages such as data cleaning, feature extraction, classification using the Naive Bayes classifier, and performance analysis, achieving an accuracy of 0.9786 on the Wisconsin breast cancer database [9].

In global breast cancer research, various techniques are employed to process medical data for identification, presenting challenges due to dataset readability, diverse structures, and consideration of different attributes. The creation of benchmark breast cancer datasets is a pressing future objective, facilitating the evaluation and comparison of algorithmic results. Collaborative efforts between IT specialists and oncology experts are crucial to categorize breast cancer anomalies accurately and establish relevant datasets for comprehensive analysis.

5.2. Big data analytics for Early detection of thyroid cancer. The thyroid gland, situated in the lower neck and resembling a butterfly, plays a pivotal role in metabolism regulation by releasing hormones like Triiodothyronine (T3) and Thyroxine (T4). Discrepancies in hormone production, along with the presence of nodules or tumors (benign or malignant), can lead to thyroid disorders. Detection methods involve physical examinations, blood tests for hormone levels, and ultrasound for confirming the presence of thyroid nodules.

Medical imaging has undergone significant transformations, encompassing techniques like X-ray radiography, computed tomography (CT), and ultrasound. Ultrasound imaging, utilizing sound waves, stands out for its real-time images, portability, cost-effectiveness, and absence of harmful radiation, making it a primary method for thyroid anomaly detection [10].

Recent years have witnessed extensive research in thyroid cancer detection, facilitated by tools and databases developed through computer technology. Innovations like EU-TIRADS classification, Cancer Genome Atlas (CGA), and Thyroid Cancer Risk Assessment Tool (TCRA) have streamlined research, enhancing thyroid cancer early detection and personalized therapy [3, 13].

The early thyroid cancer detection approach utilizes ultrasound medical image analysis is proposed involving pre-processing, anomaly detection, and post-processing stages. The pre-processing phase eliminates noise and performs attribute selection. Anomaly detection integrates image segmentation using Convolutional Neural Networks (CNNs) and Support Vector Machines (SVM) for classification. The post-processing stage presents detected anomalies for interpretation by thyroid cancer experts.

Implemented in Apache Spark with MLlib [12], the conceptual model utilizes CNNs and SVM for classification. CNNs, with five layers and 500 nodes per convolution layer, enhance accuracy. SVM, known for handling large datasets, uses a kernel function for optimal hyperplane selection in a higher-dimensional space [11, 12]. Medical imaging analysis reveals SVM outperforms CNN, achieving 87.8% accuracy compared to CNN's 72.9%. SVM exhibits greater stability, although CNNs consume more time for classifica-

tion with exponentially increasing training time based on input data dimension.

6. Conclusion. This paper presents some results and experience of the scientific research in the interdisciplinary area of high IT in support of precision medicine. It has taken years and great efforts of collaboration with our partner experts in molecular biology and medicine to conduct our investigation.

The major goal has been to build up intelligent digital solutions based on Big data technologies to help medical experts and researches in molecular biology process the huge amount of information associated with their analysis and decisions and basically, to support them in extracting knowledge (value) effectively out of the relevant Big biomedical data. The results of the scientific projects have been successfully applied in a number of our BSc and MSc courses at the Technical University of Sofia such as Bioinformatics, Medical Informatics, IoT Ecosystem Security, Big Data Analytics, Big Data Technologies in Support of Precision Medicine, Programming for IoT Ecosystem, etc. The future work implies porting our integrated digital solution in support of precision medicine on high performance computer system, the focus being on streaming and GPU accelerated infrastructures.

REFERENCES

[1] A. Akalin, M. Kormaksson, S. Li, F. E. Garrett-Bakelman, M. E. Figueroa, A. Melnick, C. E. Mason. Methylkit: a comprehensive R package for the analysis of genome-wide DNa methylation profile. *Genome Biol.*, **13**, (2012), R87 `https://doi.org/10.1186/gb-2012-13-10-r87`.

[2] Breast Cancer Surveillance Consortium, Risk Estimation Datasets & Risk Factors Dataset:`https://www.bcsc-research.org/data`.

[3] Cancer Genome atlas, `cancergenome.nih.gov/`.

[4] Challenges and opportunities with Big Data, a community white paper available at: `http://cra.org/ccc/docs/init/bigdatawhitepaper.pdf`.

[5] P. Galetsi, K. Katsaliaki, S. Kumar. Big data analytics in health sector: Theoretical framework, techniques and prospects. *Int. J. Inf. Manage.*, **50** (2020), 206–216.

[6] eNCoDe (encyclopedia of DNa elements) Consortium is an international collaboration of research groups funded by the National Human Genome Research Institute (NHGRI), `https://www.encodeproject.org/`.

[7] R. H. Hariri, E. M. Fredericks, K. M. Bowers. Uncertainty in big data analytics: survey, opportunities, and challenges. *J. Big Data*, **6** (2019) 44.

[8] D. Ivanova, P. Borovska, V. Gancheva. Experimental Investigation of Enhancer-Promoter Interactions out of Genomic Big Data based on Machine Learning. *International Journal of Computers*, **3** (2018), 58–62, `http://www.iaras.org/iaras/journals/ijc`.

[9] D. Ivanova. Big Data analytics for early Detection of Breast Cancer Based on Machine Learning. Proceedings of the 43rd International Conference applications of Mathematics in engineering and economics, aIP Conf. Proc. 1910, `https://doi.org/10.1063/1.5014010`.

[10] D. Ivanova. Artificial intelligence in internet of medical imaging things: The power of thyroid cancer detection, Scopus. 2018 International Conference on Information Technologies, InfoTech 2018 Proceedings 8510725;, IEEE, DOI: 10.1109/InfoTech.2018.8510725.

[11] D. Ivanova. Internet of Medical Imaging Things and the Application of Information Technologies for Early Detection of Thyroid Cancer. *Scientific Journal "In-Silico Intellect"*, **1**, no. 1 (2017), 20–25.

[12] MLlib apache Spark: `https://spark.apache.org/mllib`.

[13] W. H. Wolberg. Breast Cancer Database, University of Wisconsin Hospitals, Madison, Wisconsin, USA.
[14] TargetFinder project: `https://github.com/carringtonlab/TargetFinder`.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

MATHEMATICS FOR BEGINNING PROGRAMMERS*

Krassimir Manev[1], Rumyana Karadjova[2]

[1]Journal "Mathematics and Informatics", Sofia, Bulgaria, e-mail: k.manev@azbuki.bg
[2]Sofia High School of Mathematics, Bulgaria, e-mail: rumikaradzhova@gmail.com

Computer programming is one of the most modern and promising professions of our time. To ensure sufficient manpower for the software industry, not only on a national but also on a global scale, it is necessary a systematic and comprehensive training of narrow specialists in the field. Start of the training of future programmers as early as possible is very important. The competitions (olympiads) in programming are a traditional form of early training for programmers with a very high qualification. Unfortunately, the knowledge of mathematics from the regular school classes, are rather not sufficient for the preparation of the participants in programming competitions. This research is based on task analysis from the national programming competitions for the very young students and aims to show what kind of mathematical knowledge and skills are required for preparation of successful competitors.
Keywords: competitive programming, education, tasks classification, mathematical skills.

МАТЕМАТИКА ЗА НАЧИНАЕЩИ ПРОГРАМИСТИ

Красимир Манев[1], Румяна Караджова[2]

[1]Списание „Математика и информатика“, e-mail: k.manev@azbuki.bg
[2]Софийска математическа гимназия, e-mail: rumikaradzhova@gmail.com

Програмирането на компютри е една от най-модерните и перспективни професии на нашето време. За да се осигурят достатъчно кадри за софтуерната индустрия, не само в национален, но и в световен мащаб, е необходима систематична и всеобхватна подготовка на тесните специалисти в областта. От огромно значение е обучението на бъдещите програмисти да започва колкото може порано. Състезанията (олимпиадите) по програмиране са традиционна форма за ранно обучение на програмисти с много висока квалификация. За съжаление, знанията по математика, които редовният училищен курс съдържа, не винаги са достатъчни за подготовката на участниците в състезанията по програмиране. Това изследване е базирано на анализ на задачите от националните състезания по програмиране за ученици от най-младшата възрастова група и има за цел да покаже какви математически знания и умения са необходими за подготовката на успешни състезатели, за да се търсят най-добрите начини за постигане на такива знания и умения.
Ключови думи: състезателно програмиране, обучение, класификация на задачите, математически умения.

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.025-035
2000 Mathematics Subject Classification: 68-00.

1. Въведение. Наскоро излезе от печат книгата [1], предназначена да подпомогне подготовката на учениците, които вземат участие в националните и регионалните състезания по програмиране в най-младшата състезателна група Е (до 5 клас, включително). След като в първата глава на книгата са представени състезанията по програмиране, в останалите глави подробно са разгледани няколко тематични области, в рамките на които се съставят състезателните задачи за тази група. Тематичните области са подредени хронологично, в реда по който би трябвало да се изучават в школите по състезателно програмиране, така че учениците да се подготвят своевременно за отделните състезания през годината – шестте национални (трите кръга на Националната олимпиада по информатика, Есенния, Пролетния и Летния национални турнири) и двете регионални (Есенния софийски и Пролетния софийски турнири).

За по-лесното му усвояване, материалът във всяка тематична глава е представен в няколко раздела, на които може да се разбие темата. Изложението във всеки раздел започва с въвеждане на необходимия теоретичен материал – както алгоритмичен, така и математически. След това материалът се илюстрира с решенията на няколко задачи от състезания. В края на всеки раздел са събрани задачите, давани на състезания у нас (от 2007 г. до наши дни), за решаването на които са необходими знанията и уменията, представени в раздела, с кратки указания за решаването им.

В тази статия обобщаваме нашия опит от преподаване на програмиране и подготовка на състезатели в ранна възраст, като представяме тази част от направения за целите на книгата анализ, която касае необходимите за начинаещите програмисти математически знания. Целта е да установим за кои от тях състезателите могат да разчитат на редовните часове по математика, а кои трябва непременно да бъдат преподавани в школите по състезателно програмиране (или в школите по математика, които много от състезателите по програмиране в тази възраст посещават).

2. Начални познания. Подготовката на състезатели по програмиране започва със заниманията в курс Увод в програмирането, където обучаваните се запознават със синтаксиса и семантиката на един език за програмиране (за състезанията по програмиране този език, без каквото и да било съмнение, трябва да е C/C++). Затова, изграждането на математическата култура на бъдещия програмист би трябвало да започне още от този курс. В този раздел представяме някои важни математически понятия, запознаването с които би трябвало да се направи паралелно, както в заниманията с програмиране, така и с математика.

На първо място ще спомена понятието *променлива*. Заради високата абстрактност на това понятие, използването му в обучението по математика става малко по-късно – в 6. – 7. клас. При изучаването на език за програмиране от процедурен тип, какъвто е C/C++, такова отлагане е **невъзможно**. За да може една програма да обработи някакви данни, в кода ѝ трябва да бъдат *декларирани* променливи, които са необходими за съхраняване на входните данни, както и променливи, в които да се съхраняват междинни резултати.

Трудността, с която неизбежно се сблъскват учениците в случая е *двойствеността* на понятието променлива – единство на *име* и *стойност*. Както в математиката, така и в програмирането, споменаваме една променлива с нейното име, а всъщност използваме стойността ѝ в предписаното пресмятане или обработка. За програмирането тази двойственост е от ключово значение. Тя ни позволява с един

и същ фрагмент код да правим различни обработки, като сменяме стойностите на променливите, чиито имена са споменати във фрагмента. Това намалява обема на необходимия код и прави програмите по-лесни за четене и изчистване от грешки. Практиката, в началния етап на обучение на програмисти входните данни да се задават в кода на програмата, скрива същността на понятието променлива и не е полезна.

Ако начинаещият програмист не разбира добре двойнствеността на понятието променлива, създаването на ефективен код, както е споменато по-горе, е затруднено. А по време на тестването на програмата, неспособността на ученика да си представя ясно как се сменят стойностите на променливите, чиито имена участват в някой фрагмент, води до невъзможност за ефективно тестване на програмата. Докато, ако си е изяснил добре двойствеността, включително и в заниманията с математика, тези процеси няма да го затруднят. Когато начинаещият програмист добре разбере двойнствеността на понятието променлива и упражнява систематично това разбиране при написване на програми, той няма да има никакъв проблем, когато в обучението по математика се наложи да решава задачи, в които данните са зададени не с константи, а с променливи.

Тук е мястото да обърнем внимание и на един вид променливи, употребата на които старателно се избягва, за дълго време, при обучението на начинаещи програмисти – променливите от тип *указател*. Няма нищо свръхестествено в този тип променливи, както обичайно се твърди. Просто стойностите на този вид променливи са адреси на полета от компютърната памет. Имената на масиви, както и имената на функции, употребата на които е неизбежна, дори в този ранен етап, са променливи от тип указател. Недоброто разбиране на същността на понятието променлива като цяло води до избягване на използването на променливи от този тип в ранните етапи на обучение на програмисти, а това влияе отрицателно на нивото на подготовката им.

След като начинаещите програмисти са се справили с разбирането на понятието променлива, на дневен ред излизат понятията *операция* и *израз*. Да наречем с понятието *(затворена) алгебрична система* двойката (Σ, Ω), където Σ е някакво множество от стойности, а Ω – множество от операции, чиито *аргументи*/*операнди* са стойности от Σ и резултатът от изпълнението на операция е стойност от Σ. Училищната математика традиционно се ограничава с *числовите* алгебрични системи, като постепенно разширява обхвата на множествата Σ и Ω. Отначало стойностите са целите положителни числа, а операциите – събиране и умножение. Добавянето на операцията изваждане води до добавянето на нулата и целите отрицателни числа в множеството от стойности, а на операцията деление – до добавяне в множеството на стойностите на дробните (рационалните числа) и това по същество е всичко, което може да се използва в програмирането от училищния курс по математика.

За обучението на програмисти това не е достатъчно. Още в ранните етапи на обучение начинаещият програмист неизбежно се сблъсква с втора алгебрична система – *двоичната логика*, в която стойностите са *истина* (`true`) и *неистина* (`false`), а операциите са *дизюнкция* (*или*), *конюнкция* (*и*) и *отрицание*. Преобладава мнението, че двоичната логика може да се преподава систематично едва от 8 клас нагоре, понеже затруднява учениците. А всъщност научаването на таблиците на трите логически операции е много по-лесно от научаване на таблицата за умножение на

десетичните цифри, да не говорим за трудността на операцията деление на цели числа, която се изучава в 4 клас.

Да добавим още, че двоичната логика е основата на математическите разсъждения, които изучаващите математика безусловно трябва да владеят при решаване на задачи. Освен това, тя по естествен начин се разширява до алгебричната система на *подмножествата* на някакво множество със същите операции, наричани *обединение* (вместо дизюнкция), *сечение* (вместо конюнкция) и *допълнение до универсалното* (вместо отрицание). А доброто познаване на логическите операции естествено се разширява до познаването на *побитовите логически операции* – мощен инструмент в арсенала на най-квалифицираните програмисти, които се занимават най-вече със създаването на сложни софтуерни продукти – операционни системи, компилатори и т.н.

Освен това, в бъдещата си работа начинаещите програмисти ще се сблъскат с много по-трудни за усвояване алгебрични системи, като *алгебрата на Клини* над множеството от думите (низовете) над крайна азбука, и най-вече с *обектно-ориентираното програмиране*, чиято същност е изграждането на различни алгебрични системи над множества от *обекти*, наричани *класове*, и оперции над обектите от класа, имплементирани в *методи*.

Когато се занимаваме с алгебрични системи, много важни са различните *свойства на операциите*, като наличието или отсъствието на комутативност, асоциативност и/или дистрибутивност на една или друга операция в числовите алгебрични системи. Отсъствието на съответен опит в изследването и използването на свойствата на операциите в една алгебрична система води до нейното неефективно прилагане. Затова по-обстойното запознаване с различни алгебрични системи, както в обучението на програмисти (където е неизбежно), така и в обучението по математика, сериозно би обогатило математическата култура на учениците.

Тук бихме искали да формулираме един принцип, който може и трябва да бъде активно използван при преподаването, особено в условия на ограничен хорариум – *доброто познаване на една* ***видова концепция*** *(каквато в случая е някоя от числовите алгебрични системи) трябва да бъде използвано за бързо въвеждане и на други видови концепции от същата* ***родова концепция*** *(каквато в случая е концепцията алгебрична система).* Ще наричаме този принцип *родово обобщаване.*

За някои читатели, дори запознати с програмирането, може да се окаже изненада, че езикът за програмиране C и наследилите от него синтаксиса си езици (като C++, C# и т.н.) предоставят неочаквано много операции над различни типове стойности – в C++ те са 67 (шестдесет и седем!!!). При това положение да се очаква, че само познаването на числовите алгебрични системи и евентуално двоичната логика са достатъчни за обучението на програмисти, е неоснователно.

Смисълът на операциите на една алгебрична система е в съставянето с тях и стойностите на системата (представени като константи или в променливи) на *изрази*. Понятието израз е сложна рекурсивна конструкция и в училищната математика дефинирането му се избягва. Но съставянето на правилно конструирани и смислени изрази е фундаментално за математиката и за програмирането. Както вече споменахме, C-подобните езици за програмиране предоставят голям брой операции, а това дава много възможности за съставяне на полезни изрази.

Освен обичайните *числови* (или *аритметични изрази*), най-познати за ученици-

те, и неизбежните за програмистите *логически изрази*, важни за бъдещите програмисти са и изразите, в които участват споменатите по-горе указатели – т.нар. *адресни изрази*, изразите с *побитови операции*, както и изразите в алгебрата на Клини, наричани *регулярни изрази*. Затова, дори без да се стига до формална дефиниция, изясняването на понятието израз е важно – както за информатиката, така и за математиката. За целта ще бъде полезно да се използва формулираният по-горе принцип на родово обобщаване, като всяка нова алгебрична система се въвежда бързо, чрез сравняване свойствата на нейните операции със свойствата на операциите в някоя позната алгебрична система.

Ключови за доброто разбиране на понятието израз от произволен вид са понятията *приоритет* и *асоциативност* на участващите в него операции, както и *употребата на скоби*, за определяне реда на прилагане на операциите. Докато с приоритета на аритметичните операции и употребата на скоби учениците в тази възраст се запознават още в началното училище, за асоциативност почти не се говори, тъй като при числовите изрази тя е само лява. Що се отнася до употребата на скоби, доброто познаване на този механизъм има два аспекта, всеки от които е важен за програмиста. Нашите наблюдения показват, че *разкриването на скоби* в израз, в алгебрична система в която има двойки операции, удовлетворяващи дистрибутивния закон, представлява проблем. При уменията за прилагане на дистрибутивните свойства в обратна посока – *изваждането на аргумент пред скоби* – състоянието е много по-лошо.

Нека разгледаме съвсем прост пример за неглижиране на изваждането пред скоби, който се отразява много зле на ефективността на програмите. В тялото на цикъл се налага да се пресметне изразът $ab+ac$. Записването на израза по този начин води до изпълняването на две умножения и едно събиране. В същото време за пресмятане на еквивалентния израз $a(b+c)$ е нужно само едно умножение. Предвид факта, че времето на процесора за изпълняване на едно умножение е много по-голямо от времето за изпълняване на едно събиране, ако тялото на цикъла трябва да се изпълни милион пъти, тази загуба на бързодействие е значителна.

3. Математика в ранния етап на решаване на състезателни задачи. Под ранен етап в подготовката на състезатели имаме предвид времето преди състезателите да са писали програми с използване на оператори за цикъл и масиви. В този етап задачите са силно ориентирани към математическата подготовка и математическите способности на състезателите. Затова се налага, по време на подготовката за първите състезания, сериозно да се обърне внимание на обогатяване и затвърдяване на знанията по математика.

Първата тема, с която обикновено се започва, е Частно и остатък при деление на цели числа. Най-общата математическа постановка в задачите по тази тема е: Зададено е множество от обекти с N елемента и тези елементи трябва да се разпределят в групи от по K елемента, като важен за решението на задачата е броят на получилите се групи. Възможни са два варианта – или се търси броят на „пълните групи“ с K елемента, който е частното от *целочисленото деление* N/K или броят на всички групи, включващ и възможната единствена група с по-малко от K елемента. За целта се използва операцията $N\%K$ – намиране на остатък при целочислено деление, която състезателите трябва да познават от уводния курс по програмиране. В случай, че остатъкът е ненулев, тогава трябва да се добави единица към частното N/K.

Темата Частно и остатък предлага много възможности да се проверят и усъвършенстват не само програмистките, но и математическите качества на състезателите. Като пример можем да посочим задача от състезание, за решението на която трябва да се намери израз за най-малкото четирицифрено число, което се дели на d и най-голямото трицифрено, което се дели на d. В тази възраст учениците познават понятието остатък от уроците по математика, без да му се обръща особено внимание, а то води по естествен път към дробните числа, както и към понятията *долна цяла част* и *горна цяла част*. Трудностите, които учениците изпитват при работа с дроби, води до избягване в тази възраст на задачи, изискващи използването на променливи от дробния тип `double`.

Следваща тема, която често се използва за съставяне на задачи за състезания по програмиране за разглежданата възрастова група, е Бройни системи, като най-често става дума за добре познатата на учениците десетична бройна система. Основен проблем при тези задачи може да бъде непознаването на операцията степенуване. Затова състезателите трябва да бъдат запознати с операцията *степенуване*, което в училищния курс става по-късно.

Две са базовите подзадачи в тази тема, които често се срещат като част от задачите по темата – отделянето на цифрите на число, записано в десетична позиционна бройна система, и намиране на числото по зададени цифри. След като учениците са се справили успешно с темата Частно и остатък и са се запознали с операцията степенуване, лесно можем да им покажем естествено решение на първата задача, тъй като най-младшата цифра на записа на едно число е остатъкът при деление на основата на системата, например 10, а с целочисленото деление на числото на 10 премахваме най-младшата му цифра.

Обратната задача изисква повече внимание. В задачите за тази възраст числата са с малко (3–5) цифри в десетична система, така че познавайки полиномиалния запис по степените на основата състезателите могат лесно да напишат нужния им аритметичен израз за възстановяването на числото. Но стремейки се към обобщаване е ясно, че това не е подход, когато броят на цифрите на числото и/или основата на системата са параметри на задачата. Тривиалният програмистки подход би бил, за всеки едночлен на полиномното представяне да се намери нужната степен на основата, да се умножи по съответната цифра и да се събере полученото с намерената до момента част от сумата. Добре познаващите операцията степенуване програмисти лесно ще съобразят, че всяка следваща степен се получава с умножаване на предходната по основата, и ще ускорят процеса на пресмятане като, при n-цифрено число, сведат броя на умноженията до $2n - 2$.

В този случай добрата математическа култура може да ни доведе до още по-добро решение. С прилагане на „трудния“ дистрибутивен закон за умножението спрямо събирането можем да покажем как представянето

$$N = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \cdots + a_0b^0$$

може да се преобразува в еквивалентното

$$N = (\ldots((0.b + a_{n-1}).b + a_{n-2}).b + \cdots).b + a_0$$

(*правило на Хорнер*), при което възстановяването на число от неговите цифри изисква само $n - 1$ умножения.

Следвайки принципа за родово обобщаване, лесно можем да пренесем опита от

десетична бройна система за другите бройни системи, които се използват в информатиката – двоичната, осмичната и шестнадесетичната (която използва като цифри и буквите A, B, C, D, E и F). Тези бройни системи много рядко биха се срещнали в задачи за тази възрастова група, но съответен опит би бил много полезен за състезателите в бъдеще. Тук е възможно още едно обобщение. Използването на букви като цифри в шестнадесетичната бройна система ни подсказва, че за цифри на бройна система може да използваме буквите на някаква азбука, например малките латински букви, съпоставяйки им поредни номера от 0 (за `a`) до 25 (за `z`). Така, низовете над азбуката може да бъдат разглеждани като числа записани в 26-тична позиционна бройна система – подход, които със сигурност ще е полезен на състезателите в бъдеще.

Трета тема в този ранен етап на подготовка е Подреждане на числа (или други обекти, които могат да са приравнят към числови, каквито са знаците на клавиатурната азбука) и в частност – намирането на минимален и максимален елемент на множество от стойности. В програмистката практика наричаме алгоритмите за подреждане *сортиране*. Лекотата, с която бихме се отнесли към тази тема, имайки предвид, че учениците добре познават сравняването на числови стойности, е недопустима. Сравнително простите задачи, давани на състезания на този етап, изискват подреждането на малък брой стойности, но чувството за важността на сортирането на зададените стойности, като първа стъпка към построяването на ефективно решение на задачата, трябва да се изработи още на този етап от обучението.

Друга тема, от която много често се дават задачи на състезания в тази възрастова група, е Мерни единици. Основната техника в този вид задачи е превръщане на всички стойности в най-малката мерна единица, спомената в задачата, извършване на нужните пресмятания в най-малката мерна единица и връщане на резултата в мерните единици, определени от условието. Затова, за тази тема е най-съществено да се знаят мерните единици и на колко по-малки единици се разделя една по-голяма, когато такова разделяне е възможно. Особеностите тук са мерните единици, които имат специфично, различно от десетичното разделяне Такива са, например, мерните единици за време (1 минута = 60 секунди, 1 час = 60 минути, 1 денонощие = 24 часа, 1 седмица = 7 денонощия, а броят на денонощията в един месец или една година е различен за различните месеци и години), както и единиците за обема на компютърни данни, при които разделянето е през кратни на 10 степени на двойката – 1 кибибайт = 2^{10} = 1024 байта, 1 мибибайт = 2^{20} байта = 1024 кибибайта, 1 гибибайт = 2^{30} байта = 1024 мибибайта и т.н.

4. Ad hoc задачи. Една специфична категория задачи, не само в тази възрастова група, а във всички състезания по програмиране, са така наречените *ad hoc* (от латински – специфичен, създаден само за целта). Това са задачи, за които е трудно или практически невъзможно да бъдат отнесени към някоя от добре очертаните теми. Ролята на тези задачи е много важна, тъй като те провокират творческото мислене на състезателите. Още повече, че в състезанията масово се използват ad hoc задачи, за да се проверят креативността на учениците и способността им да създават свои алгоритми, които не са научени от книгите. Разбира се, в решението на една ad hoc задача може да се срещнат като подзадачи алгоритмични стъпки, които състезателите трябва да са научили от книгите и заниманията в школите.

Анализът на използваните през годините състезателни ad hoc задачи за тази въз-

растова група показва, че едно важно за решаването на тези задачи умение, е умението **да се разбие множеството** от възможни входни данни на различни случаи и **да се изчерпят** различните случаи. Това ни води до необходимостта учениците в тази възрастова група да познават понятията *подмножество* (или *комбинация*), *вариация* и *пермутация* за неголеми базови множества – 3, 4, 5 елемента, така че елементарни познания по комбинаторика са безусловно необходими. В училищния курс за тези понятия става дума много късно. Преди години излезе от печат книгата [2], предназначена да запознае ученици от 3. и 4. клас с основни понятия на комбинатериката на достъпно за тях ниво. Авторката използваше с успех материала от тази книга в извънкласни форми. За съжаление книгата не получи необходимата популярност.

Други задачи, които на този етап наричаме ad hoc, защото не се предполага дълбоко познаване на необходимата математика, изискват съставяне и решаване на несложно *линейно уравнение* (или достатъчно проста *система от линейни уравнения*). Те имат пряка връзка с често използваните задачи от същия тип в обучението по математика и се оказват доста трудни за ученици дори в 7. клас. Ще илюстрираме трудностите, които изпитват повечето състезатели в тази възрастова група при решаване на тези не толкова сложни задачи с един пример. Количествата от четири продукта в склад са обвързани с прости линейни зависимости:

$$a + b + c + d = n; a + b = k; a = b; b + c = m,$$

където n, m и k са зададени. Задачата е да се намери количеството на всеки от продуктите. Както се вижда, системата е съвсем проста и не са нужни свръхусилия, за да се намерят формули за количествата: $a = b = k/2, c = m - b, d = n - a - b - c$. В състезанието са участвали 46 ученици, като 12 са написали решение за 30 т. (от възможни 100), 4 са написали решение за 12 т., а 30 не са получили точки.

По-подробното вглеждане в ad hoc задачите ще покаже и други математически умения, които трябва да се владеят, за да се постигне успех при решаването им, но основна, и решаваща в случая, е способността **да се четат и интерпретират правилно** *формални описания* (*дефиниции*) на обекти и събития и *твърдения* (*теореми*), задаващи свойствата на така дефинираните обекти. При много от учениците в тази възраст тази способност не е добре развита. Отказът да се заучават дефиниции и формулировки на твърдения, да се вниква в смисъла им и да се използват при решаване на задачи наблюдаваме дори и при студенти в информатичните специалности. Това ни отвежда към много сериозната дискусия за причините за т.нар. функционална неграмотност на някои ученици, за която съвършено неоснователно се обвинява прекаленото теоретизиране. А на практика такова няма!

5. Цикли и масиви. Когато в процеса на обучение състезателите от тази възрастова група достигнат до задачите, в които се изисква съставяне на цикли и използване на масиви, центърът на теоретичната подготовка се измества от математическите знания и умения, които са решаващи в началния етап на подготовката, към чисто програмистки умения и запознаване с основни алгоритми. Но това не означава, че в този етап на подготовка не са нужни математически знания и умения.

На първо място трябва да обърнем внимание на усложняването на един от проблемите, за които вече споменахме – усета за двойнственост на понятието променлива. Управляващите променливи на създаваните цикли имат много по-голяма динамика

на изменение на стойностите, отколкото при статичните, нециклични конструкции и затова проследяването на измененията в тях е по-трудно. Още по-трудно става проследяването на измененията в стойностите на елементите на масив, тъй като вече става дума за изменения на двойки от стойности – на индексната променлива, определяща мястото на елемента в масива, и на самия елемент. Затова в началото на статията определихме като ключова способността зад имената на променливите да се виждат ясно техните стойности в различните моменти от работата на програмата. А това умение може да бъде постигнато и с решаване на математически задачи, в които стойностите са зададени като променливи, а не като константи.

Един от критериите при оценяване на решенията на състезателни задачи, освен *коректността на резултата*, е времето, за което е получен. Непростото математическо понятие, което стои зад този критерий наричаме *сложност на алгоритъма по време* (в най-лошия случай). За да е успешен един състезател, трябва отрано да свикне да *оценява* сложността на намисления от него алгоритъм. За целта, първо трябва да съпостави на всяка комбинация от входни данни *размер* N на входа – например, броя на числата в един тестов пример. След което да намери функция на N, стойността на която е броят на операциите[1], които алгоритъмът ще изпълни при вход с размер N. Поведението на тази функция (растежа на стойностите ѝ, когато нараства N) е мярка за сложността по време (т.е. за бързодействието) на алгоритъма.

Когато програмите не използват цикли, лесно се вижда, че броят на изпълнените операции не се различава съществено при различните тестови примери и може да го ограничим с някаква константа – означаваме сложността на такива алгоритми с $O(1)$. Когато в програмата се използва цикъл, например най-често използвания в такива случаи

```
for(i = 0; i < N; i++) {тяло на цикъла}
```

и в тялото на цикъла няма друг цикъл, т.е. сложността му е $O(1)$, тогава лесно обясняваме, че сложността на цикъла е някаква линейна функция на N, която означаваме с $O(N)$. Когато в програмата има няколко отделни цикъла с линейна сложност, тогава сложността на цялата програма също е линейна, тъй като сума на няколко линейни функции на N е линейна функция. Както се вижда, за създаване на умения за оценяване сложността на използваните алгоритми от огромно значение е математическата култура на състезателя.

С въвеждането на задачи, изискващи влагане на цикли, нещата се усложняват. Причината е, че тялото на вътрешния от два вложени цикъла вече не е с константна сложност, както в класическите алгоритми за сортиране, и са необходими допълнителни усилия. Използвайки уменията за разглеждане на всички възможни случаи, придобити при решаване на ad hoc задачи, оценяваме сложността на вътрешния цикъл, като за размер на входа при него използваме стойността на управляващата променлива на външния цикъл при влизане във вложения, и сумираме получените стойности. При такова оценяване е важно състезателят да знае да намира сумата на първите няколко члена на прогресия, което в училищния курс се изучава много късно. Затова за начинаещите състезатели трябва да се обяснят правилата за сумиране

[1] Броят на изпълнените от алгоритъма операции, разбира се, не е най-точната мярка за бързодействие на алгоритъма, но за практически цели тя е напълно достатъчна.

при някои характерни прогресии – например, сумата на целите числа от 1 до N, на нечетните числа от 1 до $2K + 1$ или на първите N степени на двойката. Първата от тези суми може да се обясни на ученици дори в 5 клас по начина, приписван на невръстния Гаус.

Голямото предизвикателство при организирането на вложени цикли е правилното определяне на границите, в които се мени управляващата променлива на вложения цикъл, които са функции на управляващата променлива на външния цикъл. В [1] предложихме класическа техника за намиране на двата израза – разглеждане на стойностите на двете граници за първите няколко стойности на променливата на външния цикъл, построяване на **хипотеза** и проверка на хипотезата за следващи няколко стойности. Наблюдението на стойностите на търсена функция, изработване на хипотеза за израза, чрез който може да я пресмятаме и проверка на хипотезата (особено когато не разполагаме с време за доказателството ѝ), е важна математическа техника, която за съжаление рядко се упражнява в училище.

Работата с двумерни масиви отново ни отпраща към училищната математика, тъй като двумерният масив е опростен вариант на един от квадрантите на класическата Декартова *координатна система*. При работа с двумерни масиви се налага да се използват двойките от цели *координати* на елементите в двумерен масив – номер на ред и номер на стълб, което в училищния курс става не по-рано от 6-7 клас. При това трябва да се има предвид, че координатната система на двумерния масив е леко видоизменена спрямо традиционната – завъртяна е на 90° около началото в посока на часовата стрелка, т.е. първата координата е индексът на реда, а втората – индексът на стълба.

6. Делимост на числа. Това е последната тема, от която се дават задачи в тази възрастова група. Тя по естествен начин разширява и допълва темата Частно и остатък. Затова се предполага, че понятията *частно*, *остатък*, *дели се* (*е кратно*) *на*, *е делител/множител на*, са добре познати. Необходимо е освен това да се знаят популярните признаци за делимост на 2, 3, 5, 9, както и понятията *най-голям общ делител* (НОД) и *най-малко общо кратно* (НОК).

С понятието НОД е свързано запознаването с една от първите **циклични** алгоритмични техники с математическа основа – *алгоритъма на Евклид*. Сам по-себе си този алгоритъм (в ефективната му форма с намиране на частно и остатък, вместо с изваждане) не представлява програмистка трудност и лесно се научава. Но много по-важно в случая е разбирането на математическата му същност. Защото в следващ етап състезателите непременно трябва да се запознаят и с *разширения алгоритъм на Евклид* (за целите на решаване на линейни Диофантови уравнения), научаването на който не е елементарно и само доброто познаване на математиката зад алгоритъма на Евклид може да позволи на състезателите да могат да го пишат правилно, без да го научават наизуст.

На този етап много задачи за написване на програма са свързани с понятието *просто число*. По-лесни такива задачи са, например, да се провери дали едно число N е просто или да се намери разлагането му на прости множители. Ключово за тези задачи е сравнително простото твърдение, че проверката дали i е делител на N може да се ограничи до максималното i, такова че $i^2 \leq N$. Т.е. необходимо е поне интуитивно да се въведе понятието *квадратен корен*, изучаването на което става много по-късно. В по-сложни задачи състезателите трябва да могат да на-

мират простите числа в зададен интервал, за което е препоръчително да познават същността на техниката, известна като „сито на Ератостен“, или да намират броя на всички делители на зададено число с помощта на степените на простите множители на числото – нещо, което рядко се преподава в училище.

7. Заключение. При подготовката на състезатели по програмиране в най-младшата възрастова група се налага не само отлично владеене на езика за програмиране и операционната система, а и владеене на различни математически знания, както и умения да се прилагат тези знания за решаване на практически задачи, каквито са задачите в състезанията по програмиране. Считаме, че симбиозата на математически знания и програмистки умения, изграждана систематично при състезателите по програмиране от много години, е един от най-добрите примери за реализация на така модната напоследък концепция STEM, при това осъществена много преди тази концепция да е публично осъзната и популяризирана.

Безусловно, не всички нужни за целта знания и умения могат да бъдат получени в редовните часове по математика. Затова липсата им трябва да се компенсира със съответни занятия в извънкласните форми по програмиране. Необходимо е това да се прави интелигентно и с отчитане на особеностите на възрастта, най вече за най-малките състезатели. Важно е да се отбележи, че запознаването с математически понятия и тяхното използване за решаване на програмистки задачи, по изключително добър начин обосновава необходимостта от изучаване на абстрактни математически теории, и е най-точен отговор на обвиненията, че в часовете по математика се изучават ненужни неща, приложимостта на които е непонятна за учениците.

Анализът, направен за целите на тази статия, показва, че учениците в тази възраст, обучаващи се в математически гимназии, до голяма степен имат нужните за програмиране математически знания и умения, така че попълването им в школите по програмиране не е голям проблем. За учениците в регулярните училища недостигът от такива знания и умения е значителен и това до голяма степен предопределя недобрите им резултати в състезания по програмиране.

Надяваме се, че дискутираната тук проблематика може да стане повод за създаването на учебно пособие, което систематично и в подходяща за учениците от 4. – 5. клас форма да въвежда нужните за начинаещите програмисти математически понятия и твърдения, за които така или иначе не се намира място в учебните програми на българското училище или изучаването им се случва твърде късно, в сравнение с темпото, с което се подготвят учениците за участие в състезания. Заглавието на тази статия би било напълно съответно на очакваното съдържание на такова учебно пособие.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кр. Манев. Увод в състезателното програмиране. КЛМН, 2023 [Kr. Manev. Uvod v sastezatelnoto programirane. KLMN, 2023].

[2] З. Савова. Случайност + Математика. Изкуства, 2009 [Z. Savova. Sluchaynost + matematika. Izkustva, 2009].

СЕКЦИЯ А: МАТЕМАТИЧЕСКИ СТРУКТУРИ

SECTION A: MATHEMATICAL STRUCTURES

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

ON THE DISTRIBUTION OF $\alpha p^2 + \beta$ MODULO ONE FOR PRIMES p SUCH THAT $p + 2$ HAS NO MORE TWO PRIME DIVISORS*

Tatyana L. Todorova

Faculty of Mathematics and Informatics,
Sofia University "St. Kliment Ohridksi", Sofia, Bulgaria
e-mail: tlt@fmi.uni-sofia.bg

A classical problem in analytic number theory is to study the distribution of fractional part $\alpha p^k + \beta$, $k \geq 1$ modulo 1, where α is irrational and p runs over the set of primes. We consider the subsequence generated by the primes p such that $p + 2$ is an almost-prime (the existence of infinitely many such p is another topical result in prime number theory) and prove that its distribution has a similar property.
Keywords: linear sieve, almost primes, distribution modulo one.

РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ НА ДРОБНИТЕ ЧАСТИ НА $\alpha p^2 + \beta$ ПО МОДУЛ 1 ЗА ПРОСТИ ЧИСЛА p, ЗА КОИТО $p + 2$ ИМА НЕ ПОВЕЧЕ ОТ ДВА ПРОСТИ ДЕЛИТЕЛЯ

Татяна Л. Тодорова

Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски", София, България
e-mail: tlt@fmi.uni-sofia.bg

Класически проблем в аналитичната теория на числата е проблемът за разпределението на дробните части на числата αp^k, $k \geq 1$, където α е ирационално и p пробягва множеството на простите числа. Ние разглеждаме подмножество на множеството на простите числа p, за които $p + 2$ е почти просто и доказваме, че тяхното разпределение има свойства подобни на тези на разпределението на простите числа.
Ключови думи: линейно решето, почти прости, разпределение по модул 1.

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.039-056
This work was supported Sofia University Scientific Fund, grant 80-10-99/2023.
2020 Mathematics Subject Classification: 11J71, 11N36.

1. Introduction and statements of the result. The famous prime twins conjecture states that there exist infinitely many primes p such that $p+2$ is a prime too. This hypothesis is still unproved but in 1973 Chen [2] proved that there are infinitely many primes p for which $p+2=\mathrm{P}_2$. (As usual P_r denotes an integer with no more than r prime factors, counted according to multiplicity).

Let α be irrational real number and $\|x\|$ denote the distance from x to the nearest integer. The distribution of fractional parts of the sequence αn^k, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ was first considered by Hardy, Littlewood [5] and Weyl [19]. The problem of distribution of the fractional parts of αp^k, where p denotes a prime, first was considered by Vinogradov (see Chapter 11 of [17] for the case $k=1$, [18] for $k\geq 2$), who showed that for any real β there are infinitely many primes p such that

$$\|\alpha p+\beta\|<p^{-\theta}, \tag{1}$$

where $\theta=1/5-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ is arbitrary small. After that many authors improved the upper bound of the exponent θ. The best result is given by Matomäki [10] with $\theta=1/3-\varepsilon$. Another interesting problem is the study of the distribution of the fractional part of αp^k with $2\leq k\leq 12$, such Baker and Harman [1], Wong [1] etc. For $2\leq k\leq 12$ the best result is due to Baker and Harman [1].

In [13] Todorova and Tolev considered the primes p such that $\|\alpha p+\beta\|<p^{-\theta}$ and $p+2=P_r$ and prove existence of such primes with $\theta=1/100$ and $r=4$. Later Matomäki [10] and San Ying Shi [11] have shown that this actually holds whit $p+2=P_2$ and $\theta=1/1000$ and $\theta=1.5/100$ respectively.

In [12] Shi and Wu proved existence of infinitely many primes p such that $\|\alpha p^2+\beta\|<p^{-\theta}$ and $p+2=P_4$ with $0<\theta<2/375$. In 2021 Xue, Li and Zhang [14] improved the result of Shi and Wu with $0<\theta<10/1561$.

In this paper we evaluate exponential sums over well-separated numbers and improve the results of Shi, Wu and Xue, Li and Zhang.

We will say that d is a well-separable number of level $D\geq 1$ if for any $H,S\geq 1$ with $HS=D$, there are integers $h\leq H$, $s\leq S$ such that $d=hs$.

Theorem 1. *Suppose $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ satisfies conditions*

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|<\frac{1}{q^2},\quad a\in\mathbb{Z},\ \ q\in\mathbb{N},\quad (a,q)=1,\quad q\geq 1, \tag{2}$$

K and D are defined by (8), $\lambda(d)$ are complex numbers defined for $d\leq D$,

$$\lambda(d)\ll\tau(d)\quad \textit{and}\quad \lambda(d)\neq 0\quad \textit{if}\quad d\quad \textit{is well-separable number of level}\quad D, \tag{3}$$

$c(k)\ll 1$ are complex numbers, $0<|k|\leq K$. Then for any arbitrary small $\varepsilon>0$ and $b\in\mathbb{Z}$ for the sum

$$W(x)=\sum_{d\leq D}\lambda(d)\sum_{1\leq|k|\leq K}c(k)\sum_{\substack{n\sim x\\ n\equiv b\,(d)}}e\big((\alpha n^2+\beta)k\big)\Lambda(n) \tag{4}$$

we have

$$W\ll x^{\varepsilon}\left(\frac{xK}{\Delta^{\frac{1}{32}}}+\frac{xK}{q^{\frac{1}{32}}}+\frac{x\Delta^{\frac12}K}{q^{\frac14}}+x^{\frac{71}{72}}\Delta^{\frac{33}{64}}K+x^{\frac{15}{16}}K^{\frac{31}{32}}q^{\frac{1}{32}}+x^{\frac12}\Delta^{\frac12}K^{\frac34}q^{\frac14}\right). \tag{5}$$

Remark 1. It is obvious that the Theorem 1 is true if function $\lambda(d)$ is well-factorable.

Lemma 1. *Suppose $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ satisfies conditions (2), sum $W(x)$ is defined by (4), $\lambda(d)$ are complex numbers defined for $d\leq D$ and satisfying (3) and (8), $c(k)\ll 1$ are*

complex numbers $0 < |k| \le K$. *Then there exist a sequence*

$$\{x_j\}_{j=1}^{\infty},\ \lim_{j\to\infty} x_j = \infty,$$

such that

$$W(x_j) \ll x_j^{1-\omega}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

for any $\omega > 0$.

Theorem 2. *Let* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *satisfies conditions* (2), $\beta \in \mathbb{R}$ *and let*

$$0 < \ \theta < \ \frac{1}{1296} - \eta,$$

where η *is arbitrary small fixed number. Then there are infinitely many primes* p *satisfying* $p + 2 = \mathrm{P}_2$ *and such that*

$$\|\alpha p^2 + \beta\| < p^{-\theta}. \tag{6}$$

2. Notation. Let x be a sufficiently large real number and θ and ρ be real constants satisfying

$$0 < \theta < \frac{1}{1296}, \qquad \rho > 32\theta, \qquad \rho + \frac{64\theta}{33} < \frac{8}{297} \qquad \rho + 10\theta > \varepsilon. \tag{7}$$

We shall specify ρ and θ latter. We put

$$\begin{gathered} \delta = \delta(x) = x^{-\theta}, \quad K = \delta^{-1}\log^2 x, \\ \Delta = x^{\rho}, \quad D = \frac{x^{1/2}}{\Delta K^4}. \end{gathered} \tag{8}$$

By p and q we always denote primes. As usual $\varphi(n)$, $\mu(n)$, $\Lambda(n)$ denote respectively Euler's function, Möbius' function and Mangoldt's function. We denote by $\tau_k(n)$ the number of solutions of the equation $m_1 m_2 \dots m_k = n$ in natural numbers $m_1, \dots, m_k$ and $\tau_2(n) = \tau(n)$. Let $(m_1, \dots, m_k)$ and $[m_1, \dots, m_k]$ be the greatest common divisor and the least common multiple of $m_1, \dots, m_k$ respectively. Instead of $m \equiv n \pmod k$ we write for simplicity $m \equiv n(k)$. As usual, $\|y\|$ denotes the distance from y to the nearest integer, $e(y) = e^{2\pi i y}$. For positive A and B we write $A \asymp B$ instead of $A \ll B \ll A$ and $k \sim K$ means $K/2 \le k < K$. The letter ε denotes an arbitrary small positive number, not the same in all appearances. For example this convention allows us to write $x^{\varepsilon}\log x \ll x^{\varepsilon}$.

3. Some lemmas.

Lemma 2. *Let* k, l, m, $n \in \mathbb{N}$; $X, \varepsilon \in \mathbb{R}$; $X \ge 2$, $k \ge 2$ *and* $\varepsilon > 0$. *Then*

(i) $$\sum_{n\le X} \big(\tau_k(n)\big)^l \ll_{k,l} X(\log X)^{k^l - 1}\ ;$$

(ii) $$\tau_k(n) \ll_{k,\varepsilon} n^{\varepsilon}\ .$$

Proof. See [16], ch. 3. □

Lemma 3. *Let* $X \ge 1$ *and* α *satisfied conditions* (2) *and* a, $d \in \mathbb{N}$. *Then*

$$\Big|\sum_{\substack{n\le X \\ n\equiv a(\mathrm{mod}\ d)}} e(\alpha n)\Big| \ll \min\left(\frac{X}{d}, \frac{1}{\|\alpha d\|}\right)$$

Proof. See [9], ch.6, §2. □

Lemma 4. *Let* X, $Y \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbf{N}$; X, $Y \ge 1$; $k \ \ge \ 2$ *and* α *satisfied conditions* (2).

Then

$$\sum_{n\le X}\min\Big(\frac{XY}{n},\frac{1}{\|\alpha n\|}\Big)\ll XY\Big(\frac{1}{q}+\frac{1}{Y}+\frac{q}{XY}\Big)\log(2Xq).$$

Proof. See Lemma 2.2 from [15], ch. 2,§2.1. □

Lemma 5. *Let $\mu,\zeta\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, and α satisfy conditions (2). Then for every arbitrary small $\varepsilon>0$ the inequality*

$$\sum_{m\sim M}\tau_\mu(m)\sum_{j\sim J}\tau_\zeta(j)\min\left\{\frac{x}{m^2j},\ \frac{1}{\|\alpha m^2j\|}\right\}\ll x^\varepsilon\left(MJ+\frac{x}{M^{3/2}}+\frac{x}{Mq^{1/2}}+x^{1/2}q^{1/2}\right)$$

is fulfilled.

Proof. See Lemma 8, [10]. □

Lemma 6. *If $d|P(z)$, $z<D^{1/2}$, $\lambda^\pm$ are Rosser's weights and either $\lambda^+(d)\ne 0$ or $\lambda^-(d)\ne 0$ then d is well-separated number.*

Proof. See Lemma 12.16, [3] □

Theorem 3. *Let $2\le z\le D^{1/2}$ and $s=\dfrac{\log D}{\log z}$. If*

$$\begin{cases}\mathcal{A}_d=\dfrac{\omega(d)}{d}x+r(x,\,d) & \text{if}\quad \mu(d)\ne 0\\ \displaystyle\sum_{z_1\le p<z_2}\frac{\omega(p)}{p}=\log\left(\frac{\log z_2}{\log z_1}\right)+O\Big(\frac{1}{\log z_1}\Big), & z_2>z_1\ge 2\end{cases}$$

where $\omega(d)$ is a multiplicative function, $0<\omega(p)<p$, $x>1$ is independent of d. Then

$$xV(z)\Big(f(s)+O\Big(\frac{1}{(\log D)^{1/3}}\Big)\Big)\ \le\ S(\mathcal{A},\,z)\ \le\ xV(z)\Big(F(s)+O\Big(\frac{1}{(\log D)^{1/3}}\Big)\Big),$$

where d are well-separated numbers of level D, $f(s)$, $F(s)$ are determined by the following differential-difference equations

$$F(s)=\frac{2e^\gamma}{s},\ f(s)=0\quad \text{if}\quad 0<s\le 2$$
$$(sF(s))'=f(s-1),\quad (sf(s))'=F(s-1)\quad \text{if}\quad s>2,$$

where γ denote the Euler's constant.

4. Auxiliary results.

Lemma 7. *Let $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ satisfied conditions (2), M, S, J, $x\in\mathbb{R}^+$, $x>M^3S^2J$ and $\mu,\sigma,\zeta\in[2,\infty)\cap\mathbb{N}$,*

$$G=\sum_{m\sim M}\tau_\mu(m)\sum_{s\sim S}\tau_\sigma(s)\sum_{j\sim J}\tau_\zeta(j)\min\left\{\frac{x}{m^3s^2j},\ \frac{1}{\|\alpha m^3s^2j\|}\right\}.$$

Then for any $\varepsilon>0$ the inequalities

$$G\ll x^\varepsilon\left(MSJ+\frac{x}{M^{\frac94}S}+\frac{x}{M^2S^{\frac98}}+\frac{x}{M^2Sq^{\frac18}}+\frac{x^{\frac78}q^{\frac18}}{M^2S}\right)\tag{9}$$

and

$$G \ll x^{\varepsilon}\left(MSJ + \frac{x}{M^{\frac{9}{4}}S^{\frac{3}{4}}} + \frac{x}{M^2S^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{4}}} + \frac{x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{4}}}{M^2S^{\frac{3}{4}}}\right) \tag{10}$$

are fulfilled.

Proof. Our proof is similar to proof of Lemma 8, [10]. Let

$$H = \frac{x}{M^3S^2J}. \tag{11}$$

If $H \le 2$, then trivially from Lemma 2 (iv) we get

$$G \ll x^{\varepsilon}MSJ. \tag{12}$$

So we can assume that $H > 2$. From Lemma 2 (iv) it is obviously that

$$G \ll x^{\varepsilon}\sum_{m\sim M}\sum_{s\sim S}\sum_{j\sim J}\min\left\{\frac{x}{m^3s^2j},\ \frac{1}{\|\alpha m^3s^2j\|}\right\}.$$

We apply the Fourier expansion to the function $\min\left\{\frac{x}{m^3s^2j},\ \frac{1}{\|\alpha m^3s^2j\|}\right\}$ and get

$$\min\left\{\frac{x}{m^3s^2j},\ \frac{1}{\|\alpha m^3s^2j\|}\right\} = \sum_{0<|h|\le H^2} w(h)e(\alpha m^3s^2jh) + O(\log x),$$

where

$$w(h) \ll \min\left\{\log H,\ \frac{H}{|h|}\right\}. \tag{13}$$

Then

$$G| \ll x^{\varepsilon}\sum_{0<|h|\le H^2}|w(h)|\sum_{s\sim S}\sum_{j\sim J}\left|\sum_{m\sim M}e(\alpha m^3s^2jh)\right| + MSJ\log x. \tag{14}$$

So if

$$G(H_0) = \sum_{h\sim H_0}\sum_{s\sim S}\sum_{j\sim J}\left|\sum_{m\sim M}e(\alpha m^3s^2jh)\right|.$$

then using (13) we have

$$G \ll x^{\varepsilon}\left(MSJ + \max_{1\le H_0\le H_1}G(H_0) + \max_{H_1\le H_0\le H^2}\frac{H}{H_0}G(H_0)\right). \tag{15}$$

We shall evaluate the sum $G(H_0)$. Applying the Cauchy–Schwarz inequality we obtain

$$G^2(H_0) \ll x^{\varepsilon}H_0JS\sum_{h\sim H_0}\sum_{s\sim S}\sum_{j\sim J}\left|\sum_{m\sim M}e(\alpha m^3s^2jh)\right|^2$$

$$\ll x^{\varepsilon}H_0JS\sum_{h\sim H_0}\sum_{s\sim S}\sum_{j\sim J}\sum_{m_1\sim M}\sum_{m_2\sim M}e\big(\alpha(m_1^3-m_2^3)s^2jh\big).$$

Substituting $m_1 = m_2 + t$, where $0 \le |t| \le M$ we get

$$G^2(H_0) \ll x^{\varepsilon}\left(H_0^2J^2S^2M + H_0JSG_1(H_0)\right), \tag{16}$$

where

$$G_1(H_0) = \sum_{h\sim H_0}\sum_{s\sim S}\sum_{j\sim J}\sum_{0<|t|<M}\Big|\sum_{m_2\sim M} e\big(\alpha(3m_2^2t+3m_2t^2)s^2jh\big)\Big|.$$

Applying again the Cauchy–Schwarz inequality we obtain

$$G_1^2(H_0) \ll H_0JSM\sum_{h\sim H_0}\sum_{s\sim S}\sum_{j\sim J}\sum_{0<|t|<M}\sum_{m_2\sim M} \times \sum_{m_3\sim M} e\big(\alpha(3(m_2^2-m_3^2)t+3(m_2-m_3)t^2)s^2jh\big).$$

Substituting $m_2 = m_3+\ell$, where $0\le|\ell|\le M$ we get

$$G_1^2(H_0) \ll H_0^2J^2S^2M^3 + H_0JSM\sum_{h\sim H_0}\sum_{s\sim S}\sum_{j\sim J}\sum_{0<|t|<M}\sum_{0<|\ell|<M}\Big|\sum_{m_3\sim M} e\big(6\alpha m_3t\ell s^2jh\big)\Big|.$$

Let $u = 6t\ell hj$. Then using Lemma 3 and Lemma 5 we get

$$G_1^2(H_0) \ll H_0^2J^2S^2M^3 + H_0JSM\sum_{u\le 24H_0JM^2}\tau_5(u)\sum_{s\sim S}\Big|\sum_{m_3\sim M} e\big(\alpha m_3s^2u\big)\Big|$$

$$\ll H_0^2J^2S^2M^3 + H_0JSM\sum_{u\ll H_0JM^2}\tau_5(u)\sum_{s\sim S}\min\left\{\frac{H_0JS^2M^3}{s^2u}, \frac{1}{||\alpha s^2u||}\right\}. \tag{17}$$

We will estimate the above sum in two ways. Using Lemma 5 we obtain

$$G_1^2(H_0) \ll x^{\varepsilon}\left(H_0^2J^2S^2M^3 + H_0^2J^2S^{\frac{3}{2}}M^4 + \frac{H_0^2J^2S^2M^4}{q^{\frac{1}{2}}} + H_0^{\frac{3}{2}}J^{\frac{3}{2}}SM^{\frac{5}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right).$$

So from (16)

$$G(H_0) \ll x^{\varepsilon}\left(H_0JSM^{\frac{3}{4}} + H_0JS^{\frac{7}{8}}M + \frac{H_0JSM}{q^{\frac{1}{8}}} + H_0^{\frac{7}{8}}J^{\frac{7}{8}}S^{\frac{3}{4}}M^{\frac{5}{8}}q^{\frac{1}{8}}\right). \tag{18}$$

Choosing $H_0 = H$ from (11), (15) and (18) we get (9).

On the other hand we can write the inequality (17) as

$$G_1^2(H_0) \ll H_0^2J^2S^2M^3 + H_0JSM\sum_{k\ll H_0JS^2M^2}\min\left\{\frac{H_0JS^2M^3}{k}, \frac{1}{||\alpha k||}\right\}$$

and using Lemma 4 and (16) we get

$$G^2(H_0) \ll x^{\varepsilon}\left(H_0^2J^2S^3M^3 + \frac{H_0^2J^2S^3M^4}{q} + H_0JSMq\right) \tag{19}$$

Now we choose $H_0 = H$. Then from (11), (15) and (19) the inequality (10) is received. □

5. Proof of Theorem 1. To prove Theorem 1 we shall evaluate the sum W in two ways:

when $x^{8/27}\Delta \le D \le \dfrac{x^{1/2}}{\Delta K^4}$, we will use the Vaughan's identity;

when $D \le x^{8/27}\Delta$, we will use the Heat-Brown identity.

5.1. Evaluation by Vaughan's identity. Let $x^{8/27}\Delta \le D \le \dfrac{x^{1/2}}{\Delta K^4}$ and $0 < |K| \le \delta^{-1}\log^2 x$. First we decompose the sum $W(x)$ into $O(\log^2 x)$ sums of type

$$W = W(x,\, D,\, K) = \sum_{d\sim D} \lambda(d) \sum_{1\le|k|\sim K} c(k) \sum_{\substack{n\sim x\\ n+2\equiv 0\,(d)}} e\big((\alpha n^2+\beta)k\big)\Lambda(n),$$

where $\lambda(d)$ is Roser weight and in particular a necessary condition for $\lambda(d)\ne 0$ is numbers d are squarefree. So from this point on we will use that numbers d are squarefree. Then by Vaughan's identity we can decompose the sum W into $O(\log x)$ type I sums

$$W_1 = \sum_{\substack{d\sim D\\ (a,\,d)=1}} \lambda(d) \sum_{k\sim K} c(k)e(\beta k) \sum_{\substack{m\sim M\\ \ell\sim L\\ mn\equiv a(\mathrm{mod}\ d)}} a(m)e(\alpha(m\ell)^2k)$$

or

$$W_1' = \sum_{\substack{d\sim D\\ (a,\,d)=1}} \lambda(d) \sum_{k\sim K} c(k)e(\beta k) \sum_{\substack{m\sim M\\ \ell\sim L\\ m\ell\equiv a(\mathrm{mod}\ d)}} \log(n)e(\alpha(m\ell)^2k)$$

with $M \le x^{1/3}$ and $O(\log x)$ type II sums

$$W_2 = \sum_{\substack{d\sim D\\ (a,\,d)=1}} \lambda(d) \sum_{k\sim K} c(k)e(\beta k) \sum_{\substack{m\sim M\\ \ell\sim L\\ m\ell\equiv a(\mathrm{mod}\ d)}} a(m)b(\ell)e(\alpha(m\ell)^2k)$$

with $M \in [x^{1/3},\, x^{2/3}]$ and

$$ML \sim x, \quad a(m) \ll \tau_3(m)\log m, \quad b(\ell) \ll \tau_3(\ell)\log \ell \tag{20}$$

5.1.1. Evaluation of type II sums. The proof follows proof of Theorem 1, [10]. As $x^{1/3} \le M,\, L \le x^{2/3}$ and $ML \sim x$ we will consider only the case $x^{1/2} \le M \le x^{2/3}$. The evaluation in the case $x^{1/2} \le L \le x^{2/3}$ is the same. Using that d is well-separated numbers we write $d = hs$, where $(h,s) = 1$ as d is squarefree. So the sum W_2 is presented as $O(\log^2 x)$ sums of the type

$$W_2 = \sum_{\substack{h\sim H\\ (h,\,a)=1}} \sum_{\substack{s\sim S\\ (s,\,ah)=1}} \lambda(hs) \sum_{k\sim K} c(k)e(\beta k) \sum_{\ell\sim L} \sum_{\substack{m\sim M\\ m\ell\equiv a(\mathrm{mod}\ hs)}} a(m)b(\ell)e(\alpha(m\ell)^2k).$$

Here

$$h\sim H, \quad s\sim S, \quad D\sim HS \tag{21}$$

and H we will choose later. Applying the Cauchy–Schwarz inequality to W_2 and using and Lemma 2(i) we obtain that

$$W_2^2 \ll x^{\varepsilon} KHM \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{h\sim H\\(h,\,a)=1}} \sum_{\substack{s_1'\sim S\\(s_1',\,ah)=1}} \lambda(hs_1') \sum_{\substack{s_2'\sim S\\(s_2',\,ah)=1}} \lambda(hs_2') \tag{22}$$

$$\times \sum_{\ell_1\sim L} b(\ell_1) \sum_{\ell_2\sim L} b(\ell_2) \sum_{\substack{m\sim M\\ m\ell_1\equiv a(hs_1')\\ m\ell_2\equiv a(hs_2')}} e(\alpha m^2(\ell_1^2-\ell_2^2)k).$$

Let $(s_2',\, s_1') = r$, $s_1' = rs_1$, $s_2' = rs_2$, $r\sim R$, $R\le S$ and $s_1',\, s_2'\sim S/R$. Then

$$W_2^2 \ll x^{\varepsilon} KHM \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{h\sim H\\(h,\,a)=1}} \sum_{\substack{r\sim R\\(r,\,ah)=1}} \sum_{\substack{s_1\sim S/R\\(s_1,\,ah)=1}} \lambda(hrs_1) \sum_{\substack{s_2\sim S/R\\(s_2,\,as_1h)=1}} \lambda(hrs_2) \tag{23}$$

$$\times \sum_{\ell_1\sim L} b(\ell_1) \sum_{\ell_2\sim L} b(\ell_2) \sum_{\substack{m\sim M\\ m\ell_1\equiv a(hrs_1)\\ m\ell_2\equiv a(hrs_2)}} e(\alpha m^2(\ell_1^2-\ell_2^2)k)$$

$$= W_{21} + W_{22},$$

where W_{21} is this one part of above sum for which

$$\ell_1 = \ell_2, \quad s_1 \ne s_2 \quad \text{or}$$
$$\ell_1 = \ell_2, \quad s_1 = s_2 = 1 \quad r\sim S \quad \text{or}$$
$$\ell_1 \ne \ell_2, \quad s_1 = s_2 = 1 \quad r\sim S \quad \text{or}$$
$$\ell_1 \ne \ell_2, \quad s_1 \ne s_2, \quad M < \frac{4HS^2}{R},$$

W_{22} is the rest part of sum for W_2^2. To evaluate the sum W_{21} we consider the cases $x^{1/2} \le M \le \dfrac{x}{D}$ and $x^{1/3} \le L \le D$. Then using Lemma 2 we get

$$W_{21} \ll x^{\varepsilon}\left(xMHK^2 + xD^2K^2 + \frac{x^2HK^2}{D} + \frac{xLD^2K^2}{H}\right). \tag{24}$$

It is clear that for sum W_{22} we have $\ell_1 \ne \ell_2$, $s_1 \ne s_2$, $M > \dfrac{4HS^2}{R}$. From

$$m\ell_1 \equiv a(hrs_1),\ m\ell_2 \equiv a(hrs_2) \quad \text{follows that} \quad \ell_1 \equiv \ell_2 (hr).$$

We apply again the Cauchy–Schwarz inequality and get

$$W_{22}^2 \ll \frac{x^{2+\varepsilon}D^2K^3}{R^2} \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{h\sim H\\(h,\,a)=1}} \sum_{\substack{r\sim R\\(r,\,ah)=1}} \sum_{\substack{s_1\sim S/R\\(s_1,\,ah)=1}} \sum_{\substack{s_2\sim S/R\\(s_2,\,as_1h)=1}}$$

$$\times \sum_{\ell_1\sim L} \sum_{\substack{\ell_2\sim L\\ \ell_2\equiv\ell_1 (hr)}} \sum_{\substack{m_1\sim M\\ m_1\ell_1\equiv a(hrs_1)\\ m_1\ell_2\equiv a(hrs_2)}} \sum_{\substack{m_2\sim M\\ m_2\ell_1\equiv a(hrs_1)\\ m_2\ell_2\equiv a(hrs_2)}} e(\alpha(m_1^2-m_2^2)(\ell_1^2-\ell_2^2)k).$$

Let W_{221} be this one part of above sum for which $m_1 = m_2$ and W_{222} be this part for

which $m_1 \neq m_2$. It is not difficult to see that

$$W_{221} \ll \frac{x^{3+\varepsilon} L D^2 K^4}{H}. \tag{25}$$

Let consider the sum W_{222}. As

$$m_i \ell_1 \equiv a \pmod{hrs_1} \quad \text{and} \quad m_i \ell_2 \equiv a \pmod{hrs_2}, \quad i = 1, 2$$

we get

$$m_1 \equiv m_2 (\text{mod } hrs_1 s_2) \equiv f (\text{mod } hrs_1 s_2), \quad \text{where} \quad f = f(h,\, r,\, s_1,\, s_2,\, \ell_1,\, \ell_2)$$

and $\ell_1 \equiv \ell_2 (\text{mod } hr)$. Let

$$m_1 = m_2 + hrs_1 s_2 t,\ 0 < |t| \leq \frac{8MR}{HS^2} \quad \text{and} \quad \ell_1 = \ell_2 + hru,\ 0 < |u| \leq \frac{2L}{HR}.$$

Then

$$m_1^2 - m_2^2 = 2m_2 hrs_1 s_2 t + h^2 r^2 s_1^2 s_2^2 t^2 \quad \text{and} \quad \ell_1^2 - \ell_2^2 = hru(2\ell_2 + hru).$$

So using above equalities and Lemma 3 we obtain

$$W_{222} \ll \frac{x^{2+\varepsilon} D^2 K^3}{R^2} \sum_{k \sim K} \sum_{\substack{h \sim H \\ (h,\, a) = 1}} \sum_{\substack{r \sim R \\ (r,\, ah) = 1}} \sum_{\substack{s_1 \sim S/R \\ (s_1,\, ah) = 1}} \sum_{\substack{s_2 \sim S/R \\ (s_2,\, as_1 h) = 1}}$$
$$\times \sum_{\ell \sim L} \sum_{0 < |u| \leq \frac{2L}{HR}} \sum_{0 < |t| \leq \frac{8MR}{HS^2}} \min\left\{ \frac{M}{hrs_1 s_2}, \frac{1}{\|2\alpha h^3 r^3 s_1^2 s_2^2 tu\ell k\|} \right\},$$

where $\ell = 2\ell_2 + hru$. We put

$$m = hr, \quad s = s_1 s_2, \quad j = 2tunk,\ j \ll \frac{xLK}{D^2}$$

and it is clear that the sum W_{222} can be represented as a finite number of sums of the type

$$W_{223} = \frac{x^{2+\varepsilon} D^2 K^3}{R^2} \sum_{m \sim HR} \tau(m) \sum_{s \sim \frac{S^2}{R^2}} \tau(s) \sum_{j \ll \frac{xLK}{D^2}} \tau_5(j) \min\left\{ \frac{x^2 K}{m^3 s^2 j}, \frac{1}{\|\alpha m^3 s^2 j\|} \right\}.$$

Using Lemma 7, (21), (23), (24) and (25) we get

$$W_{223} \ll x^{\varepsilon} \Bigg(x^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}} K + x^{\frac{1}{2}} DK + \frac{x^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} DK}{H^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}} D^{\frac{1}{2}} K}{H^{\frac{1}{4}}} + \frac{xH^{\frac{1}{2}} K}{D^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ \frac{xK}{H^{\frac{1}{16}}} + \frac{xH^{\frac{1}{16}} K}{D^{\frac{1}{16}}} + \frac{xK}{q^{\frac{1}{32}}} + x^{\frac{15}{16}} K^{\frac{31}{32}} q^{\frac{1}{32}} \Bigg). \tag{26}$$

According to D, M and L we have

$$W_{223} \ll x^{\varepsilon} \Big(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \Big), \tag{27}$$

where V_1 is the sum with

$$x^{1/2} \leq M \leq \frac{x}{D}, \quad x^{2/5} \leq D \leq \frac{x^{1/2}}{\Delta K^4}$$
$$D \leq L \leq x^{1/2}, \tag{28}$$

V_2 is the sum with

$$\begin{aligned} &\frac{x}{D} \le M < x^{1/3}D^{2/3}, \quad x^{2/5} \le D \le \frac{x^{1/2}}{\Delta K^4} \\ &\frac{x^{2/3}}{D^{2/3}} < L \le D, \end{aligned} \tag{29}$$

V_3 is the sum with

$$\begin{aligned} &x^{1/3}D^{2/3} \le M \le x^{2/3}, \quad x^{2/5} \le D \le \frac{x^{1/2}}{\Delta K^4} \\ &x^{1/3} \le L \le \frac{x^{2/3}}{D^{2/3}} \end{aligned} \tag{30}$$

and V_4 is the sum with

$$\begin{aligned} &x^{1/2} \le M \le x^{2/3}, \quad x^{8/27}\Delta \le D \le x^{2/5} \\ &x^{1/3} \le L \le x^{1/2}. \end{aligned} \tag{31}$$

For sums V_1, V_2, V_3 and V_4 we choose consequently

$$H = \frac{D}{\Delta^{1/2}}, \quad H = \frac{LD^{2/3}}{x^{1/3}}, \quad H = \frac{x^{1/3}}{\Delta}, \quad H = \frac{L^{4/5}D^{9/5}}{x^{4/5}}.$$

and from (26), (28), (29), (30) and (31) we get

$$W_2 \ll \begin{cases} x^{\varepsilon}\left(\dfrac{xK}{\Delta^{\frac{1}{32}}} + +x^{\frac{5}{6}}D^{\frac{1}{3}}\Delta^{\frac{1}{4}}K + \dfrac{xK}{q^{\frac{1}{32}}} + x^{\frac{15}{16}}K^{\frac{31}{32}}q^{\frac{1}{32}}\right), & \text{if} \quad x^{2/5} \le D \le \dfrac{x^{1/2}}{\Delta K^4}, \\ x^{\varepsilon}\left(\dfrac{x^{\frac{31}{30}}K}{D^{\frac{9}{80}}} + \dfrac{xK}{q^{\frac{1}{32}}} + x^{\frac{15}{16}}K^{\frac{31}{32}}q^{\frac{1}{32}}\right), & \text{if} \quad x^{8/27}\Delta \le D \le x^{2/5}. \end{cases}$$

So

$$W_2 \ll x^{\varepsilon}\left(\frac{xK}{\Delta^{\frac{1}{32}}} + x^{\frac{5}{6}}D^{\frac{1}{3}}\Delta^{\frac{1}{4}}K + \frac{xK}{q^{\frac{1}{32}}} + x^{\frac{15}{16}}K^{\frac{31}{32}}q^{\frac{1}{32}}\right). \tag{32}$$

5.1.2. Evaluation of type I sums. In this case we have that $L > x^{\frac{2}{3}}$ and $M < x^{\frac{1}{3}}$. Again we will use that d is well-separated numbers. So we can write $d = hs$ with h and s satisfying conditions (21) and we will choose H later. So the sum W_1 is presented as $O(\log^2 x)$ sums of the type

$$W_1 = \sum_{\substack{h\sim H \\ (h,\,a)=1}} \sum_{\substack{s\sim S \\ (s,\,a)=1}} \lambda(hs) \sum_{k\sim K} c(k)e(\beta k) \sum_{\ell\sim L} \sum_{\substack{m\ell\sim M \\ m\ell\equiv a (\mathrm{mod}\ d)}} a(m)e(\alpha(m\ell)^2 k).$$

Working in the same way as in the evaluation of the sum W_2 see (22), we get

$$\begin{aligned} W_1^2 \ll x^{\varepsilon}KHM \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{h\sim H \\ (h,\,a)=1}} \sum_{\substack{r\sim R \\ (r,\,ah)=1}} \sum_{\substack{s_1\sim S/R \\ (s_1,\,ah)=1}} \lambda(hrs_1) \sum_{\substack{s_2\sim S/R \\ (s_2,\,as_1h)=1}} \lambda(hrs_2) \\ \times \sum_{\ell_1\sim L} b(\ell_1) \sum_{\ell_2\sim L} b(\ell_2) \sum_{\substack{m\sim M \\ m\ell_1\equiv a(hrs_1) \\ m\ell_2\equiv a(hrs_2)}} e(\alpha m^2(\ell_1^2 - \ell_2^2)k) \\ = W_{11} + W_{12} + W_{13}, \end{aligned} \tag{33}$$

where W_{12} is this one part of above sum for which

$$\ell_1 = \ell_2,$$

W_{13} is this one part of above sum for which

$$\ell_1 \neq \ell_2, \quad s_1 = s_2 = 1 \quad r \sim S$$

and W_{11} is the rest part of sum for W_1^2. Using that $L > x^{\frac{2}{3}}$ and $M < x^{\frac{1}{3}}$ we get

$$W_{12} \ll x^{\varepsilon}.xMHK^2. \tag{34}$$

For the sum W_{13} we get

$$W_{13} \ll x^{\varepsilon} KHM \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{d\sim D\\(d,\,a)=1}} \sum_{m\sim M} \Big| \sum_{\substack{\ell_i\sim L\\ m\ell_i\equiv a(d)\\ i=1,1}} e(\alpha m^2(\ell_1^2-\ell_2^2)k\Big|.$$

As $\ell_1 \equiv \ell_2 (\mathrm{mod}\ d)$ we put

$$\ell_1 = \ell_2 + du,\ 0 < |u| \ll \frac{L}{D}.$$

So

$$W_{13} \ll x^{\varepsilon} KHM \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{d\sim D\\(d,\,a)=1}} \sum_{m\sim M} \sum_{u\ll \frac{L}{D}} \Big| \sum_{\substack{\ell_2\sim L\\ m\ell_2\equiv a(d)}} e(2\alpha m^2\ell_2 udk)\Big|$$

and from Lemma 3 we get

$$W_{13} \ll x^{\varepsilon} KHM \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{d\sim D\\(d,\,a)=1}} \sum_{m\sim M} \sum_{u\ll \frac{L}{D}} \min\left\{\frac{x^2K}{m^2d^2(2uk)},\ \frac{1}{\|\alpha m^2d^2(2uk)\|}.\right\}$$

The above sum can be represented as a finite number of sums of the type

$$W_{14} \ll x^{\varepsilon} KHM \sum_{z\sim MD} \tau(z) \sum_{t\ll \frac{LK}{D}} \tau_3(t) \min\left\{\frac{x^2K}{z^2t},\ \frac{1}{\|\alpha z^2t\|}.\right\}$$

Using Lemma 5 and $ML \sim x$ we obtain

$$W_{13}^{\frac{1}{2}} \ll x^{\varepsilon}\left(x^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}K + \frac{x^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}H^{\frac{1}{2}}K}{D^{\frac{3}{4}}} + \frac{xH^{\frac{1}{2}}K}{D^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}}}{D^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{35}$$

Using analogous reasoning for the sum W_{11} we get

$$W_{11} \ll x^{\varepsilon} KHM \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{h\sim H\\(h,\,a)=1}} \sum_{\substack{r\sim R\\(r,\,ah)=1}} \sum_{\substack{s_i\sim S/R\\(s_1s_2,\,ah)=1}} \times \sum_{m\sim M} \sum_{u\ll \frac{L}{HR}} \Big| \sum_{\substack{\ell_2\sim L\\ m\ell_2\equiv a(hrs_2)\\ m(\ell_2+uhr)\equiv a(s_1)}} e(2\alpha m^2\ell_2 uhrk)\Big| \tag{36}$$

and from Lemma 3 we obtain

$$W_{11} \ll x^{\varepsilon} KHM \sum_{k\sim K} \sum_{h\sim H} \sum_{r\sim R} \sum_{\substack{s_i\sim S/R \\ i=1,2}} \sum_{m\sim M} \sum_{u\ll \frac{L}{HR}} \min\left\{ \frac{L}{hrs_1s_2}, \frac{1}{\|\alpha m^2h^2r^2.2s_1s_2uk\|} \right\}.$$

Applying Lemma 5 and using that $ML \sim x$ we get

$$W_{11}^{\frac{1}{2}} \ll x^{\varepsilon}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}DK}{H^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}K}{H^{\frac{1}{4}}} + \frac{xK}{q^{\frac{1}{4}}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}} \right) \tag{37}$$

Choosing $H = \dfrac{D}{M^{\frac{1}{2}}}$ from (34), (35), (37), (22) and (5) follows

$$W_1 \ll x^{\varepsilon}\left(\frac{xK}{D^{\frac{1}{4}}} + \frac{xK}{q^{\frac{1}{4}}} + x^{\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{4}} \right). \tag{38}$$

From (32) and (38) it follows that in the case $x^{8/27}\Delta \le D \le \dfrac{x^{1/2}}{\Delta K^4}$ the estimate

$$W \ll x^{\varepsilon}\left(\frac{xK}{\Delta^{\frac{1}{32}}} + +x^{\frac{5}{6}}D^{\frac{1}{3}}\Delta^{\frac{1}{4}}K + \frac{xK}{q^{\frac{1}{32}}} + x^{\frac{15}{16}}K^{\frac{31}{32}}q^{\frac{1}{32}} \right) \tag{39}$$

is fulfilled.

5.2. Evaluation by Heat-Brown's identity. Let $D \le x^{8/27}\Delta$. We decompose the sum $W(x)$ into $O(\log^2 x)$ as in (4). Using Heath-Brown's identity [6] with parameters

$$P = x/2,\ P_1 = x,\ u = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{2^{21}D^{\frac{1}{32}}},\ v = 2^7x^{\frac{1}{3}},\ w = 2^7x^{\frac{1}{3}}D^{\frac{1}{64}}. \tag{40}$$

we decompose the sum W as a linear combination of $O(\log^6 N)$ sums of first and second type. The sums of the first type are

$$W_1 = \sum_{d\le D} \lambda(d) \sum_{0<|k|\le K} c(k)e(\beta k) \sum_{M<m\le M_1} a_m \sum_{\substack{L<\ell\le L_1 \\ m\ell\equiv -2(d)}} e(\alpha m^2\ell^2 k)$$

and

$$W_1' = \sum_{d\le D} \lambda(d) \sum_{0<|k|\le K} c(k)e(\beta k) \sum_{M<m\le M_1} a(m) \sum_{\substack{L<\ell\le L_1 \\ m\ell\equiv -2(d)}} \log \ell e(\alpha m^2\ell^2 k),$$

where

$$M_1 \le 2M, \quad L_1 \le 2L, \quad ML \asymp x, \quad L \ge w, \quad a(m) \ll x^{\varepsilon}. \tag{41}$$

The sums of the second type are

$$W_2 = \sum_{d\le D} \lambda(d) \sum_{0<|k|\le K} c(k)e(\beta k) \sum_{L<\ell\le L_1} b(\ell) \sum_{\substack{M<m\le M_1 \\ m\ell\equiv -2(d)}} a(m)e(\alpha m^2\ell^2 k),$$

where

$$M_1 \le 2M, \quad L_1 \le 2L, \quad ML \asymp x, \quad u \le L \le v, \quad a(m),\ b(\ell) \ll x^{\varepsilon}. \tag{42}$$

5.2.1. Evaluation of type II sums. Applying the Cauchy–Schwarz inequality to W_2 and using Lemma 2(i), (40), (42) and (46) we obtain that

$$W_2^2 \ll x^\varepsilon KDM \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{d\sim D\\(d,\,a)=1}} \sum_{\substack{\ell_i\sim L\\ i=1,2\\ \ell_1\equiv\ell_2(d)}} b(\ell_1)b(\ell_2) \sum_{\substack{m\sim M\\ m\ell_i\equiv a(d)\\ i=1,2}} e(\alpha m^2(\ell_1^2-\ell_2^2)k) \tag{43}$$

$$= W_{21} + x^{1+\varepsilon}MDK^2$$

where

$$W_{21} = x^\varepsilon KDM \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{d\sim D\\(d,\,a)=1}} \sum_{\substack{\ell_i\sim L\\ \ell_1\ne\ell_2\\ \ell_1\equiv\ell_2(d)}} b(\ell_1)b(\ell_2) \sum_{\substack{m\sim M\\ m\ell_i\equiv a(d)\\ i=1,2}} e(\alpha m^2(\ell_1^2-\ell_2^2)k)$$

Applying again the Cauchy–Schwarz inequality and substituting

$$m_1 = m_2 + td, \quad t \ll \frac{M}{D} \quad \text{and} \quad \ell_1 = \ell_2 + \omega d, \quad \omega \ll \frac{L}{D}$$

we sequentially obtain

$$W_{21}^2 \ll x^{2+\varepsilon}D^2K^3 \sum_{k\sim K} \sum_{\substack{d\sim D\\(d,\,a)=1}} \sum_{\substack{\ell_i\sim L\\ \ell_1\ne\ell_2\\ \ell_1\equiv\ell_2(d)}} \sum_{\substack{m_i\sim M\\ m_1\ell_i\equiv a(d)\\ m_2\ell_i\equiv a(d)\\ m_1\ne m_2}} e(\alpha(m_1^2-m^2)(\ell_1^2-\ell_2^2)k) \tag{44}$$

$$+ x^{3+\varepsilon}LDK^4$$

$$= W_{22} + x^{3+\varepsilon}LDK^4$$

with

$$W_{22} \ll x^{2+\varepsilon}D^2K^3 \sum_{k\sim K} \sum_{d\sim D} \sum_{\omega\ll\frac{L}{D}} \sum_{\ell_2\sim L} \sum_{t\ll\frac{M}{D}} \min\left\{\frac{M}{d},\ \frac{1}{\|\alpha d^3 t\omega(2\ell_2+\omega d)k\|}.\right\}$$

Putting $\ell = \ell_2 + \omega d$ and $z = \omega\ell kt$ we get

$$W_{22} \ll x^{2+\varepsilon}D^2K^3 \sum_{d\sim D} \sum_{z\ll\frac{xLK}{D^2}} \tau_4(z) \min\left\{\frac{x^2K}{d^3z},\ \frac{1}{\|\alpha d^3 z\|}.\right\} \tag{45}$$

If

$$\Delta < D \le x^{\frac{8}{27}}\Delta \tag{46}$$

then from inequality (10) of Lemma 7, (45), (43) and (44) we get

$$W_2 \ll x^\varepsilon\left(x^{\frac{71}{72}}\Delta^{\frac{33}{64}}K + \frac{xK}{q^{\frac{1}{16}}} + \frac{xK}{\Delta^{\frac{1}{16}}} + x^{\frac{15}{16}}q^{\frac{1}{32}}K^{\frac{31}{32}}\right). \tag{47}$$

If

$$D \le \Delta \tag{48}$$

we will estimate the sum W_{22} by putting $u = d^3z$ and applying Lemma 4, Lemma 2 (ii) to find

$$W_2 \ll x^\varepsilon\left(x^{\frac{71}{72}}\Delta^{\frac{33}{64}}K + \frac{x\Delta^{\frac{1}{2}}K}{q^{\frac{1}{4}}} + \frac{xK}{q^{\frac{1}{16}}} + \frac{xK}{\Delta^{\frac{1}{16}}} + x^{\frac{15}{16}}q^{\frac{1}{32}}K^{\frac{31}{32}} + x^{\frac{1}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{4}}\right). \tag{49}$$

From (47) and (50) we get

$$W_2 \ll x^{\varepsilon}\left(x^{\frac{71}{72}}\Delta^{\frac{33}{64}}K + \frac{x\Delta^{\frac12}K}{q^{\frac14}} + \frac{xK}{q^{\frac{1}{32}}} + \frac{xK}{\Delta^{\frac{1}{16}}} + x^{\frac{15}{16}}q^{\frac{1}{32}}K^{\frac{31}{32}} + x^{\frac12}\Delta^{\frac12}K^{\frac34}q^{\frac14}\right). \tag{50}$$

5.2.2. Evaluation of type I sums. Reasoning as in the estimation of the sum W_{13} (see (5.1.2)) we obtain

$$W_1^2 \ll x^{\varepsilon}MDK\sum_{z\sim MD}\tau(z)\sum_{t\ll\frac{LK}{D}}\tau_3(t)\min\left\{\frac{x^2K}{z^2t}, \frac{1}{\|\alpha z^2t\|}\right\} + x^{\varepsilon}MDK^2. \tag{51}$$

Using Lemma 5 and $ML \sim x$ we obtain

$$W_1^2 \ll x^{\varepsilon}\left(MDK^2 + \frac{x^2K^2}{(MD)^{\frac12}} + \frac{x^2K^2}{q^{\frac12}} + xK^{\frac32}q^{\frac12}\right) \tag{52}$$

Using the inequality (51) we will evaluate the sum W_1 in one more way. Let $u = z^2t$ and from Lemma 4 (iii) and Lemma 2 (iv) we find

$$\begin{aligned} W_1^2 &\ll x^{\varepsilon}MDK\sum_{u\ll xMDK}\tau_5(u)\min\left\{\frac{x^2K}{u}, \frac{1}{\|\alpha u\|}\right\} \\ &\ll x^{\varepsilon}\left(MDKq + xM^2D^2K^2 + \frac{x^2MDK^2}{q}\right) \end{aligned} \tag{53}$$

If $MD > \Delta$ using the estimate (52) we get

$$W_1 \ll x^{\varepsilon}\left(x^{\frac{47}{48}}\Delta^{\frac{63}{128}}K + \frac{xK}{\Delta^{\frac14}} + \frac{xK}{q^{\frac14}} + x^{\frac12}K^{\frac34}q^{\frac14}\right). \tag{54}$$

If $MD \le \Delta$ from (53) it follows

$$W_1 \ll x^{\varepsilon}\left(x^{\frac12}\Delta K + \frac{x\Delta^{\frac12}K}{q^{\frac12}} + \Delta^{\frac12}K^{\frac12}q^{\frac12}\right), \tag{55}$$

then using (54) and (55) we get

$$W_1 \ll x^{\varepsilon}\left(x^{\frac{47}{48}}\Delta^{\frac{63}{128}}K + \frac{xK}{\Delta^{\frac14}} + \frac{xK}{q^{\frac14}} + \frac{x\Delta^{\frac12}K}{q^{\frac12}} + x^{\frac12}K^{\frac34}q^{\frac14}\right). \tag{56}$$

From (39), (50) and (56)

$$W \ll x^{\varepsilon}\left(\frac{xK}{\Delta^{\frac{1}{32}}} + \frac{xK}{q^{\frac{1}{32}}} + \frac{x\Delta^{\frac12}K}{q^{\frac14}} + x^{\frac{71}{72}}\Delta^{\frac{33}{64}}K + x^{\frac{15}{16}}K^{\frac{31}{32}}q^{\frac{1}{32}} + x^{\frac12}\Delta^{\frac12}K^{\frac34}q^{\frac14}\right). \tag{57}$$

5.3. Proof of Lemma 1. In Theorem 2 choose

$$x = q, \quad \Delta = K^{\frac{32.34}{33}}, \quad K = x^{\frac{1}{1296}-\eta}, \quad D = \frac{x^{1/2}}{\Delta K^4}, \tag{58}$$

where η is arbitrary small fixed number.

6. Proof of Theorem 2. As in [13] we take a periodic function with period 1 such that

$$\begin{aligned} 0 < \chi(t) < 1 \quad &\text{if} \quad -\delta < t < \delta; \\ \chi(t) = 0 \quad &\text{if} \quad \delta \le t \le 1-\delta, \end{aligned} \tag{59}$$

and which has a Fourier series

$$\chi(t) = \delta + \sum_{|k|>0} c(k)e(kt), \tag{60}$$

with coefficients satisfying

$$\begin{aligned} &c(0) = \delta, \\ &c(k) \ll \delta \qquad \text{for all } k, \\ &\sum_{|k|>K} |c(k)| \ll x^{-1} \end{aligned} \tag{61}$$

and δ and K satisfying the conditions (8).

The existence of such a function is a consequence of a well known lemma of Vinogradov (see [9], ch. 1, §2).

Next we will use sieve methods. As usual, for any sequence $\mathcal{A}$ of integers weighted by the numbers f_n, $n \in \mathcal{A}$, we set

$$S(\mathcal{A}, z) = \sum_{\substack{n\in\mathcal{A} \\ (n,\, P(z))=1}} f_n$$

and denote by $\mathcal{A}_d$ be the subsequence of elements $n \in \mathcal{A}$ with $n \equiv 0 \pmod d$. We write

$$P(z) = \prod_{p<z} p, \quad V(z) = \prod_{p|P(z)} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \quad \text{and} \quad C_0 = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

and we will use the linear sieve due to Iwaniec – this is Theorem 3 (see [7]).

To prove Theorem 2, it suffice to show that

$$S(\mathcal{A}, N^{1/3}) = \sum_{\substack{n+2\le x \\ (n+2,\, P(x^{1/3}))=1}} \chi(\alpha n^2 + \beta)\Lambda(n) > 0. \tag{62}$$

Following the exposition in Shi's article (see [11]) we have that

$$\begin{aligned} S \ge \sum_{\substack{n+2\le x \\ (n+2,\, P(x^{1/12}))=1}} \chi(\alpha n^2 + \beta)\Lambda(n) \Bigg(1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{x^{1/12}\le p_1 < x^{1/3.1} \\ n\equiv -2 (p_1)}} 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{n+2=p_1p_2p_3 \\ x^{1/12}\le p_1 < x^{1/3.1} \\ x^{1/3.1}\le p_2 < (\frac{x}{p_1})^{1/2}}} 1 \\ - \sum_{\substack{n+2=p_1p_2p_3 \\ x^{1/12}\le p_1 < p_2 < (\frac{x}{p_1})^{1/2}}} 1 + O\big(x^{11/12}\big) \Bigg). \end{aligned}$$

So

$$S \geq S(\mathcal{A},\, x^{1/12}) - \frac{1}{2}\sum_{x^{1/12}\leq p_1<x^{1/3.1}} S(\mathcal{A}_{p_1},\, x^{1/12}) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{x^{1/12}\leq p_1<x^{1/3.1}\\ x^{1/3.1}\leq p_2<(\frac{x}{p_1})^{1/2}}} S(\mathcal{A}_{p_1p_2},\, x^{1/12})$$

$$- \sum_{x^{1/12}\leq p_1<p_2<(\frac{x}{p_1})^{1/2}} S(\mathcal{A}_{p_1p_2},\, x^{1/12}) + O\big(x^{11/12}\big)$$

$$= S_1 - \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_3 - S_4 + O\big(x^{11/12}\big)$$

and it is enough to proof that above expression is positive. Consider a square-free number d. If $2|d$, then we write $|\mathcal{A}_d| = |r(\mathcal{A}, d)| \leq 1$. Otherwise we have by the Fourier expansion of $\chi(n)$ that

$$|\mathcal{A}_d| = \sum_{\substack{n\leq x-2\\ n\equiv -1(d)}} \chi(\alpha n^2+\beta)\Lambda(n)$$

$$= \sum_{\substack{n\leq x-2\\ n\equiv -1(d)}} \left(\delta + \delta \sum_{0<|k|<K} c(k)e(\alpha n^2 k)\Lambda(n) + O(x^{-1})\right)$$

$$= \delta\left(\frac{x}{\varphi(d)} + R_1(d) + R_2(d) + O\left(\frac{x}{d(\log x)^A}\right)\right).$$

Here $c(k) \ll 1$,

$$R_1(d) = \sum_{\substack{p\leq x-2\\ p\equiv -1(d)}} 1 - \frac{x}{\varphi(d)}$$

$$R_2(d) = \sum_{0<|k|<K} c(k) \sum_{\substack{n\leq x-2\\ n\equiv -2(d)}} e(\alpha n^2 k)\Lambda(n)$$

Applying Bombieri–Vinogradov theorem (see [8], Theorem 17.1)

$$\sum_{d\leq D} |R_1(d)| \ll \frac{x}{(\log x)^A}.$$

On the other hand , Theorem 1 implies that for a well-separated numbers d of level $D = \dfrac{x^{1/2}}{\Delta K^4}$ and $\lambda(d) \ll \tau(d)$ we get

$$\sum_{d\leq D} \lambda(d)R_2(d) \ll \frac{x}{(\log x)^A}$$

when $q = x$, where a/q convergent to α with a large enough denominator. From here on, the reasoning we go through is the same as in Shi's paper (see [11]). We will only note

that to estimate the sum

$$\sum_{x^{1/12}\le p<x^{1/3.1}}\ \sum_{d\le D} R_2(pd)$$

with $D=\dfrac{x^{1/2}}{\Delta pK^4}$ first we present it as a $O(\log^4 x)$ number of sums of the type

$$R_2(P)=\sum_{d\sim D}\lambda(d)\sum_{1\le|k|\sim K}c(k)\sum_{p\sim P}\sum_{\substack{n\sim x\\ n+2\equiv 0\,(d)\\ n+2\equiv 0\,(p_1)}} e\big(\alpha n^2k\big)\Lambda(n),$$

where $x^{1/12}\le P<x^{1/3.1}/2$.

If $DP\le x^{8/27}\Delta$ we put $t=dp$ and represent the sum $R_2(P)$ in type:

$$R_2(P)=\sum_{1\le|k|\sim K}c(k)\sum_{t\sim DP}g(t,\,d)\sum_{\substack{n\sim x\\ n+2\equiv 0\,(t)}} e\big(\alpha n^2k\big)\Lambda(n),$$

where

$$g(t,\,d)=\sum_{\substack{d\sim D\\ d|(t,\,P(z))\\ t/d>x^{1/12}\\ t/d-\text{prime}}}\lambda(d)\ll\tau(t)$$

and evaluation is in the same way as in § 5.2.

If $DP\ge x^{8/27}\Delta$ then, depending on which interval P falls into, and bearing in mind Remark 2 and the fact that d is well-separated, we choose H so that PH falls into one of the intervals $x^{2/5}\le PH\le\dfrac{x^{1/2}}{\Delta K^4}$ or $x^{8/27}\Delta\le PH\le x^{2/5}$. So

$$\begin{aligned}R_2(P)&=\sum_{1\le|k|\sim K}c(k)\sum_{s\sim S}\sum_{h\sim H}\lambda(hs)\sum_{p_1\sim P}\sum_{\substack{n\sim x\\ n+2\equiv 0\,(d)\\ n+2\equiv 0\,(p_1)}} e\big(\alpha n^2k\big)\Lambda(n)\\ &=\sum_{1\le|k|\sim K}c(k)\sum_{s\sim S}\sum_{t\sim PH}g(t,\,s)\sum_{\substack{n\sim x\\ n+2\equiv 0\,(ts)}} e\big(\alpha n^2k\big)\Lambda(n)\end{aligned}$$

where

$$g(t,\,s)=\sum_{\substack{h\sim H\\ h|(t,\,P(z))}}\lambda(hs)\ll\tau(t)$$

and evaluation is in the same way as in § 5.1.

Using the same calculation as in [11] with

$$z=x^{\frac{1}{12}},\quad \Delta=K^{\frac{32.34}{33}},\quad K=x^{\frac{1}{1296}-\eta},\qquad D=\frac{x^{1/2}}{\Delta K^4},$$

we get that inequality (62) is true and the proof of Theorem is complete.

REFERENCES

[1] G. Harman, R. C. Baker. the distribution of αp^k modulo one. *Mathematika*, **38** (1991), 170–184.

[2] J. R. Chen. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Sci. Sinica*, **16** (1973), 157–176.

[3] J. B. Friedlander, H. Iwaniec. Opera de cribro. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. **57**. Providence, RI, American Mathematical Society, 2010.

[4] G. Greaves. Sieves in number theory. New York, Springer-Verlag, 2001.

[5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some problems of Diophantine approximation I. On the fractional part of $n^k\lambda$. *Acta Math*, **37** (1914), 155—191.

[6] D. R. Heath-Brown. Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity. *Canad. J. Math.*, **34** (1982), 1365–1377.

[7] H. Iwaniec. A new form of the error term in the linear sieve. *Acta Arith.*, **37** (1980), 307–320.

[8] H. Iwaniec, E. Kowalski. Analytic Number Theory. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. **53**. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2004.

[9] A. A. Karatsuba. Principles of analytic number theory. Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).

[10] K. Matomäki. A Bombieri-Vinogradov type exponential sum result with applications. *Journal of Number Theory*, **129**, no. 9 (2009), 2214–2225.

[11] S.-Y. Shi. On the distribution of αp modulo one for primes p of a special form. *Osaka J. Math.*, **49**, no. 4 (2012), 993–1004.

[12] S.-Y.Shi, Z. Wu. On the distribution of αp^2 modulo one for primes p of a special type. *Chinese Annals of Mathematics. Series A*, **34**, no. 4 (2013), 479–486.

[13] T. L. Todorova, D. I. Tolev. On the distribution of αp modulo one for primes p of a special form. Math. Slovaca **60** (2010), 771–786.

[14] F. Xue, J. Li, M. Zhang. On the distribution of αp^2 modulo one with prime p of a special form. *Journal of Mathematics* **2021** (2021), Article ID 5516049, `https://doi.org/10.1155/2021/5516049`.

[15] R. C. Vaughan. The Hardy–Littlewood method, 2nd. ed. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997.

[16] И. М. Виноградов. Основы теории чисел. Москва, Наука, 1981 [I. M. Vinogradov. Osnovy teorii chisel. Moskva, Nauka, 1981].

[17] I. M. Vinogradov. The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. *Trud. Math. Inst. Steklov*, **23**, (1947), 1–109, (in Russian).

[18] I. M. Vinogradov. A general distribution law for the fractional parts of values of a polynomial with variable running over primes. *C. R. (Doklady) Acad.-Sci. URSS (N.S.)*, **51** (1946), 491–492 (in Russian).

[19] H. Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. *Math. Ann.*, **11** (1916), 313–352.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

SORTING IN CONSTRUCTION OF RESOLUTIONS OF COMBINATORIAL DESIGNS*

Antoaneta Tsvetanova[1], **Stela Zhelezova**[2]

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
e-mails: [1]a.cvetanova@math.bas.bg, [2]stela@math.bas.bg

There are different kinds of sorting algorithms. Each algorithm has its own advantages and disadvantages depending on the data they process. We are interested in the performance of sorting algorithms in the case of construction of resolutions of combinatorial designs. Studying their performance for this special class of problems will give us the opportunity to improve, if possible, the speed of our software for solving similar problems. We use $C{+}{+}$ and, for part of our investigations, the computer algebra system GAP.
Keywords: sorting, classification algorithm, combinatorial design, design resolution.

СОРТИРАНЕ НА ДАННИ ПРИ КОНСТРУИРАНЕ НА РЕЗОЛЮЦИИ НА КОМБИНАТОРНИ ДИЗАЙНИ

Антоанета Цветанова[1], **Стела Железова**[2]

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mails: [1]a.cvetanova@math.bas.bg, [2]stela@math.bas.bg

Съществуват много и различни алгоритми за сортиране. Всеки алгоритъм има своите предимства и недостатъци в зависимост от данните, които обработва. Разглеждаме работата на някои алгоритми за сортиране при задачи за конструиране на резолюции на комбинаторни дизайни. Проучването на тяхното представяне, за този специален клас проблеми, ще ни даде възможност да подобрим, ако е възможно, скоростта на нашия софтуер за конструиране на резолюции на комбинаторни дизайни. Използваме $C{+}{+}$ и също така, за част от нашите изследвания, системата за компютърна алгебра GAP.
Ключови думи: сортиране, класификационен алгоритъм, резолюция на комбинаторен дизайн.

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.057-064
Partially supported by the Bulgarian National Science Fund under Contract No KP-06-H62/2-2022.
2020 Mathematics Subject Classification: 68P10, 05-08, 05B25, 05B07.

1. Introduction. This paper presents research on the applicability of a number of sorting techniques in the classification of resolutions of combinatorial designs. For the basic knowledge on resolutions of combinatorial designs refer, for instance, to [11].

Let $V = \{P_i\}_{i=1}^{v}$ be a finite set of *points*, and $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j=1}^{b}$ – a finite collection of k-element subsets of V, called *blocks*. If any 2-subset of V is contained in exactly λ blocks of $\mathcal{B}$, then $D = (V, \mathcal{B})$ is a 2-(v,k,λ) *design*. Each point is in r blocks.

A parallel class is a partition of set of points by blocks. There are q blocks in a parallel class. A *resolution* of the design is a partition of the collection of blocks into *parallel classes*. The design is *resolvable* if it has at least one resolution. Two resolutions are isomorphic if there exists an automorphism of the design transforming each parallel class of the first resolution into a parallel class of the second one. An automorphism of a resolution is an automorphism of the underlying design which maps each parallel class to a parallel class of the same resolution. The set of all resolution automorphisms is a group.

Resolutions of combinatorial designs are used in different types of error-correcting codes [10, 12], in network coding [14], cryptography [16] etc.

Part of the research on the topic has been done by computational methods. Many interesting classification results are obtained by computer, for instance, in [1, 3, 20, 21, 23]. Some authors use classification algorithms based on canonical augmentation [2] and also algorithms for computing of the code weight distribution in which no sorting is needed [17]. Equally important the *orderly generation* algorithms are in use too [6, 7, 13, 26]. They are based on the backtrack search technique and thus are with exponential time complexity. Nevertheless, for relatively small parameter sets and in combination with specific parameter depending theoretical conditions, they can be very successful. Apart from the use of theoretical restrictions, the algorithm implementation can be improved by refining the computation too.

In this paper we are interested in the performance of an auxiliary algorithm, namely the involved sorting algorithm. It appears in an orderly generation algorithm because it is connected with a particular lexicographic order imposed on the constructed objects. Sorted objects facilitate search and comparison and improve data operations efficiency. This, together with the frequently great number of combinatorial objects which are considered, leads to the impact of time spent for sorting on the whole computation time.

There are different kinds of sorting algorithms. Their performance and parameters are studied in depth by Knuth [15]. In our research we do not focus on their time complexity. It is known for all of them. Also there are papers on comparative analysis of various sorting algorithms in the general case [25, 30] and in case of data with a given specific distribution [4, 22]. We are interested in the performance of comparison-based unstable sorting algorithms suitable for the classification problems we consider. We study one and two-dimensional sorting which appears in the construction of resolutions of combinatorial designs. For each of them we apply a Cocktail Sort algorithm [15], the Introsort algorithm [18] (the built-in function in C++ [24]) and the Pattern-defeating quicksort algorithm [19] (the built-in *GAP* function [8]). For each sorting algorithm the maximal, minimal and the average time for execution of the sorting tasks are measured.

2. Sorting problems. We consider the construction of resolutions of a given combinatorial design with a prescribed automorphism group of order i (G_i). The generation method supposes the employment of a chosen lexicographic order. The elements involved

in sorting are points or/and blocks of a particular combinatorial design. We can always denote them by integers. Design points can be enumerated $V = \{1, 2, \ldots, v\}$. Point labels are used to define a lexicographic order on the blocks and next to assign numbers to the blocks according to this order $\mathcal{B} = \{1, 2, \ldots, b\}$. The place and the size of a sorting task depends on the particular problem we consider.

2.1. Problem 1. In [27] parallelisms of $PG(3, 7)$ invariant under an automorphism group (G_{49}) of order 49 with some additional properties are constructed. They comprise resolutions of the point-line 2-$(400, 8, 1)$ design. It has $b = 2850$ blocks, each parallel class has $q = 50$ blocks and a resolution has $r = 57$ parallel classes. The design is known and the resolution construction starts with already lexicographically ordered design blocks. One way to derive resolutions invariant under G_{49} is by construction of all possibilities for parallel classes firstly. This can be done by backtrack search on the block orbits under G_{49}. These block orbits are considered on the lexicographically ordered design blocks. Therefore the first block in each orbit is the smallest one but the other blocks appear depending on the action of the considered automorphism group. Thus the blocks in each orbit are not necessarily in lexicographic order. In this case a parallel class consists of entire block orbits under G_7 – a particular subgroup of G_{49} and hence its blocks cannot appear in the chosen lexicographic order by construction. The structure of a parallel class under the given above conditions is presented in the first row of Table 1. Here f stands for a fixed under a particular G_7 block while O_j^i denotes j-th design block from the i-th orbit of length 7 under G_7. The second row corresponds to a particular parallel class with this structure. Each block is represented by its consecutive number in the chosen lexicographic order. For the purpose of our research we work with 3000 parallel classes. Each parallel class can be stored in a proper one-dimensional data container of integers named `Par_class` with size $q + 1 = 51$.

Table 1. A parallel class of a point-line 2-$(400, 8, 1)$ design fixed by a G_7

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	$\ldots$	O_1^5	O_2^5	O_3^5	O_4^5	O_5^5	O_6^5	O_7^5	O_1^6	O_2^6	O_3^6	O_4^6	O_5^6	O_6^6	O_7^6
9	58	142	212	240	331	359	429	$\ldots$	716	1062	1408	1747	2093	2432	2778	779	1125	1471	1810	2156	2495	2841

2.2. Problem 2. In [28] the classification of point-cyclic resolutions of cyclic 2-$(45, 3, 1)$ designs is considered. A design is cyclic if it has a cyclic automorphism group of order v. A resolution with an automorphism permuting its points in one cycle is called point-cyclic. There are 11616 cyclic designs with these parameters [5]. It is well known that G_{45} partition the design blocks in one short block orbit of length $v/3 = 15$ and 7 block orbits of length $v = 45$. For tightness of the stored data such a design can be presented only by one block from each orbit (the smallest one in the chosen lexicographic order). In our case 8 blocks are enough. Each design block is a triple of points. With the agreement that the 8 block orbit representatives start with the first point they can be written by the numbers of the other two points only. The designs are stored in a file where each cyclic design corresponds to a row. The second row of Table 2 shows one such record with 8 groups of numbers. At the third row the corresponding design blocks are written. The first block represents the short orbit while the next 7 blocks are representatives of the long block orbits. We want to construct all point-cyclic resolution of this cyclic design.

One approach is to start with getting all design blocks by G_{45}. As can be seen from the last block in each orbit (the last row of Table 2) a cyclic shift of the block points leads to blocks with unordered points. The other problem is that if we write the orbits one after another to obtain all 330 blocks of a considered cyclic 2-$(45, 3, 1)$ design they will appear not in the chosen lexicographic order. Therefore we need to perform two-dimensional sorting on all design blocks. They can be stored in a proper two-dimensional data container of integers named `Deign_blocks` with size $b + 1 = 331$ and $k + 1 = 4$.

Table 2. Block orbits of a cyclic 2-$(45, 3, 1)$ design

orbit length	short(15)	long(45)	long	long	long	long	long	long
a record	16,31	2,4	5,13	8,22	7,29	11,27	10,33	6,19
block orbits	1,16,31	1,2,4	1,5,13	1,8,22	1,7,29	1,11,27	1,10,35	1,6,19
2^{nd} block	2,17,32	2,3,5	2,6,14	2,9,23	2,8,30	2,12,28	2,11,36	2,7,20
last block	15,30,45	45,1,3	45,4,12	45,7,21	45,8,30	45,10,26	45,9,34	45,5,18

3. Sorting algorithms. Our programs are written in C++. Microsoft Visual C++ 2022 is used and the results are obtained on on Intel i3-7100U @ 2x2.4 GHz. The data we have to sort comprises only integers. Its entire size is fixed by the design parameters and hence is known in advance. The records in which they are included are not so long. The size of a Problem 1 like task is determined by q and usually is less than one hundred. For a Problem 2 like task the size is limited by r or by b and for the parameter sets we consider does not exceed one thousand. But the number of considered objects typically is very big. For instance there are 14227090 possible parallel classes invariant under a particular automorphism group of order 8 of the point-line 2-$(156, 6, 1)$ design (Problem 1 like task) and there are 2353310 cyclic 2-$(57, 3, 1)$ designs (Problem 2 like task). These are the reasons to choose as suitable for our investigations a Cocktail Sort algorithm, the Introsort algorithm and one of the sorting algorithms included in *GAP*. An orderly algorithm for construction of design resolutions generally includes one and two-dimensional sorting therefore it will be more effective if the data is stored in one and the same type containers for both problems.

3.1. Cocktail Sort. The *Cocktail Sort* algorithm (CSA) is based on the *Bubble Sort* algorithm (BSA). A BSA passes through an array from the beginning (left) to the end (right), compares elements and swaps them if their order is not correct [15, 24]. In the first iteration the largest element is settled on its exact place. Next the second largest element is moved to the right up to find its place etc. until all data is sorted. CSA does the same but in both directions. The first iteration is the same as for BSA while the second starts from the element before the just sorted one and goes from right to the left such that the smallest element is settled on place. If N is the number of sorted elements in the best case, the CSA time complexity is $O(N)$ and in the worst case is $O(N^2)$ as is for BSA. Nevertheless, there is an empirical analysis of CSA which shows that it is less than two times faster than BSA [29].

We implement CSA for Problem 1 in a standard manner in the function `CocktailSort (int arg[], int right)`. An one-dimensional array of integers `int Par_class[q+1];` is used to store each parallel class in Problem 1. It is passed to the function as a parameter. Its length (`right`) also has to be passed because the one-dimensional sort function is used for different data in many places in the implementation of our construc-

tion algorithm. For Problem 1 the function is called in the following way: `CocktailSort (Par_class, q);`.

For Problem 2 design blocks are stored in `int Deign_blocks[b+1][k+1]` – a standard two-dimensional array of integers. It is passed to the function as parameter but further CSA needs one more parameter. For a particular sorting task regarding design parameters it is known in how many positions two rows of the two-dimensional data array differ. The parameter `dept` depends on the number of these positions. The function declaration is `CocktailSort(int arg[][k+1], int right, int dept)`. Before swapping two unlike elements in position `dept` of rows i and $i+1$ we have to check if they coincide in all positions before `dept`. Thus for Problem 2 the function is called as:

```
for (int i = 1; i < k; i++)
        CocktailSort(Deign_blocks[][k+1], b, i);
```

3.2. Introsort. *Introsort* (Introspective sort) is a hybrid sorting algorithm incorporating *Insertion sort* for small set lengths, *Heapsort* for a recursion depth greater than a particular level and *Quicksort* in all other cases. More about the algorithm can be found in [18]. This combination ensures good time complexity in the worst and in the average case $O(N \log N)$, where N is the number of sorted elements.

In our algorithm implementation we use the Introsort algorithm incorporated in the C++ Standard Library as a built-in `std::sort()` function. It is included in the `<algorithm>` header file of C++. The `sort()` function cannot be used with a fixed two-dimensional array because an array cannot be assigned to another array. Therefore to apply the Introsort algorithm by the `sort()` function the data should be stored in `std::array` or `std::vector` classes. The main difference between them is that the first class is a fixed-size container while the second is a dynamic one. We use vectors but since the size of the data is known in advance the dynamic properties of the vectors are not employed here. This is important because a vector growth can lead to growth of the processing time.

Each parallel class in Problem 1 is stored in a vector `vector<int> Par_class(q+1);` and the design blocks in Problem 2 are written in a vector of vectors `vector<vector<int>> Deign_blocks(b+1, vector<int>(k+1));`. The range of sorting is given by iterators to the begin and to the end of the corresponding vector. We do not specify the function's third parameter as ascending order is used by default and it is suitable for the considered objects. Thus for Problem 1 we have `sort(Par_class.begin(), Par_class.end());` and for Problem 2 `sort(Deign_blocks.begin(), Deign_blocks.end());`.

3.3. Sorting data in GAP. The system for computational discrete algebra (*GAP*) is a freely distributed software. It is especially useful in group computations. Generally we use *GAP* to obtain the required for the constructive algorithm automorphism groups and their subgroups. In this paper we employ *GAP* in the needed sorting task. Three different sorting algorithms are involved in *GAP*. We apply the default one which is implemented in *GAP*'s function `Sort()`. It comprises the *Pattern-defeating quicksort* algorithm [19]. This quicksort modification is a hybrid sorting algorithm which contains the same sorting algorithms as Introsort, but with a different combining strategy. A novel scheme for partitioning in the quicksort part of the algorithm and a concept of a bad partitioning instead of exploiting a recursion depth are among the divergences from the Introsort algorithm. For a few common patterns this sorting algorithm achieves linear

time complexity but in all other cases its time complexity is like that of the Introsort algorithm.

The syntax of the function is `Sort(list,func)` [9]. The parameter `func` gives the rule for comparing the elements and is omitted if the regular ascending order is adopted. Therefore to do necessary sort tasks in *GAP* we have to store our data in data structure called `list`. Its elements are written between square brackets [,] and separated by commas. For Problem 1 the sort function is called as `Sort(Par_class);`. For Problem 2 the data is stored in list of lists. We need to define a specific sorting function which answers how to compare two sub-lists that coincide in the first position. In this case the sort function is called as follows:

```
Sort(Deign_blocks, function(v, w)
        return v[1] < w[1] or (v[1] = w[1] and v[2] < w[2]);
```

4. Comparison. The times taken by the execution of each of the considered sorting algorithms for the problems mentioned above are given in Table 3. For each of them the minimal, maximal and average time for sorting an object is presented. To be more precise we get the running time in five identical trials. The values in the table are the averages of these trials.

It looks like the Introsort algorithm implemented in *C++* standard library has the best performance in the case of the one-dimensional Problem 1. Our Cocktail sort algorithm implementation is almost two times slower. The data size here is relatively small thus this result can be expected. The minimal time for one-dimensional sorting is the best for the Cocktail sort algorithm implementation because it refers to a case of almost sorted object.

For the two-dimensional Problem 2 the implementation of the Pattern-defeating quicksort algorithm in *GAP* is with the best performance. In this case our Cocktail sort algorithm implementation is almost 13 times slower. In Problem 2 we have to process 11616 objects so this difference is very important.

Our investigation shows that the implementation of the main constructive algorithm should better use the sort function from the C++ standard library. Thus the standard C++ arrays have to be replaced by vectors. Another possibility is to use the Pattern-defeating quicksort algorithm implementation for C++ which is under a zlib license and can be found at `https://github.com/orlp/pdqsort`.

Table 3. Times taken by the considered algorithm implementations in microseconds

Task	Algorithm	min	max	average
Problem 1	Cocktail sort	1	30999.7	50.4
	std::sort()	6.4	7700.4	27.3
	GAP Sort()	12.4	670	37.8
Problem 2	Cocktail sort	8844.4	186013.6	13307.5
	std::sort()	1588.6	115924.8	3092.2
	GAP Sort()	643.3	51162.7	1064.7

REFERENCES

[1] A. Betten. The packings of PG(3,3). *Des. Codes Cryptogr.*, **79**, no. 3 (2016), 583–595.

[2] I. Bouyukliev, S. Bouyuklieva, S. Kurz. Computer Classification of Linear Codes. *IEEE T Inform. Theory*, **67**, no. 12 (2021), 7807–7814.

[3] M. Braun. Construction of a point-cyclic resolution in PG(9,2). *Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial*, **3**, no. 1 (2006), 33–50.

[4] J. Clement, Th. Nguyen Thi, B. Vallee. Towards a Realistic Analysis of Some Popular Sorting Algorithms. *Combinatorics, Probability and Computing*, **24**, no. 1 (2015), 104–144.

[5] C. J. Colbourn, A. Rosa. Triple Systems. Oxford, Clarendon Press, 1999.

[6] M. Dzhumalieva-Stoeva, I. G. Bouyukliev, V. Monev. Construction of self-orthogonal codes from combinatorial designs. *Probl. Inf. Transm.*, **48** (2012), 250–258 .

[7] I. A. Faradžev. Constructive enumeration of combinatorial objects, In Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, (Université d'Orsay, July 9 – 13, 1977). *Colloq. Internat. du C.N.R.S.*, **260** (1978), 131–135.

[8] GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra, `http://www.gap-system.org/`. Last accessed 21 December 2023.

[9] GAP – Reference Manual, Release 4.12.2, 2022-12-18, the GAP Group. Last accessed 21 December 2023.

[10] A. Gruner, M. Huber. New Combinatorial Construction Techniques for Low-Density Parity-Check Codes and Systematic Repeat-Accumulate Codes. *IEEE T Commun.*, **60**, no. 9 (2012), 2387–2395.

[11] Handbook of Combinatorial Designs, C. Colbourn, J. Dinitz,(eds.) 2nd edn. In: Rosen, K. (eds.) Discrete mathematics and its applications, Boca Raton, FL., CRC Press 2007.

[12] S. J. Johnson, S. R. Weller. Resolvable 2-designs for regular low-density parity-check codes. *IEEE T Commun.*, **51**, no. 9 (2003), 1413–1419.

[13] P. Kaski, P. Östergård. Classification algorithms for codes and designs. Berlin, Springer, 2006.

[14] R. Koetter, F. R. Kschischang. Coding for errors and erasures in random network coding. *IEEE T Inform. Theory*, **54** (2008), 3579–3591.

[15] D. E. Knuth. The art of computer programming 3: Sorting and Searching, 2nd edn. Addison-Wesley, 1998.

[16] A. Kumar, S. Maitra. Resolvable block designs in construction of approximate real MUBs that are sparse. *Cryptogr. Commun.*, **14** (2022), 527–549 .

[17] M. Markov, Y. Borissov. Computing the Weight Distribution of the Binary Reed-Muller Code R(4,9). arXiv:2309.10462.

[18] D. R. Musser. Introspective Sorting and Selection Algorithms. *Software: Practice and Experience*, **27**, no. 8 (1997), 983–993.

[19] O. R. Peters. Pattern-defeating Quicksort. arXiv./abs/2106.05123, 2021.

[20] A. R. Prince. The cyclic parallelisms of PG(3,5). *Eur. J. Combin.*, **19**, no. 5 (1998), 613–616.

[21] G. F. Royle. An orderly algorithm and some applications in finite geometry. *Discrete Math*, **185**, no. 1–3 (1998), 105–115.

[22] A. Sabah, S. Abu-Naser, Y. Helles, R. Abdallatif, F. Y. A. Abu Samra, A. H. Abu Taha, N. M. Massa, A. A. Hamouda. Comparative Analysis of the Performance of Popular Sorting Algorithms on Datasets of Different Sizes and Characteristics. *Int. J. Academic Eng. Research (IJAER)*, **7**, no. 6 (2023), 76–84.

[23] J. Sarmiento. Resolutions of PG(5,2) with point-cyclic automorphism group. *J. Combin. Des.*, **8**, no. 1 (2000), 2–14.

[24] Software Testing Help, Sorting Techniques In C++, `https://www.softwaretestinghelp.com/sorting-techniques-in-cpp/`. Last accessed 21 December 2023.

[25] B. Subbarayudu, L. L. Gayatri, P. S. Nidhi, P. Ramesh, R. G. Reddy, K. K. Reddy C. Comparative Analysis on Sorting and searching Algorithms. *Int. J. Civil Eng. Technol. (IJCIET)*, **8**, no. 1 (2017), 955–978.

[26] S. Topalova, S. Zhelezova. Backtrack Search for Parallelisms of Projective Spaces, In: Flocchini P., Moura L. (eds.) Combinatorial Algorithms, IWOCA 2021. Lect. Notes Comput. Sci., vol. **12757**, (2021), 544–557.

[27] S. Topalova, S. Zhelezova. Transitive Deficiency One Parallelisms of PG(3,7). *Mathematics*, **11** (2023), 2458.

[28] S. Topalova, S. Zhelezova. Point-cyclic KTS(45). 18th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM, BGSIAM'23 Extended abstracts (2023), 48–49.

[29] A Computer Science portal, `https://www.geeksforgeeks.org/cocktail-sort/`. Last accessed 21 December 2023.

[30] CodersLegacy, `https://coderslegacy.com/comparison-of-sorting-algorithms/`. Last accessed 21 December 2023.

СЕКЦИЯ Б: МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ И ИНФОРМАТИКА

SECTION B: MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

CUSTOM DATA QUALITY MECHANISM IN DATA WAREHOUSE FACILITATED BY DATA INTEGRITY CHECKS*

Angel Georgiev[1], **Vladimir Valkanov**[2]

Faculty of Mathematics and Informatics,
Paisii Hilendarski University of Plovdiv, Plovdiv, Bulgaria
e-mails: [1]angel.georgiev@uni-plovdiv.bg, [2]vvalkanov@uni-plovdiv.net

In the era of data-driven decision-making, Data Warehousing (DWH) is crucial for organizations seeking to leverage extensive datasets. However, the success of DWH initiatives depends on the quality of the enclosed data. Insufficient quality data in Data Warehousing can impact the accuracy of analytical results, leading to misguided decisions and reduced business performance. This paper examines the significance of Data Quality Mechanisms in addressing challenges related to data quality. Data Quality Mechanisms play a crucial role in identifying, rectifying, and preventing data quality issues throughout the data lifecycle. This paper explores fundamental concepts, challenges, and impacts of data quality on business operations. It emphasizes the critical role of robust Data Quality Mechanisms in ensuring the accuracy, completeness, and reliability of data within the Data Warehousing ecosystem. As organizations increasingly recognize data as a strategic asset, it is imperative to implement effective data quality mechanisms to unlock the true potential of data warehouses and derive actionable insights.
Keywords: Data Warehouse, data quality, ground transportation, SQL, data, checks, data governance, data maintenance.

ПЕРСОНАЛИЗИРАН МЕХАНИЗЪМ ЗА КАЧЕСТВО НА ДАННИТЕ В ХРАНИЛИЩА НА ГОЛЕМИ ДАННИ, УЛЕСНЕН ОТ ПРОВЕРКИ ЗА ЦЕЛОСТТА НА ДАННИТЕ

Ангел Георгиев[1], **Владимир Вълканов**[2]

Факултет по математика и информатика,
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив, България
e-mails: [1]angel.georgiev@uni-plovdiv.bg, [2]vvalkanov@uni-plovdiv.net

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.067-075
2020 Mathematics Subject Classification: 68T09, 62R07, 68P01, 68P15, 68P20.

В ерата на вземане на решения, базирани на данни, хранилищата за големи данни са от решаващо значение за организациите, които искат да използват обширни набори от данни. Успехът на технологията обаче зависи от качеството на приложените данни. Недостатъчно качествените данни могат да повлияят на точността на аналитичните резултати, което води до погрешни решения и намалена ефективност на бизнеса. Този документ разглежда значението на механизмите за качество на данните при справяне с предизвикателствата, свързани с качеството на данните. Механизмите за качество на данните играят решаваща роля в идентифицирането, коригирането и предотвратяването на проблеми с качеството на данните през целия жизнен цикъл на данните. Този документ изследва фундаментални концепции, предизвикателства и въздействия на качеството на данните върху бизнес операциите. Той подчертава критичната роля на стабилните механизми за качество на данните за осигуряване на точност, пълнота и надеждност на данните в екосистемата за съхранение на данни. Тъй като организациите все повече разпознават данните като стратегически актив, наложително е да се внедрят ефективни механизми за качество на данните, за да се отключи истинският потенциал на хранилищата за данни и да се извлекат полезни прозрения.
Ключови думи: Хранилища за големи данни, качество на данните, наземен транспорт, SQL, данни, проверки, следене на качеството да данните, поддръжка на развиетието на данните.

1. Introduction. In today's dynamic business intelligence environment, organizations are increasingly reliant on Data Warehousing (DWH) solutions to centralise, manage, and analyse large amounts of data for informed decision-making. However, the success of these efforts depends on the quality of the data they handle and store. Poor data quality can lead to inaccurate insights, misguided decision-making, and compromised business performance.

A reliable Data Quality Mechanism incorporates a range of procedures, tools, and best practices aimed at detecting, correcting, and preventing data quality issues throughout the data lifecycle. Data Quality Mechanisms have a vital role to the end client's decision-making data, which the Data Warehouse contains. The analytical results can be improved ultimately by implementing such techniques.

Data quality is one of the characteristics that cannot be omitted when designing a stable data platform. High-quality data can be distinguished by accuracy, completeness, consistency, timeliness, and relevance. The absence of these attributes may introduce errors, anomalies, and discrepancies, which can erode the reliability of analytics and decision support systems. [1]

This research examines the key points of data quality mechanisms in data warehousing. It explores the challenges associated with this field of information technology, the negative impact of poor data on business operations, and the techniques used to achieve and maintain high standards of data health in such ecosystems. As information becomes an increasingly important asset for organizations, its role is vital to the business development and growth of every data-oriented organization.

2. Current state. In today's world of data management and analytics, the role of Data Warehousing (DWH) has evolved significantly due to technological advancements and the growing importance of data-driven decision-making. As big tech companies continue to accumulate and leverage vast amounts of data, the importance of maintaining

high data quality within the DWH ecosystem has become increasingly critical. The state of Data Quality Mechanisms in Data Warehousing shows an increased focus on ensuring accurate, reliable, and complete data.

There are a lot of existing tools for controlling the state of information in a specific organization such as Talend Data Fabric, SAS Data Quality, SAP Data Intelligence, etc.

The first one is an integration platform offered by Talend, a software company specializing in data integration and management solutions. Talend Data Fabric is designed to address various aspects of the data management lifecycle, providing a comprehensive suite of tools for data integration, data quality, data governance, and more.

SAS Data Quality is a component of the SAS (Statistical Analysis System) software suite provided by the SAS Institute. SAS is a renowned software suite used for advanced analytics, business intelligence, data management, and statistical analysis. SAS Data Quality specifically focuses on ensuring the accuracy, completeness, and reliability of data within an organization's data ecosystem.

SAP Data Intelligence is a comprehensive data management solution provided by SAP, a leading enterprise software company. SAP Data Intelligence is designed to enable organizations to discover, connect, manage, and orchestrate disjointed and distributed data assets across the enterprise. It plays a crucial role in supporting data integration, processing, and governance in complex and dynamic data landscapes [10, 11].

All these software as a service provide ideal solutions for data quality issues, but nothing is a better fit for a company's data strategy than a custom one.

In summary, the state of Data Quality Mechanisms in Data Warehousing is constantly changing and evolving. Organizations are using advanced technologies and comprehensive governance approaches to tackle data quality issues and fully utilize their data for strategic decision-making [2, 3].

3. ETL Process Overview. The Extract, Transform, Load (ETL) process is a crucial component in data management, ensuring efficient and reliable data integration within organizations. ETL involves three stages: extracting data from source systems, transforming it, and loading it into target databases or data warehouses.

A. Extract

During the initial phase, data is extracted from various source systems, such as databases, applications, flat files, or external data sources. This process involves collecting raw data in its native format from different origins, capturing the information required for analysis and decision-making.

B. Transform

The data that has been extracted is then transformed. This involves cleaning, standardizing, and manipulating the data to meet the specific requirements of the target system or data warehouse. Transformations may include data cleansing to address errors or inconsistencies, data enrichment to add additional context, and data formatting to ensure uniformity.

C. Load

The last step is to load the transformed data into the destination system, which is usually a data warehouse or a database optimized for analytical queries. The data is organized and structured in a way that facilitates efficient querying and reporting. Loading can occur in batches or in real-time, depending on the organization's needs and the nature of the data.

The ETL process is closely linked to data quality, serving as a crucial gateway to ensure the accuracy, consistency, and reliability of data within an organization's information ecosystem. The connection to data quality comes in several aspects as: data cleansing in transformation, standardization for consistency, data enrichment for completeness, data profiling and validation, quality checks in loading, integration with data quality tools, etc. [4, 5, 6].

4. Custom Data Quality Mechanism. Data Quality Rules are a type of business rule that defines specific criteria for business requirements. They can be used to analyze and evaluate the quality of datasets, including how data behaves over time and its consistency across internal source systems. Data Quality Rules enable the measurement of various dimensions of data quality, such as:

- Accuracy – does the data match what is expected?
- Consistency – does the data match between alternative source systems?
- Completeness – has all values in the data been completed?

Data Quality Rules enable the identification of problem areas and trends. They facilitate continuous measurement, reveal opportunities for improvement, and provide the foundation for data cleansing. It is crucial to document Data Quality Rules clearly and make them easily accessible.

There are several milestone, which make the data quality rule mechanism: sign off process, new data quality rule requests and amendments, validation type, validation rule naming convention, validation rules for each semantic layer, key source tables, process for managing data quality alerts , validation rule severity server layer agreements definitions monitoring validation rules tools [7, 8].

The **sign-off process** for stakeholders must be completed before submitting a request for a new or updated Data Quality Rule.

A Validation Rule template cannot be submitted until the new rule or changes have been reviewed and approved by the domain owner. The requestor should document all details of the new rule or changes and send them to the domain owner for peer review and sign-off. If a domain owner makes a direct request, the details will still be subject to peer review. This review may be conducted by another domain owner or a business analyst.

New requests for Data Quality Rules: The sign-off email should be forwarded with the attached VR01 to the Data Steward. The innovation in this step of the validation process is the template structure, which provides flexible design and mobility in the rule creation. It consists of Excel Spreadsheet with the following attributes: **Date**, **Version**, **Validation type** (Data Integrity/ Quality Rule, to be completed by Data Steward), **Severity Status** (Top priority/High/Medium/Low this is the status when the validation check has failed, the threshold will define the severity status), **Golden Metric** (metric the validation rule is checking), **Semantic Layer** (Finance, CEXP, etc.), **Impacted Schema and tables, Validation Name** (QR/DI_Semantic layer_Metric) e.g. QR_Finance_GMV/DI_Finance_GMV, to be completed by Data Steward), **Event** (detail of what triggers this quality rule into action), **Description, Threshold (%, number), Frequency (daily, weekly, monthly), SQL Method, Statement, Peer reviewed by, Date**. For audit purposes, a copy of the VR01 and approval email will be saved in the Validation Rule requests folder as shown in Figure 1.

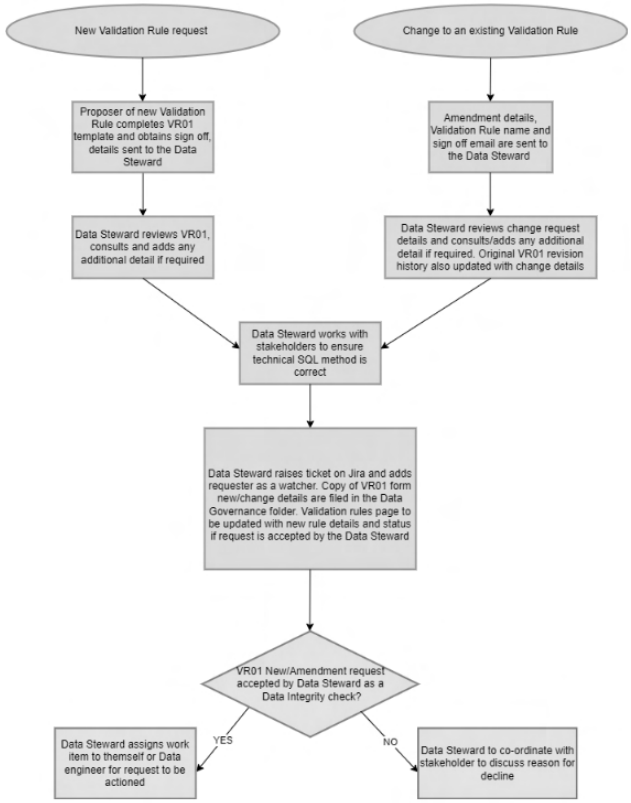


Fig. 1. Adding new validation rules

Amendments to existing Data Quality Rules: Please send details of changes, Validation Rule name, and sign-off email to the Data Steward. For audit purposes, the revision history of the original VR01 will be updated, along with the approval email.

The recipient of the VR01, known as the Data Steward, will review the details and collaborate with the proposer and other colleagues as necessary to ensure that all required information has been provided. It is important to note that while the template is designed to provide sufficient information for a request to be raised, in some cases the Data Steward may need to gather additional or supplementary information. The validation type for the Data Quality Rule will be classified as either Data Integrity or Quality Rule.

There are two validation types:

Data Integrity (DI) – refers to a technical validation, these rules are checking to see if the data can be loaded into the database, additionally if the data that is expected is available and received at the correct time.

Quality Rules (QR) – refers to a business validation, these rules are checking to see if the data results across different periods are consistent with expected results, and if the data is consistent across source systems.

The Data Steward will add the validation rule (DI/QR) to GitHub and the SQL logic will be peer reviewed by a member of the Data Team before it is pushed to production. A copy of the VR01 will be filed in the appropriate sub folder within the Data Governance (Validation Rule request) folder.

Requests for changes to an existing Validation Rule can also be submitted to the Data Steward, please ensure to reference the QR/DI validation name (see naming convention). The Data Steward will also capture the amendments to each rule within the revision history of the original VR01 [8, 9].

The Validation Rules in each semantic layer follow a common naming convention, which is captured in the Validation Name field. Quality Rules are formatted as 'QR_Semantic layer_Metric/description', for example, 'QR_Finance_Rides'. Rules that are considered a Data Integrity check are formatted as 'DI_Semantic layer_Metric'.

This format allows the rules to be displayed for each semantic layer within a single validation rules confluence page. Users benefit from having all validation rules for a specific semantic layer available on a single page.

Validation rules not related to a semantic layer and managed by the Data Team follow the format 'DI_SourceTable_description', such as DI_factoffersrex_nocancellations.

As described in Figure 2 alerts overview process consists of four steps:

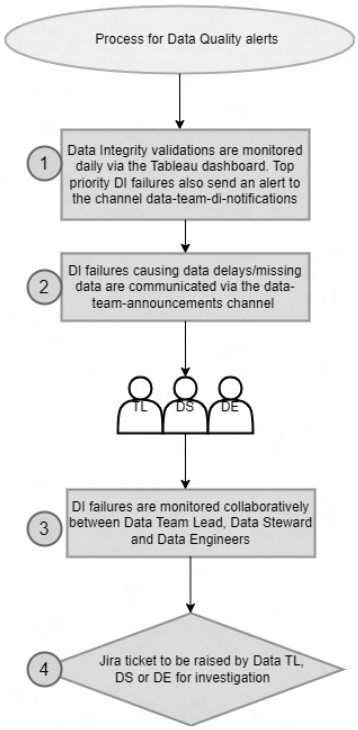


Fig. 2. Process for managing Data quality alerts

1. The Data Steward monitors alerts for Data Quality and Data Integrity through a Tableau dashboard. Top priority alerts for Data Integrity failures are also sent to dedicated Slack channel.

2. The Data Team Lead and Data Engineers will mostly monitor and manage top priority DI alerts that are not within the data stewardship ETL. The Data Steward will mostly manage top priority failures related to data stewardship. Any top priority failures that cause data delays or missing data will be communicated through the dedicated announcements channels.

3. The Data Steward will primarily monitor DI failures that are not top priority. However, during sick absences or vacations, the Data Team will monitor DI failures collaboratively.

4. A Jira ticket will be raised for any Data Integrity failures. In the case of Top priority DI failures outside of data stewardship ETL, the Jira ticket will be raised by the Data Team Lead or Data Engineer. For all other levels of severity and top priority data stewardship DI rules, the Data Steward will raise a Jira ticket.

The Service Level Agreement (SLA) specifies the timeframe for the Data Steward and Domain Owner to investigate a failed QR alert. Please note that the SLA does not cover the resolution or fix of the issue. The resolution or fix are not included within the definitions below:

- Top priority – 1 day when alert triggered.
- High – 2–3 days from when alert triggered.
- Medium – 5 days from when alert triggered.
- Low – 7 days from when alert triggered.

The unique contribution to the mechanism are the two database objects, containing the execution details of each rule. The table DI_ALERTS_TBL (***ID*** INTEGER, ***VALIDATION_NAME*** VARCHAR, ***VALIDATION_DESCRIPTION*** VARCHAR, ***QUERY_FOR_ACTUAL*** VARCHAR, ***QUERY_FOR_EXPECTED*** VARCHAR, ***ACTUAL*** DECIMAL, ***EXPECTED*** DECIMAL, ***THRESHOLD*** DECIMAL, ***IS_SUCCESS*** INT, ***AUTHOR*** VARCHAR, ***EXECUTION_DATE*** DATE), which stores the full information, plus historical data and the view DI_ALERTS_LAST_EXECUTION_V (***ID*** INTEGER, ***VALIDATION_NAME*** VARCHAR, ***VALIDATION_DESCRIPTION*** VARCHAR, ***QUERY_FOR_ACTUAL*** VARCHAR, ***QUERY_FOR_EXPECTED*** VARCHAR, ***ACTUAL*** DECIMAL, ***EXPECTED*** DECIMAL, ***THRESHOLD*** DECIMAL, ***IS_SUCCESS*** INT, ***AUTHOR*** VARCHAR), which holds data about the latest executed validations are the representation of the custom validation rule template in the DI mechanism itself. This provides the users with high flexibility in creating their own data integration checks and testing the business rules in an easy way.

Finally, we need to have in mind that all the DI validation failure or successes will be visualized in a specific Tableau dashboard, based on the table and view data, which we have previously transformed and processed.

5. Conclusion and future developments. The relationship between the Extract, Transform, Load (ETL) process and data quality is crucial in modern data management. ETL facilitates the movement of data and enhances data quality through meticulous extraction, thoughtful transformation, and precise loading. The processes are interconnected to enable organizations to obtain useful insights from reliable, consistent, and

accurate data, which promotes informed decision-making and strategic initiatives.

The ETL process acts as a guardian of data quality by incorporating cleansing, standardization, enrichment, and validation mechanisms to address discrepancies and fortify datasets against inaccuracies. The combination of ETL and data quality ensures the accuracy of information in data warehouses and supports strong analytics, business intelligence, and reporting. [9]

The current research approach provides custom mechanism from the perspective of enriching some existing techniques with uniquely designed attributes. The validation rule templates supply the users with the ability to set and create the rules in an flexible innovative way, which makes the requirements clear and depicts the desired outcome in an understandable way. The two tables, created specifically for the validation process hold the data, visualized later in the Tableau dashboard, presenting the needed information to the stakeholders.

The evolution of ETL processes and their integration with data quality initiatives are set to advance continually. Future ETL solutions may become more automated in identifying and addressing data quality issues in real-time, using artificial intelligence and specifically the newly occurring and quickly evolving LLMs and Generative Pre-trained Transformers. ETL processes are expected to become more dynamic and adaptive, adjusting transformations based on real-time insights into data quality. This will enable organizations to proactively manage and enhance data quality as conditions change.

Organizations are expected to see increased integration between ETL tools and specialized data quality platforms. This integration enables organizations to easily use advanced data quality features in their ETL workflows. Metadata management in ETL processes will become more sophisticated, providing comprehensive insights into the quality and lineage of data. Advanced metadata capabilities can help to make data quality management more transparent and traceable. ETL processes are likely to play a more important role in supporting data governance and compliance initiatives. Integrating with governance frameworks will ensure that data quality measures align with regulatory requirements and organizational policies. As organizations deal with increasing amounts of data, ETL solutions will need to adapt to handle diverse data sources while maintaining high data quality standards in dynamic environments.

In conclusion, ETL processes and data quality are continuously refined and innovated. As technology advances and the data landscape evolves, organizations can anticipate a future where ETL becomes an even more intelligent, adaptive, and integral part of their data management strategies, contributing to the ongoing pursuit of high-quality, actionable data.

REFERENCES

[1] W. H. Inmon. Building the Data Warehouse, 4th edn. Wiley India Pvt. Limited, 2005. ISBN 9788126506453.

[2] R. Kimball, M. Ross. The Data Warehouse Toolkit: The Complete Guide to Dimensional Modeling. 3rd edn. Indianapolis, John Wiley & Sons, Inc., 2013, ISBN 9780471153375.

[3] B. Moses, L. Gavish, M. Vorwerck. Data Quality Fundamentals. O'Reilly Media, Inc., 2022, ISBN 9781098112011.

[4] J. Reis, M. Housley. Fundamentals of Data Engineering: Plan and Build Robust Data Systems. O'Reilly Media, Inc., 2022. ISBN 9781098108304.

[5] Q. Liu, G. Feng, G. K. Tayi, J. Tian.. Managing Data Quality of the Data Warehouse: A Chance-Constrained Programming Approach. *Inf. Syst. Front.* **23** (2021), 375–389, https://doi.org/10.1007/s10796-019-09963-5.

[6] M. R. Sureddy, P. Yallamula. Data Quality Architecture for Data Warehouses. *International Journal of Research Culture Society*, **4**, no. 6 (2020), 95–100, DOIs:10.2017/IJRCS.2456.6683/202006017.

[7] A. Fattah, T. Ridwan, N. Sulistiyowati. Dimensional Data Design for Event Feedback Data Warehouse. *JISA (Jurnal Informatika dan Sains)*, **6**, no. 1 (2023) 69–73. https://doi.org/10.31326/jisa.v6i1.1648.

[8] H. Benkhaled, D. Berrabah, F. Boufarès. Data Warehouses and Big Data: How to Cope With Data Quality. *International Journal of Organizational and Collective Intelligence (IJOCI)*, 10, no. 3 (2020), 13 pp, https://doi.org/10.4018/IJOCI.2020070101.

[9] N. Gupta. Optimising data quality of a data warehouse using data purgation process. International Journal of Data Mining, Modelling and Management. 15, no. 1 (2023), 102–131, https://doi.org/10.1504/IJDMMM.2023.10055198.

[10] M. Altendeitering, T. Guggenberger. Data Quality Tools: Towards a Software Reference Architecture. Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS), 2024.

[11] https://www.techtarget.com/searchdatamanagement/tip/Top-data-quality-management-tools (Last visited 23.12.2023)

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

DESIGN PATTERNS OVER SOLID AND GRASP PRINCIPLES IN REAL PROJECTS*

Daniel Damyanov[1], Atanas Hristov[2], Zlatko Varbanov[3]
Department of Information Technologies,
"St. Cyril and St. Metodius" University of Veliko Tarnovo, Bulgaria
e-mails: [1]d.damyanov@ts.uni-vt.bg, [2]S1909012126@sd.uni-vt.bg,
[3]zl.varbanov@ts.uni-vt.bg

Design patterns (models) are repeatable and reusable constructions and solutions for common situations and problems to improve the quality of software systems. SOLID and GRASP are sets of design principles that are used in object-oriented software development. In this work we consider these solutions and principles and compare their (possibly combined) usage in different cases.
Keywords: design patterns, SOLID, GRASP, object-oriented design.

ШАБЛОНИ ЗА СОФТУЕРЕН ДИЗАЙН СРЕЩУ ПРИНЦИПИТЕ НА SOLID И GRASP В РЕАЛНИ ПРОЕКТИ

Даниел Дамянов[2], Атанас Христов[2], Златко Върбанов[3]
Катедра Информационни технологии,
Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий", България
e-mails: [1]d.damyanov@ts.uni-vt.bg, [2]S1909012126@sd.uni-vt.bg,
[3]zl.varbanov@ts.uni-vt.bg

Шаблоните (моделите) за софтуерен дизайн са повтарящи се и многократно използвани конструкции и решения за често срещани ситуации и проблеми за подобряване на качеството на софтуерните системи. SOLID и GRASP са набори от принципи на проектиране, които се използват при разработка на обектно-ориентиран софтуер. В тази работа разглеждаме тези решения и принципи и сравняваме тяхното (евентуално комбинирано) използване в различни случаи.
Ключови думи: шаблони за софтуерен дизайн, SOLID, GRASP, обектно-ориентиран дизайн.

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.076-084
2020 Mathematics Subject Classification: 68N19, 68U35.

1. Introduction. Much of the teaching and research literature argues that (GoF – "Gang of Four") patterns [2] increase the quality of object-oriented code, suggesting that design patterns greatly improve the quality of the systems where they are applied. Application requirements and functionalities grows up rapidly and the need for a dynamically continuous process of searching and developing new products or services is of utmost importance for companies to maintain a competitive advantage over their rivals [7]. Design patterns are repeatable and reusable constructions and solutions for common situations and problems faced by software engineers during development. The specific thing about them is that they are not language-specific and are easily implemented across platforms or domains, they simply alleviate the complexity associated with the design, or reduce the risk of trying to apply new functionality to the code [8]. Design patterns are also called a group of best practices for common design problems encountered by software engineers who use object-oriented software development. The main purpose when using patterns is to alleviate the complexity of creating and integrating objects into the program code. Once implemented, it is assumed that it will be easier to maintain the software project, as they act as a template that can be applied in real-life problems.

2. Design patterns, SOLID and GRASP.

2.1. Design patterns. Usually, whenever a problem occurs during development, you should consider implementing patterns to achieve resolution of the current problem, as they are risk-free, well researched and proven to be a reliable way to solve the specific problem[1]. In addition, they are used when the solution applied in the current project is outdated and the use of design patterns improves and maintains usability and readability. Design models are not limited to problem solving or simplifying issues, they are derived from structural engineering. Using design patterns can facilitate communication and collaboration between team members, and can facilitate integration as they are well known, common, and easy to recognize.

- Problems in using patterns: The use of design patterns can cause design problems to occur; It is well known that good software design has "high cohesion and low coupling". There is an empirical study trying to investigate whether the use of design patterns increases the modularity of the class or not[2]. The experiment was done by analyzing 5 open-source Java projects against the use of 17 design patterns, the results are finally shocking. The strict application of patterns results in classes using design patterns being highly related and less cohesive compared to classes that do not use design patterns.
- Incorrect use of design patterns: People tend to study and understand the design model without recognizing and learning when to apply it. However, some studies, e.g. [6, 9], suggest that the use of the design models does not always lead to "good" designs.
- Ineffective problem addressing: It is well known that the use of design patterns aims to adopt standardized best practice for a common problem. Yet the common problems are not the same, but there is at least one thing in common, which is most often overworking.

[1] https://betterprogramming.pub/4-things-to-consider-when-applying-design-patterns-46b9fcee4a59

[2] Empirical insight into the context of design patterns: Modularity analysis – IEEE Conference Publication (2017). [online] Available at: `http://ieeexplore.ieee.org/document/7549474/?part=1`

- Great similarity between design patterns: Design models have been criticized by many authors; it turns out that the 23 defined models in the GoF book [2] share something in common and do not provide any significant difference from other types of abstractions. Their argument is based on the MVC model, which is a form of structural abstraction that was defined earlier than when the GoF book was written. Of the 23 design models, Peter Norvig[3] proves that 16 of them are either simplified or eliminated in some dynamic languages such as LISP.
- Systematization of the most common mistakes in their use [1]:
  – increasing the complexity of the application;
  – over-engineering;
  – learning them;
  – code nonadaptability;
  – sensitivity to context;
  – lack of creativity;
  – increased indirectionality.

2.2. SOLID and GRASP. SOLID[4] is a popular set of design principles that are used in object-oriented software development. SOLID is an acronym that stands for five key design principles: single responsibility principle, open-closed principle, Liskov substitution principle, interface segregation principle and dependency inversion principle. All five are commonly used by software engineers and provide some important benefits for developers. The principles of SOLID were developed by Robert S. Martin in the essay "Design Principles and Design Models"[5] and were systematized and summarized in [5], although the acronym was later coined by Michael Feathers (see [5], p.58). In his essay, Martin acknowledges that successful software will change and evolve. As it changes, it becomes more complex. Martin warns that without good design principles, software becomes rigid, brittle, stationary and viscous. The principles of SOLID have been developed to combat these problematic design models. The overall objective of the SOLID principles is to reduce dependencies so that engineers modify one area of software without affecting others. By applying SOLID's principles, designers and developers can ensure that future updates are as painless as possible. The principles of SOLID are more supportive, scalable, tested and reusable.

The GRASP[6] (General Responsibility Assignment Software Principles) model include a set of principles and concepts that help in constructing applications using object-oriented programming. They list the responsibilities of classes and objects and are designed to make the code more flexible and extendable, making it easier to maintain [4]. GRASP is a set of exactly 9 software patterns for assigning general responsibility [3]. Assigning responsibilities to the site is one of the key skills of OOP. Every programmer and designer should be familiar with these models and, more importantly, know how to

[3]https://norvig.com/design-patterns/design-patterns.pdf

[4]Martin, Robert C. "Principles of OOD". ButUncleBob.com Archived from the original on Sep 10, 2014. Retrieved 2014-07-17

[5]Martin, Robert C. (2000),
`http://www.objectmentor.com/resources/articles/Principles\_and\_Patterns.pdf`

[6]Muhammad Umair (2018-02-26). "SOLID, GRASP, and Other Basic Principles of Object-Oriented Design"

apply them in their daily work (by the way, the same assumptions should apply to the principles of SOLID).

The main goal of software engineering is the development of appropriate software. SDLC (Systems development life cycle)[7] presents the steps of software engineering at the highest level. Software design is one of the steps of SLDC. Object-oriented software design is a popular approach of software design. To perform object-oriented software design there are many types of resources (in books, tutorials and documents) with different names such as: guidelines, principles, heuristics, models, styles, etc. The highest level is the basic principles, and the other levels are details that help to reach these basic principles. GoF are mentioned in Design Patterns. GRASP, in turn are design principles.

2.3. Design patterns vs. SOLID and GRASP. Design principles are general guidelines that can guide the class structure and the relationships between them. On the other hand, Design Patterns are proven solutions that solve frequently occurring problems. Most of the practical implementations of these design principles are primarily done using one or more design patterns. "Encapsulate what varies" considering fundamental design principles, this principle is contained in operation in almost all design models. If a component or module in the application has to be changed frequently, then it is good practice to separate that part of the code from the rest of the modules so that later on the part which varies can be extended or changed without affecting those which do not vary. Most design patterns such as Strategy, Adapter, Facade, Decorator, Observer, etc., follow this principle. At the same time, when using the patterns in large projects, especially at a stage when the application is working, implementing a pattern would be a real challenge, and usually not mandatory. The relationship between design patterns and SOLID principles is:

Design models and SOLID principles are not mutually exclusive. In fact, they often complement each other in software design. The SOLID principles provide guidance for designing individual classes and modules, while design patterns offer higher-level solutions for organizing classes and objects to solve common design problems.

SOLID principles help achieve the goals of modularity, extensibility and maintenance, while design models provide reusable solutions for more abstract design challenges. For example, the Strategy model can help with the Open-Closed (OCP) principle, as it allows easy change of algorithms or strategies without changing the existing codebase.

In practice, SOLID principles and design patterns can be used together to create well-designed, modular and flexible software systems.

2.4. Design analysis. In this section we look at real examples from the different approaches and make a comparative analysis. In order to reduce the volume of program code, we define the problem with short examples of code. Assume that a programmer has been given a task to create an application that must generate and change products and is saved in a log file for each operation performed. When considering the structure of the code, the programmer has started by saying that all products are actually separate components and each product must contain a list of its components, he will use the Composite pattern. Also, each item has a unique number that will be generated through the Singleton pattern. The product creation will use Factory Method to avoid tight cou-

[7] `https://ecampusontario.pressbooks.pub/informationsystemscdn/chapter/7-3-systems-development-life-cycle/`

pling in the implementation of services, and last but not least, to record every operation that happens, Observer will be used. For on-site storage purposes in the current article, we only show the UML diagram for the code to be executed in order to perform the corresponding operations (Figure 1):

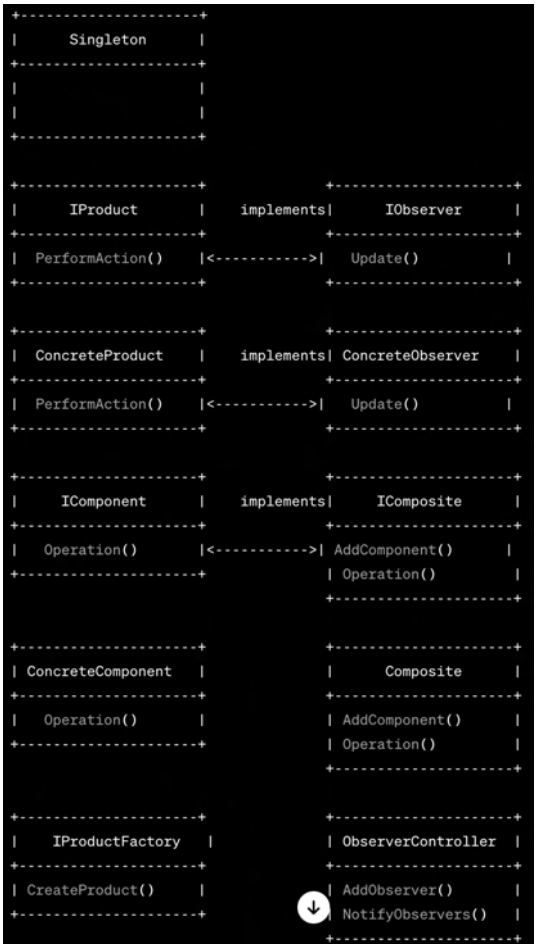


Fig. 1. Program implementing design patterns

The problem with this code is that different design patterns have been used without specific need and in a way that not only does not improve readability and code maintenance, but makes it extremely confused and difficult to understand. This example is indicative of how, with even a simple task, things can become too complicated right from the start. Instead of using design patterns to improve the structure and clarity of the code, they are added without meaning and create unnecessary complexity. This code is a good example of the fact that the use of design patterns should be considered and have a specific purpose. Cookies should not be added without taking into account the need for them and without striving for a clear and readable code. Otherwise, the code

becomes difficult to understand and maintain, losing the main meaning of using design paterns. Also, if you decide to change the code or add new functionality, it would be quite a complex task that will most likely take a long time. The probability that the code will cease to function according to the initial requirements is also not small. On the other hand, according to the same assignment, we can make the example only with the SOLID principles (Figure 2):

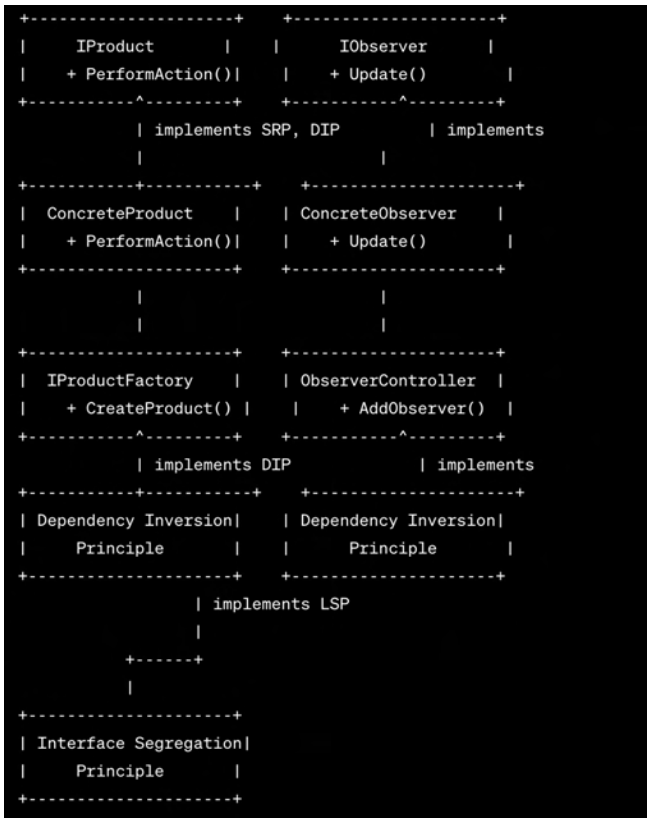


Fig. 2. UML of the application with SOLID principles

Changing the example shows several main advantages that are achieved when using the patterns:

Flexibility: For example, the Open/Closed Principle (OCP) promotes openness to expansion and closedness to change, making the system more flexible in adding new functionalities.

Maintainability: The Single Responsibility Principle (SRP) contributes to easier understanding and maintenance of classes, with each part of the system having clearly defined responsibility.

Testability: as the principles promote the separation of responsibilities and interfaces, which facilitates the isolation of components for testing.

Easy to Extend: principles such as OCP and LSP make the system more extensible

without requiring changes to existing code.

Low Coupling: SOLID promotes low inter-class dependence. This means that changes in one class will usually not necessitate changes in other classes, which reduces the risk of possible future problems.

Component Reusability: the creation of components that are easy to reuse is encouraged. This aspect facilitates the construction of more flexible and modular systems.

In the third example with GRASP the application has the following construction (Figure 3):

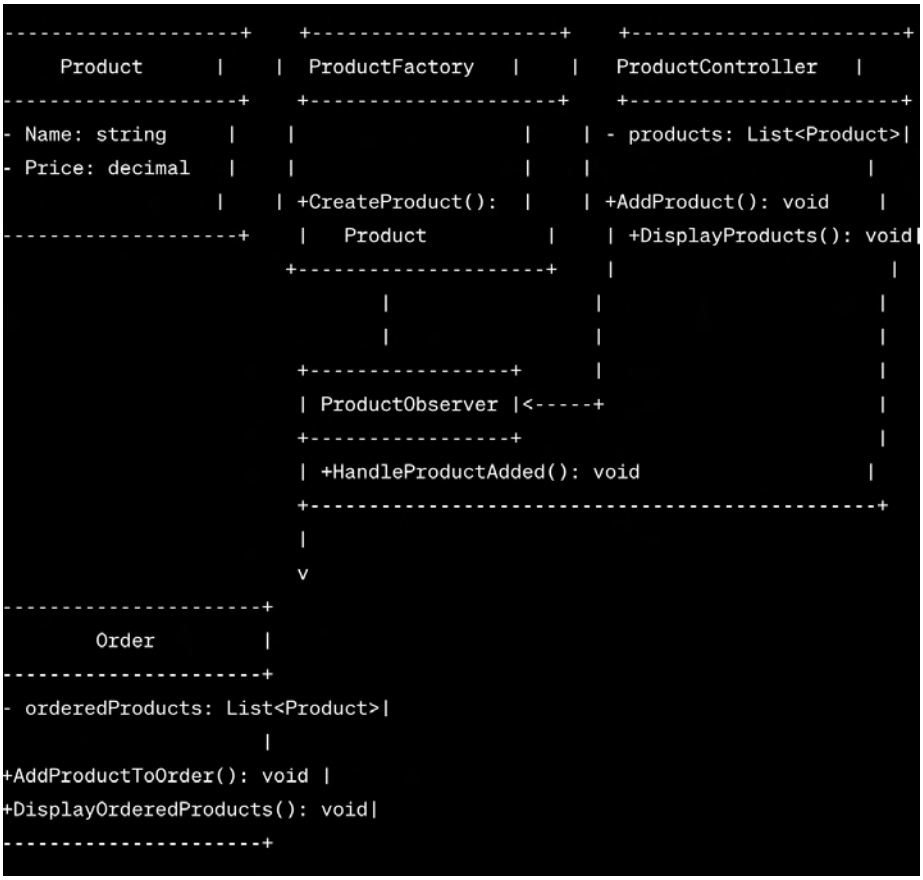


Fig. 3. GRASP UML diagram

The example shows a radically different picture than the design patterns. The structure is concentrated in the controller class, which takes care of the business logic of product operations. The creation of new instances is delegated to factors class that has the same purpose as that of the design patterns. The architecture of the application allows very easy addition of new dependencies, if necessary, respecting the "D" principle from SOLID. From the application made with GRASP principles, we can summarize several main advantages:

Simplification of design. This helps developers to get oriented and make design decisions easier.

Better maintenance. Objects that carry out their responsibilities clearly and effectively are easier to understand and maintain.

Code Reuse. Designing with GRASP can lead to fewer dependencies and less code-connected, making components more easily reusable. This can support the reuse of the code and speed up the development of new functionalities.

Greater flexibility. A well-defined code structure is encouraged, which makes the system more flexible for changes and addition of new functionalities. Principles such as "High Cohesion" and "Low Coupling" help to achieve this flexibility.

Easy testing. Code designed according to GRASP principles is usually easier to test. The individual components are well insulated, which facilitates the writing of tests and the execution of tests for each individual class or module.

Lower risk of errors. Common errors, such as excessive dependence or complex program logic, are avoided.

Also, we should note the shortcomings it entails, namely:

Lack of specifics. Some of the principles are more abstract, such as "Information Expert". This can lead to interpretations and difficulties in specifying these principles in concrete scenarios.

It does not deal with complex aspects. GRASP does not provide specific solutions for complex architectural problems such as parallelism, competitiveness or security.

Insufficient for larger projects. For larger and more complex projects that require more advanced architectural concepts and techniques, GRASP may proves to be insufficient. In these cases, other principles and practices such as SOLID principles, design templates and architectural patterns become more appropriate.

Doesn't solve all problems. GRASP is not a one-size-fits-all solution for all software design problems. It provides basic principles but does not solve all aspects of design.

Generally speaking, GRASP is a useful set of principles that can help in creating well-designed and easy-to-maintain software code. However, the best benefit is achieved when GRASP principles are combined with other software design principles and practices, such as SOLID, Design Patterns, and others. However, it is important to note that SOLID and templates are not opposing concepts, but are principles and methodologies for improving the quality and maintenance of software code. You can get a very good synergy between SOLID and Design Templates: SOLID principles and design templates often interact. For example, Strategy Pattern can help comply with the OCP principle. In turn, GRASP helps create readable, easy-to-understand code by assigning responsibilities to the appropriate classes. The principles of SOLID (Single Responsibility, Open/Closed, Liskov Substitution, Interface Segregation, Dependency Inversion) and templates (such as GRASP – General Responsibility Assignment Software Patterns) are different approaches to software design. Instead of being mutually exclusive, they can be combined and used together to achieve better structure and support for software code. It is always desirable that programmers do not focus and implement absolutely everything in a given concept just to satisfy all its requirements, but to try to find the optimal option for a combination of several approaches that work in sync and achieve the initially set goals.

3. Conclusion. Skillful management of responsibilities in software development is the key to creating quality architecture and code. In combination with other models and practices, it is possible to develop well-crafted systems that are adaptable and easy to change. When approaching software design, it is useful to apply the SOLID and GRASP principles as a basis for creating well-structured classes and modules. These principles help to achieve good design practices and maintain code quality. However, design models can be used to address higher-level design challenges, such as managing complex interactions, separating components, or processing specific scenarios.

Using the principles of SOLID and GRASP ensures that individual classes adhere to good design practices. Then, when appropriate, design patterns can also be added to efficiently structure classes and objects and solve specific design challenges. It is worth noting that the application of design patterns should be guided by the specific requirements and context of the developed project. Not all design patterns are applicable in every situation, and it is important to take into account the compromises, complexity and suitability of the model before implementing them.

In summary, both SOLID/GRASP principles and design patterns play an important role in software design. SOLID/GRASP principles guide the design of individual classes and modules, while design models provide higher-level solutions to recurring design challenges. By understanding and applying both patterns and both approaches effectively, well-designed, modular, and flexible software systems can be developed.

REFERENCES

[1] W. Brown, R. Malveau, H. McCormick, T. Mowbray. AntiPatterns: Refactoring Software, Architectures, and Projects in Crisis. Wiley Press, 1998.

[2] E. Gamma, R. Helm, R. Johnson, J. Vlissides. Design Patterns – Elements of Reusable Object-Oriented Software", 1st edn. Addison-Wesley, 1994.

[3] C. Larman. Applying UML and Patterns: An Introduction to Object-Oriented Analysis and Design and the Unified Process, 2nd edn. Prentice Hall, 2001.

[4] R. Martin. Agile Software Development, Principles, Patterns, and Practices. Prentice Hall, 2003

[5] R. Martin. Clean Architecture: A Craftsman's Guide to Software Structure and Design, 1st edn. Robert C. Martin Series, 2017

[6] W. McNatt, J. Bieman. Coupling of design patterns: Common practices and their benefits. In: Proceedings of the 25th Computer Software and Applications Conference, IEEE Computer Society Press, 2001, 574–579.

[7] T. Stefanov, S. Varbanova, M. Stefanova, I. Ivanov. CRM System as a Necessary Tool for Managing Commercial and Production Processes. *TEM Journal*, **12**, Issue 2 (2023), 785–797

[8] B. Venners. How to use design pattern. A Conversation with Erich Gamma, part I, May 2005 (available online at `https://www.immagic.com/eLibrary/archives/general/artimaus/A050628V.pdf`)

[9] P. Wendor. Assessment of design patterns during software reengineering: Lessons learned from a large commercial project. In: Proceedings of 5th Conference on Software Maintenance and Reengineering, IEEE Computer Society Press, 2001, 77–84.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

SENTIMENT ANALYSIS AND CHANGE: A CASE STUDY OF EVALUATING USER PERCEPTIONS DURING INTERNATIONAL COMPANIES' REBRANDING*

Anastasiia Medvedenko[1], Ekaterina Gruzova[2], Svetlana Gaivoronskaya[3], Snezhana Besolova[4], Milena Dobreva[5], Krassimira Ivanova[6]

[1,2,3,4]ITMO University, St. Petersburg, Russia
e-mails: [1]asya.medvedenko@gmail.com, [2]gruzovae@gmail.com, [3]nordensvetra@gmail.com, [4]snejan.besolova@yandex.ru

[5,6]Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria
e-mails: [5]milena.dobreva@gmail.com, [6]kivanova@math.bas.bg

The article presents a sentiment analysis of the process of rebranding international companies in Russia following their withdrawal from the local market after 24.02.2022. The comparative analysis of social media content related to two pairs of companies (McDonald's / Vkusno I Tochka; Zara / Maag) showed different patterns of users' sentiments about the change. This is a pioneering attempt to explore to what extent social media analysis methods and tools can shed light on rebranding processes. This research demonstrates the potential for conducting such types of studies, but also to highlight the still existing imperfections in terms of sentence-level opinion assessment, especially in non-English texts.

Keywords: Data Mining, Sentiment Analysis, Twitter, RapidMiner, PhantomBuster, Python

ИЗВЛИЧАНЕ НА МНЕНИЯ И ЧУВСТВА ПО ВРЕМЕ НА ПРОМЕНИ: ПРОУЧВАНЕ НА ПОТРЕБИТЕЛСКИТЕ ВЪЗПРИЯТИЯ ПРИ РЕБРАНДИРАНЕТО НА МЕЖДУНАРОДНИ КОМПАНИИ

Анастасия Медведенко[1], Екатерина Грузова[2], Светлана Гайворонская[3], Снежана Бесолова[4], Милена Добрева[5], Красимира Иванова[6]

[1,2,3,4]ИТМО университет, Санкт Петербург, Русия
e-mails: [1]asya.medvedenko@gmail.com, [2]gruzovae@gmail.com, [3]nordensvetra@gmail.com, [4]snejan.besolova@yandex.ru

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.085-091
The research was inspired by the course *Cultural Data Mining and Visualization* within the master's program *Digital Methods in Humanities/Digital Humanities* at the DH-Center of ITMO University.
2020 Mathematics Subject Classification: 68T50.

[5,6]Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mails: [5]milena.dobreva@gmail.com, [6]kivanova@math.bas.bg

Статията представя приложение на методите за проучване на мнения и чувства на потребителите, приложени към процеса на ребрандиране на международни компании в Русия след оттеглянето им след събитията на 24 февруари 2022. Направеният примерен сравнителен анализ на две двойки компании (McDonald's/Вкусно и точка; Zara/Maag) показва различна реакция на потребителите относно промяната. Това е пионерски опит да се проучи до каква степен методите и инструментите за анализ на социалните медии могат да хвърлят светлина върху процесите на ребрандиране. Проучването цели да демонстрира потенциала на съществуващите методи и средства за анализ на съдържание от социални методи при процеси на ребрандиране, но също така да открои все още съществуващите несъвършенства по отношение на оценката на мненията на ниво изречение, особено в текстове, които не са на английски език.
Ключови думи: извличане на данни, анализ на мнения и чувства, Twitter, RapidMiner, PhantomBuster, Python

1. Introduction. In recent years, the development of Natural Language Processing (NLP) has reached sufficient maturity to move from the research stage of technology development to widespread use in practice. One commonly applied NLP technique is sentiment analysis, also known as opinion mining. It is used to determine and extract meaningful insights from sentiment data. Essentially, sentiment analysis involves using computational methods and algorithms to analyse and quantify subjective information within textual data, allowing businesses, organisations, and researchers to gain insight into public opinion, customer feedback, or overall sentiment around specific topics, products, brands, or events. This information can be valuable for making data-driven decisions, monitoring public perception, and understanding consumer sentiment in various contexts, such as marketing, customer service, and social media monitoring.

Our first objective is to investigate the possibilities of applying sentiment analysis to assess people's attitude change during a rebranding process by exploring opinions expressed on the social media platform Twitter. For this purpose, we examine the users' perception of two rebranded companies in Russia following the events of 24.02.2022.

There are several techniques applied to sentiment analysis. Lexicon-based methods use the sentiment polarity of the words to calculate the sentiment score of the text on the base of the presence of these words in the text. Machine and deep learning approaches involve training models on labelled datasets to classify text into different sentiment categories. Aspect-based sentiment analysis focuses on identifying the sentiment associated with specific aspects or features mentioned in the text, especially in product reviews or social media posts. Old-fashioned rule-based techniques involve defining a set of rules or patterns to identify sentiment expressions in the text. Semantic analysis aims to understand the meaning and context of text by analysing the relationships between words and phrases [20]. However, research in this area still mainly focuses on building systems and resources using the English language. There is a growing set of research on non-English texts, but it continues to lag in its development into tools for widespread use by non-specialists [3, 7].

Our second objective is to study the level the readiness of the tools that can be used to conduct sentiment analysis, especially on non-English informal texts.

The paper is organised as follows: Section 2 introduces the problem statement and hypotheses; Section 3 describes the methodology; Section 4 explains how the data was collected and preprocessed; Section 5 is dedicated to the Python-based analysis and the manual postprocessing of the data; Section 6 presents the results; the final section explores future research directions.

2. Background. Due to the events of 24.02.2022 and the following turmoil, according to the World Bank Group, 150 multinational companies have announced complete withdrawals, while a further 250-plus have suspended operations in the Russian Federation. The withdrawal has been the subject of research for more than a year [5]. Following the withdrawal and suspension of businesses, certain companies announced selling their assets to franchisee companies or local entrepreneurs, which had their businesses reopened and rebranded. For example, Zara stores in Russia have been transitioned to the Daher group and reopened under the name Maag; meanwhile, McDonald's was sold to a Russian franchisee Alexander Govor who rebranded the business as Vkusno I Tochka.

The withdrawal and the rebranding of companies are widely discussed on social media. Moreover, several studies have been conducted on users' responses to the events [4, 19]. Due to the acuteness of the issue, Twitter released an official statement where the board of directors announced the stiffening of the platform's policies to protect its audience [9]. Twitter (currently X) was a growing social media platform as it allowed people to share and express their opinions and post messages with little censorship, mostly related to suspending accounts of questionable content [16]. How Elon Musk's management has affected the platform has yet to be researched, but as of May 2022, when the investigation and analysis were primarily conducted, there were no quantitative restrictions on providing content. Despite being officially blocked in Russia, Twitter remained relatively popular, with over 700,000 officially registered Russian users [8].

Our study focuses on the information behaviour aspects related to this process, and more specifically on the change of attitudes to the rebranded entities compared to their 'maternal companies'. Our initial hypothesis is that the attitude has significantly worsened with the number of tweets rising. In addition, we aim to verify whether modern Python-based data analysis models can assess attitudes to a specific object of discussion despite the general tone of discussion being different (i.e., the subject complains about being unable to obtain a certain item which they like – in this case, the attitude to the object is positive while the tone of the statement is negative).

3. Methodology. In this study, we apply various techniques and methods of social media data analysis. The data collection was done via low-code tools such as RapidMiner, a data mining desktop application, and PhantomBuster, a cloud-based data extraction software. This allowed us to access a greater source of posts in comparison to other methods. The next stage in the data processing is preprocessing and data cleansing. A quantitative analysis step follows, using an algorithm written in Python and based on its Hugging Face library (RuBERT-RuSentiTweet model). Then, the postprocessed data is manually verified and validated to ensure the correctness of the Python code and alignment with our research goals. Finally, the comparative method is applied by considering the differences and fluctuations in attitudes to the original brands and their

rebranded counterparts. The analysis is illustrated by visualization of the data in Tableau Public online.

4. Collecting and Preprocessing Data. We decided to limit the timeframes applied to the study for each pair of companies; this would allow comparing the rebranded entities with their original counterparts (Maag/Zara; Vkusno I Tochka/McDonald's). We chose the year 2019 (01.01.2019–31.12.2019) for both Zara and McDonald's. Among the major reasons justifying the choice are several factors: first, that was a pre-pandemic year when physical mobility to enter public spaces was not restricted; and second, that was a period before the withdrawal of companies. While Vkusno I Tochka was reopened in June 2022, the first Maag shop in Russia was established only by the end of April 2023. To provide an objective analysis, we decided to collect tweets related to either entity published by Russian-speaking users between 27.04.2023 and 27.05.2023.

As the data collection tool, we initially experimented with RapidMiner [15], a free tool from the Technical University of Dortmund, which provides a convenient environment for data collection and knowledge extraction. Although generally fast and efficient, RapidMiner was unable to collect tweets published later than one week due to Twitter's official policy regarding access to archived posts by external tools [18]. An additional data collection method was selected to address the limitations of RapidMiner. PhantomBuster was chosen as an alternative to RapidMiner. The cloud software was initially designed for marketing purposes but is applicable in other research works and helps to scrape the data from different social media, including Twitter in a formatted way [13]. It limits the number of attempts at collecting data which requires each participant of the group to get involved in data mining. The collected data is kept in a temporary storage and can be uploaded as a CSV or JSON document.

We performed a manual preprocessing and cleansing of the data based on the following criteria:

Tweets typed in the Cyrillic alphabet but not in the Russian language were excluded;

Tweets in Russian but by a person who is not a Russian Federation resident were excluded. Immigrants of Russian citizenship (including those who left the country after 24.02.2022) are to be the exception to the rule.

Context advertisements of items unrelated to the study's topic (i.e., homonyms) were excluded.

Verification of the users was conducted by investigating their accounts. After the preprocessing, the number of tweets decreased to 542. 119 of them were related to Maag (April-May 2023), 129 to Vkusno I Tochka (April-May 2023), and 294 were divided between Zara and McDonald's (97 and 197, respectively). We have shared the dataset providing a link to it in the given paper [11].

5. Python-algorithm Application and Postprocessing of the Dataset. The major data-processing algorithm applied to the prepared dataset is a RuBERT-RuSentiTweet model from the Hugging Face library. The model was initially developed to provide Tone and Sentiment Analysis for posts written in Russian and extracted from Twitter [6]. The method's choice was justified by the fact that similar libraries and models developed for the analysis of English tweets could not provide adequate results since both languages are grammatically, semantically, and syntactically different. We needed to download and install certain libraries and models, such as Transformers, Pandas, and Hugging Face

(RuBERT-RuSentiTweet model). Before conducting the sentiment analysis, it was vital to establish a new data frame, indicate classes, define additional functions, and assign the right columns to the classifier.

The RuBERT-RuSentiTweet model and Russian Toxicity Classifier were applied to the dataset. The Python-based algorithm provided the following assessment categories: *'label'* (positive/ neutral/negative), which identified the general perception and attitude of a tweet, *'score'* (floating number), *'label_toxic'* (toxic/neutral), which classified each tweet either as toxic or neutral, and *'score_toxic'* (floating number). After summarising the results of Python processing, we decided to focus on the 'label' and 'score' since the expressed general attitude of a tweet author was more related to the subject of research. The code file is accessible online [10].

Since one of our major concerns was the ability of the RuBERT-RuSentiTweet model to assess attitude toward the specific object of discussion despite the general tone of a post being different, postprocessing was a vital procedure to perform before proceeding to the visualisation and the analysis stages. We made an independent evaluation of each of the tweets, which we compared with the results of the algorithm. It was found that 259 out of 542 tweets were incorrectly classified ($\sim 47.8\%$), a significantly high number caused by the inability of the algorithm to extract a subject of assessment, or a named entity in our case. For instance, in one of the Vkusno I Tochka segments, a user expressed their appreciation of a cafe: 'Самый вкусный на ВДНХ в МСК, недалеко от центральной аллеи. Вкусно и точка.' (translation: 'The most delicious at VDNH in MSK, the one not far from the central alley. Vkusno I Tochka.'). However, the model recognized it as a 'negative' statement. In some instances, the algorithm was unable to identify a sarcastic notion, marking it as 'positive': 'Врум! Врум! Это бздит твой ЖКТ после Вкусно и Точка' (translation: 'Vroom! Vroom! This is your GI tract rumbling after Vkusno I Tochka').

6. Analysis of the Results. Analysis was conducted relying on the visualisation of the data arranged in Tableau Public online service represented in charts available in the public domain [12].

McDonald's (2019) and Vkusno I Tochka. The analysis of the two companies which have larger shares of tweets both in 2019 and 2023, McDonald's and Vkusno I Tochka showed the following. The biggest share of tweets related to McDonald's are neutral in sentiment (44%) prevailing over both positive (33%) and negative (23%) ones separately. Similarly, for Vkusno I Tochka, its neutral score (68%) prevails over both positive (13%) and negative (19%). We can conclude that most people viewed the companies in a rather neutral way both in 2019 and 2023. However, the newer company, Vkusno I Tochka attracts more apathy and indifference. This needs to be explored further, possibly applying some qualitative research. In addition, the counterpart's shares of positive and negative assessments differ. In the case of McDonald's, positive opinions are prevalent; as for Vkusno I Tochka, the negative evaluation is higher.

Zara (2019) and Maag. Neutral sentiments towards Zara (39%) prevails over both positive (30%) and negative (31%). The shares of negative and positive evaluations are nearly equal. In the case of Maag, its neutral score also prevails over both positive (8%) and negative (29%) summarised (63% vs. 37%). It should be mentioned as well that the share of negative tweets is considerably larger in comparison to positive tweets.

The analysis of Zara and Maag shows different patterns. We might dispute whether Zara was predominantly seen in a neutral light or not, whereas the prevalence of a neutral attitude towards Maag is indisputable. The general trends evidence an increase in both neutral and negative estimates accompanied by a decrease in positive sentiments. Overall, the data evidence suggests that Maag's rebranding disengaged certain customers.

7. Conclusions and Further Research. The results of this study showed that the computer science methods and tools applied for sentiment analysis at that moment need to be improved. Currently, they lack the ability to identify named entities in text (i.e. tweets) written in Russian and evaluate the attitude to them. Before developing a new sentiment-analysis model (or, to be more specific, a Python library based on a new model), we need to advance the existing model since it is capable of providing a general assessment of a statement: among the options we are considering at the moment is the implementation of a loop which identifies and separates named entities, recognises and analyses words and expressions which characterise the entity, and provides the result as a set of attributes where each recognised entity is assessed.

The hypothesis of our research related to the information behaviour of users following companies' rebranding was that the attitude to the rebranded companies has worsened in comparison to the original ones. The above analysis shows that this statement is partly true: we registered both growth of neutral responses and a decrease in positive attitudes in cases of both pairs of companies. The differences across the pairs suggest that a wider study involving more brands would refine the information behaviour patterns. Identifying the reasons behind these different behaviours is an exciting domain for larger exploration. In addition, we could explore other environments with changes in brands.

In addition, there are issues, such as changes in the Twitter/X policy regarding the number of tweets allowed per day, which might compromise the study's credibility in the future unless such limitations are properly handled. Finally, a notable domain of growing exploration is the responsibility of social media platforms in maintaining accounts and dealing with content within the context of the Code of Practice in Disinformation of the European Commission.

Acknowledgements. We thank Karina Agafonova (ITMO) for her invaluable assistance in the study.

REFERENCES

[1] R. Churikov. Russian Clothing Brands Plug Gap Left by Western Rivals, Reuters, June 2023, https://www.reuters.com/business/retail-consumer/russian-clothing-brands-plug-gap-left-by-western-rivals-2023-05-31/.

[2] S. Evenett, N. Pisani. Less than Nine Percent of Western Firms Have Divested from Russia, Social Science Research Network, December 2022, https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4322502.

[3] F. Ferdiana, R. Djatmiko, M. Faris. A Review of Sentiment Analysis for Non-English Language. 2019 Int. Conf. of Artificial Intelligence and Information Technology, Yogyakarta, Indonesia, pp. 448-451, 2019. https://doi.org/10.1109/ICAIIT.2019.8834552.

[4] M. B Garcia, A. Cunanan. Public Sentiment and Emotion Analyses of Twitter Data on the 2022 Russian Invasion of Ukraine, 9th Int. Conf. on Information Technology, Com-

puter, and Electrical Engineering, Semarang, Indonesia, 2022, https://doi.org/10.1109/ICITACEE55701.2022.9924136

[5] J. D.Guénette et al., Implications of the War in Ukraine for the Global Economy, World Bank Grou, EFI Policy Note 3, 6-11 April 2022. https://thedocs.worldbank.org/en/doc/5d903e848db1d1b83e0ec8f744e55570-0350012021/related/Implications-of-the-War-in-Ukraine-for-the-Global-Economy.pdf.

[6] Hugging Face library, RuBERT-RuSentiTweet, https://huggingface.co/sismetanin/rubert-rusentitweet.

[7] M. Kaity, V. Balakrishnan. Sentiment Lexicons and non-English Languages: a Survey. *Knowledge and Information Systems*, **62** (2020), 4445–4480, https://doi.org/10.1007/s10115-020-01497-6.

[8] S. Kemp. Digital 2023: the Russian Federation, DataReportal, February 2023, https://datareportal.com/reports/digital-2023-russian-federation#~:text=Twitter%20users%20in%20the%20Russian,total%20population%20at%20the%20time.

[9] S. McSweeney. Our Ongoing Approach to the War in Ukraine, Twitter Blog, March 2022, https://blog.twitter.com/en_us/topics/company/2022/our-ongoing-approach-to-the-war-in-ukraine.

[10] A. Medvedenko, E. Gruzova, S., Rogovtsova, S. Besolova. Project code, https://colab.research.google.com/drive/1I7eixZp3EGqjvXF1x6sbwXVtae8fcYW6?usp=sharing.

[11] A. Medvedenko, E. Gruzova, S., Rogovtsova, S. Besolova. The collected dataset, https://docs.google.com/spreadsheets/d/1VJ-K53pWMoZhhszfh10drVqut4iGKCvVxILlftaflOQ/edit?usp=sharing.

[12] A. Medvedenko, E. Gruzova, S., Rogovtsova, S. Besolova. The visualization charts of the dataset, https://public.tableau.com/app/profile/snezhana.besolova/viz/tone_analysis/2023.

[13] PhantomBuster, a cloud software data collecting tool, https://phantombuster.com/.

[14] O. Popova. Russia's McDonald's Heir Growing Quickly, in for the Long Haul, Reuters, June 2023, https://www.reuters.com/business/retail-consumer/russias-mcdonalds-heir-growing-quickly-long-haul-2023-06-05/.

[15] RapidMiner, enterprise-ready data science platform, https://rapidminer.com/.

[16] N. S. Reyna et al., Twitter: More than Tweets for Undergraduate Student Researchers. *Journal of Microbiology & Biology Education*, **23**, no. 1 (2022), e00326-21, https://doi.org/10.1128/jmbe.00326-21.

[17] J. A. Sonnenfeld et al. The Russian Business Retreat – How the Ratings Measured Up One Year Later, YSM and KSE, 2023. https://kse.ua/wp-content/uploads/2023/02/paper-on-leave-Russia-project.pdf.

[18] Twitter Helper Center, https://help.twitter.com/en/using-twitter/missing-tweets.

[19] P. Vyas et al. RUemo – The Classification Framework for Russia-Ukraine War-Related Societal Emotions on Twitter through Machine Learning. *Algorithms*, **16**, no. 2 (2023), 69, https://doi.org/10.3390/a16020069,

[20] M. Wankhade, A. C. S. Rao, C. Kulkarni. A Survey on Sentiment Analysis Methods, Applications, and Challenges. *Artificial Intelligence Review*, **55** (2022), 5731-5780, https://doi.org/10.1007/s10462-022-10144-1.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

A PILOT CONCEPTUALISATION OF THE DATA SPACE ECOSYSTEMS FOR CULTURAL HERITAGE*

Kalina Sotirova-Valkova

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
e-mail: kalina@math.bas.bg

The digital heritage sector is among the nine common European data spaces outlined in *the EU Data Act*: Health, Industrial, Agriculture, Finance, Mobility, Green Deal, Energy, Public Administration, and Skills. *The data space* concept is complex, and being linked with the *data ecosystem* brings together methodologies and techniques from numerous domains: artificial intelligence (AI), text/data mining, data visualisation, mapping, image analysis, audio analysis, network analysis, and rights management. There is a need for clarifying data terminology in use for the GLAM field and transferable methodology to strengthen its' ongoing datafication and digital skill set. The paper offers a comprehensive literature review (incl. EU Data (space) policy documents) on *data spaces* and *data ecosystems* aimed at (1) formulating the main challenges in data collection, data processing, and data maturity for heritage-related information systems and (2) justification of the necessary mindset and digital skill set change for a mature museum. General conclusions are made as well as recommendations for the Bulgarian GLAM sector.
Keywords: data space, digital cultural heritage, data ecosystem, big data value.

ЕКОСИСТЕМИ С ПРОСТРАНСТВА ОТ ДАННИ ЗА КУЛТУРНО НАСЛЕДСТВО – ОПИТ ЗА КОНЦЕПТУАЛИЗАЦИЯ

Калина Сотирова-Вълкова

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mail: kalina@math.bas.bg

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.092-098
2020 Mathematics Subject Classification: 94-XX.

Сектор дигитално наследство е едно от деветте общи европейски пространства за данни, посочени в *EU Data Act*: здравеопазване, промишленост, селско стопанство, финанси, мобилност, зелена сделка, енергетика, публична администрация и умения. Терминът *пространство на данни* е комплексен и свързан с *екосистема от данни,* като обединява методологии и техники от: изкуствен интелект (AI), извличане на текст/данни, визуализация на данни, *mapping*, анализ на изображения, аудио анализ, мрежов анализ, управление на права. GLAM екипите не само у нас, но и в Европа се нуждаят от дефиниране на ползваната терминология за данни, както и от методология, която да подобри както обработката на данни, така и набора от техните дигитални компетентности. Статията предлага изчерпателен преглед на литературата (вкл. документи на ЕС) относно пространствата от данни и екосистемите от данни, насочени към (1) формулиране на основните предизвикателства при събирането, обработката, и *зрелостта* на данните (data maturity) в информационните системи, свързани с наследство, както и (2) обосновка на нужната промяна в нагласите и дигиталните умения на *зрелия музей*. Направени са общи изводи и препоръки за българския GLAM сектор.
Ключови думи: пространства от данни, дигитално културно наследство, екосистема от данни.

Introduction. GLAM sectors (galleries, libraries, archives, museums) are currently working on developing innovative ecosystems which would transform the use of digital collections. These developments should support researchers and educators, two important GLAM user communities interested in the application of available computational tools to ask questions on large and distributed collections and look for patterns. At the same time, the development of the data space is following the major trend set up by the EU Data Act [10]. The *Big Data Value Association* (BDVA), a counterpart of the European Commission in the Big Data Value Public-Private-Partnership, explains the new buzzword *datafication like this*: "rather than referring to data as the new oil, we think of *datafication* as a new currency underpinning a new data economy ... Opportunities presented by Artificial Intelligence (AI) ... cannot be fully exploited without wider access to large volumes of high-quality data; which remains severely limited. We consider widespread, secure and effective data sharing as the only solution" [**1**]. Limited high-quality interoperable data is the main obstacle for the heritage domain as well. Being a Digital Humanities researcher, ICOM and ENA member, the author's goal in this paper is to summarise the emerging data space challenges for the heritage sector, showing what knowledge, expertise, and skills are necessary to make a successful GLAM digital transformation through data.

Research question and methodology. Exploring the development of new infrastructures is a complex task with so many developments happening in parallel and in an area where a clear concept is still being coined. This paper is an initial attempt to collect and analyse different contributing perspectives and developments. The methodology used was a desk study. We did a comprehensive search for academic papers and policy documents, as well as examples of the most recent infrastructural efforts in this domain.

Defining data spaces and data ecosystems for cultural heritage. Conceptualising a data space is a cross-domain task, which includes a wide variety of computer science topics such as artificial intelligence, text/data mining, data visualization, mapping, image analysis, audio analysis, and network analysis. GLAM sector is one relatively

small sub-area among the nine common European Data Spaces outlined in the *European Strategy for Data* [8], *EU Data Act* [10], *European Data Governance Act* [9]: Health, Industrial, Agriculture, Finance, Mobility, Green Deal, Energy, Public Administration, and Skills. At the core of the heritage data space concept is improving *metadata quality in a way that adds value and increases inclusiveness, visibility and reusability.* This should include metadata and content improvement using new technologies like machine-learning algorithms to enrich metadata records. According to the *International Data Spaces Association* [13], the European data spaces ecosystems basically will bring "new services for users, based on enhanced transparency and data sovereignty; data sharing and exchange without dominance of, and dependency on, large, quasi-monopolistic players". According to the IDSA, there are ***four design principles for data spaces***: data sovereignty, data level playing field, decentralized soft infrastructure, and public-private governance (opendei.eu). These principles are based on a coordinated approach to establishing data space ecosystems with public-private governance and data space interoperability.

The conceptualisation of the new infrastructures is driven by two major initiatives: (1) *European Collaborative Cloud for Cultural Heritage* (ECCCH), aimed at the inclusive design of collections as data ecosystems equipped with AI potential for knowledge extraction, and (2) Europeana as the leader of the consortium implementing the European data space for cultural heritage. A major shift which needs to take place is to re-configure the data input in Europeana which should enhance aggregation with intelligent data analysis tools (AI, data mining, natural language processing). These tools "understand" collections of data owners/providers in a way that addresses specific user requests, which are not always using keyword searches. Europeana Foundation R&D team has created a methodology for evaluating and validating the results of (automatic) data enrichment efforts[1].

A data space and a data ecosystem are both terms used to describe a collection of data-related resources and entities. While data space typically refers to a more bounded and controlled environment through which data is collected, stored, accessed, processed, managed and shared by a specific group of stakeholders and sharing data happens within agreed rules and policies, data ecosystem, on the other hand, refers to a larger, more open and interconnected environment where data is created, shared and used by multiple stakeholders across a variety of domains. Data ecosystem can include different types of data sources, such as open data, protected data, and user-generated data and is typically characterized by its diversity, complexity, and dynamism. According to BitCOM, research on a data ecosystem should include services as a preliminary step (e.g. generation and preparation) for sharing data in a data space, and services as a processing step after receiving data from a data space to generate concrete added value from it[2]. Among Data Ecosystem services should be mentioned: Analytics, Data Semantics and Validation, Anonymisation, and Compliance, while among Data Space services are authentication, data transfer, data catalogue, and application catalogue.

In summary, both data spaces and data ecosystems process data-related resources and

[1] Europeana R&D team, (2023) Methodology for Validating Enrichments [`https://pro.europeana.eu/post/methodology-for-validating-enrichments`] Last visited: 31-01-2024.

[2] Data Spaces and Data Ecosystems: First Explainer and Current Status, BitCOM Inc. 2022. [`https://www.bitkom.org/sites/main/files/2022-09/Bitkom_Data_Spaces_Data_Ecosystems`] Last visited: 9-02-2024.

entities, but data space could be seen as the "inner core" of a data ecosystem. Edward Curry frames the theoretical foundations and principles of real-time linked data spaces within real-world smart ecosystems [4, 5] like this: "in its purest form, a data space is a set of participants and their inter-relations, where the participant is known as each data source (e.g., database, CSV, web service)". Scerry [15] adds detail to this definition arguing that data space is: "any ecosystem of data models, datasets, ontologies, data sharing contracts and specialised management services (i.e., as often provided by data centres, stores, repositories, individually or within 'data lakes'), together with soft competencies around it (i.e., governance, social interactions, business processes)". This means that as for heritage domain soft competencies should be well combined initially with data infrastructure and management services, clear intellectual property rights (IPR) and copyright rules.

The main goal and purpose of data ecosystems in general is knowledge extraction and controlled data sharing administered in a way that allows constant and dynamic various data input. Wang, Y. [17] goes deeper into data integration, focusing on essential details: "A data space system processes data with various formats, accessible through many systems with different interfaces, such as relational, sequential, XML, RDF, etc. Unlike data integration over DBMS, a data space system does not have full control on its data, and gradually integrates data as necessary." This means that analysis and knowledge extraction of various heritage data is at the core of the data spaces ecosystem. Such background can be very useful for the heritage domain, but conceptualization and contextual modelling need further research.

European data (space) policy. Successful digital transformation of the heritage sector, according to Europeana Strategy 2020-2025, is based on: (1) capacity building (Europeana Education Community), (2) strengthening the infrastructure, and (3) improving data quality. In this respect, data spaces are seen as the cornerstone of the EU data strategy, participating in one ongoing journey for excellence in smart ecosystems, altogether with the DEAI movement (Diversity, Equity, Accessibility, Inclusion), FAIR and CARE principles for open data and open science.

As for the policy, the European data space for cultural heritage is being developed with the support of the EC *Digital Europe Programme*. It affects the common digital market (tourism, education, creative industries) through modelling, experimentation, standardisation, deployment, and awareness, each targeted toward specific stakeholders in the data-sharing ecosystem of Europeana. The goal is to provide high-quality cultural content, particularly 3D (*Metaverse museums*), secure reuse of cultural resources, and enriched services. It is currently the main task of the Europeana Initiative, which, since September 2022, has been at the heart of the common European data space for cultural heritage, a flagship action of the EU, supporting GLAM sectors' digital transformation. The expected outcomes include: new automated AI-based services for developing knowledge extraction over open linked data; more inclusive digital heritage environment, unified and jointly owned; new research opportunities delivered through new ways for analysing information about collections.

Defining data maturity towards data mature GLAMs. Significant challenges for a fully functional GLAM data spaces ecosystem, except for capacity upgrade, are technical: interoperability, quality and accuracy, decentralized data sharing and processing

architectures, ***data maturity (DM)***, data verification and provenance support, strict rights management and IPR policies. If we move DM models from business analytics to heritage analytics their main goal should be to inform stakeholders whether they're taking the right approach to their intangible assets; and how reliable, efficient, and effective your organization is at managing data. According to business intelligence research, the four stages of data maturity are awareness, proficiency, savviness, and uncompromising data-driven decision-making[3]. The scale on which IDSA[4] measures the ***maturity of data spaces*** is a bit different: (1) lead-in, (2) committed case, (3) pilot, and (4) live [14]. Secure and sovereign data sharing is at the fourth live stage. Currently, data spaces in the domains mobility, manufacturing, energy, automotive, smart cities, and supply chain reached the pilot or live stages, but heritage is still in the initial conceptualizing phase. In the DM museum domain we have to mention the "Museum maturity framework" [12] which presents ***five development stages of a mature museum***, which is a good tool to diagnose museum management requiring changes in the leadership, cultural and structural changes. Lauren Vargas proposes defining museum digital maturity through its data policy and practice [16]. She explores applying the maturity model for business processes to cultural institutions, showing that data collection and use requires a *well-nourished ecosystem of interconnected people, processes and technologies*; she claims that as soon as the GLAM sector understands the meaning and potential of digital skills as quickly will go digital transformation. At the same time, it is clear that there is no single or uniform path to digital maturity. Digital maturity is achieved when all aspects of the digital ecosystem operate uniformly as a system towards a future where cultural institutions may manage their growth through introspective study and predictive data modelling [16]. Innovation labs also contribute to more mature data services in GLAMs [7].

The Bulgarian case. GLAM sector in Bulgaria lacks a focused national policy and roadmap exploring how data space concept and initiatives like ECCCH will affect the way we preserve, research and present cultural assets. The other important challenges can be systematized as follows: mindset change and clear understanding of what means in practice to present collections as data; low or average level of digital competencies; lack of funding for specialized training.

As for digital skills, the *DigiComp* EU framework offers many resources, which could be seen as a good base for further specialization for heritage specialists. There are good educational resources for citizens for main and *specialized digital skills*[5], but not all are available in Bulgarian language (aged Bulgarian museum staff does not know foreign languages). In 2023 Europeana team created a framework[6], which defines 9 types of digital skills needed for educators working in the cultural heritage sector and creative industries;

[3]Google and Deloitte *Data Maturity Benchmark* [`https://digitalmaturitybenchmark.withgoogle.com/retaildatatransformation`], [`https://www2.deloitte.com/us/en/pages/consulting/articles/digital-transformation-through-data-for-retail.html`] Last visited: 31-01-2024.

[4]Cultural heritage data spaces are still not mapped on the IDSA radar (they are supposed to be placed in the so-called "Cross-Domain" category).

[5]NEMO TOOLKIT [`https://www.ne-mo.org/news-events/article/toolkit-aims-to-empower-museum-professionals-with-digital-skills`] Last visited: 31-01-2024.

[6]Europeana digital skills framework for CH educators and museum teams [`https://pro.europeana.eu/post/what-digital-skills-are-needed-for-educators-working-in-cultural-heritage-institutions`] Last visited: 31-01-2024.

among them are inclusive learning, skills making easier communication, collaboration, and project management, digital interactive storytelling tools, virtual exhibitions, digital research skills, strong digital literacy skills to facilitate digital curation and present collections as data, metadata management of images, videos and documents; digital preservation techniques and digital storage systems, incl. creating back up strategies. In this respect, we have to mention NGOs like CHARTER (European Cultural Heritage Skills Alliance) [2], which work towards creating a comprehensive strategy and resources that will guarantee that cultural heritage professionals are keeping their knowledge up to date with their digital natives' user level. In the last year, there has been huge ongoing work on preparing qualitative and up-to-date[7] resources that are not yet available in Bulgarian. As for data spaces and collections as data realities, there is still no representative analysis for the Bulgarian GLAM sector to be mentioned here.

The analysis from 2022 of the current state of digitization in Bulgarian museums[8] among 109 museum teams shows that for 54% of them less than 15% of their collections have been digitized; at the same time for 13% of respondents more than 50% of their collections are digital already. Only 6% of the respondents, museum staff, claim that are using web platforms, metadata, and cloud technologies for digitization, which shows a sad overall picture. In addition, the answers to the question "Do the representatives of your team have the necessary digital competencies for cultural assets digitization" show that most of them can create and process photographic images, video and scanning software/hardware, but only 4% of the respondents are familiar with 3D scanning, less than 2% claim that their team does not have digital competences. The good news is that most Bulgarian museum teams are ready to achieve new practical knowledge on digital skills.

Concluding, methodology for generation and work with data spaces is a work in progress in Bulgaria. The status quo at the beginning of 2024 is based on the rich know-how gained from the national Europeana aggregator (Public Library Pencho Slaveykov, Varna), the National Archives, and research and digitization activities of national infrastructures CLADA-BG and HERITAGE BG. The expected digital transformation of the heritage sector is linked with Bulgaria's Recovery and Resilience Plan (Digital Transformation Branch), in which frame the Ministry of Culture is managing a mega-project for the creation of a national repository. All these initiatives increased common knowledge level in the sector which raised awareness for applying contemporary data policy trends.

Conclusion. This paper looked at a number of carefully curated sources in the emerging domain of data spaces for cultural heritage. In this domain, no single sector can resolve the complexity of building data spaces, and the overview of recent developments shows several developments with diverse stakeholders. The research question for Digital Humanists, GLAM and IT sectors concerning the data space concept is how all actors involved in the creation and management of the digital heritage ecosystem should work together on delivering a large-scale data-rich environment. The technology and ambition are here, but the GLAM sectors are not fully engaged in this development yet. To present, structure and analyse heritage collections within data spaces requires rethinking

[7] "Up-to-date" resource to be understood as resource using *data spaces* and *data collections* concepts.

[8] InterDIGImuseum EU funded Project 2021-1-BG01-KA220-ADU-000035298 [`https://interdigimuseum.eu/`] Last visited: 31-01-2024

data input, AI-based tech infrastructure and consensus between GLAM specialists on their concrete role in the process. Large quantities of high-quality data are crucial for AI solutions and assume serious upfront costs associated with data collection, integration, and sharing. This limits large-scale data-driven projects to those with the necessary expertise. For the European GLAM sector achieving such expertise is becoming a must.

REFERENCES

[1] BigDataValue Association. Towards a European-Governed Data Sharing Space - Enabling data exchange and unlocking AI potential. Position Paper (2020). https://www.bdva.eu/sites/default/files/BDVA%20DataSharingSpaces%20PositionPaper%20V2_2020_Final.pdf, Last visited: 12-12-2023.

[2] CHARTER Alliance. https://charter-alliance.eu/about-us, Last visited: 12-12-2023.

[3] Collections as Data: Part to Whole (Andrew Mellon Project, 2021-2023) Deliverables. https://collectionsasdata.github.io/part2whole, Last visited: 12-12-2023.

[4] E. Curry. Real Time Linked DataSpaces – Enabling Data Ecosystems for Intelligent Systems, Springer Open, 333 pp, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29665-0

[5] Ed. Curry et al. Common European Data Spaces: Challenges and Opportunities. Cham, Springer, 2022 https://doi.org/10.1007/978-3-030-98636-0_16.

[6] Design Principles for Data Spaces. International Data Spaces Association, Dortmund, 111 pp, 2021, https://doi.org/10.5281/zenodo.5244997.

[7] M. Dobreva, K. Stefanov, K. Ivanova. Data Spaces for Cultural Heritage: Insights from GLAM Innovation Labs. In: ICADL 2022 Proceedings, 492–500. Springer-Verlag, https://doi.org/10.1007/978-3-031-21756-2_41.

[8] EU Strategy for Data, February 2020. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX%3A52020DC0066, Last visited: 12-12-2023.

[9] European Data Governance Act, June 2022. https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/policies/data-governance-act, Last visited: 12-12-2023.

[10] EU Data Act, February 2022. https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/policies/data-act, Last visited: 12-12-2023.

[11] Deployment of a common European data space for cultural heritage: PM. Annual report M12. Europeana Foundation, 2023, https://pro.europeana.eu/page/data-space-deployment, Last visited: 12-12-2023.

[12] P. Humphrey, J. Yochim. The Museum Maturity Framework: A Path to Purpose, Meaning, and Values. *Curator – The Museum Journal*, **43**, no. 4 (2000), 313–323, https://doi.org/10.1111/j.2151-6952.2000.tb00015.x.

[13] IDSA: Implementation of European Strategy on Data Role of the International Data Spaces (IDS). Position Paper of IDS Association, 2020. https://internationaldataspaces.org/publications/most-important-documents/, Last visited 12-12-2023.

[14] IDSA Radar: Maturity of Data Assess. https://internationaldataspaces.org/wp-content/uploads/dlm_uploads/Data_Spaces_Radar_Web_230307.pdf, Last visited: 12-12-2023.

[15] S. Scerri, T. Tuikka, I. Lopez de Vallejoan (Eds). Towards a European Governed data sharing space, BDVA Position paper, 2020, https://www.bdva.eu/sites/default/files/BDVA%20DataSharingSpaces%20PositionPaper%20V2_2020_Final.pdf, Last visited 12-12-2023.

[16] L. Vargas. Understanding museum digital maturity through data collection and use. Doctoral dissertation, University of Leicester, 2019.

[17] Y. Wang et al. A survey on accessing dataspaces. *ACM SIGMOD Record*, **45**, no. 2 (2016), 33–44. https://doi.org/10.1145/3003665.3003672.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

SIMULATION STUDY ON THE OFFSPRING MEAN ESTIMATORS IN DISCRETE TIME BRANCHING PROCESSES WITH MIGRATION*

Tsvetomira A. Zlatkova[1], Vessela K. Stoimenova[2]

Faculty of Mathematics and Informatics,
Sofia University "St. Kliment Ohridksi", Sofia, Bulgaria
e-mails: [1]czlatkova@fmi.uni-sofia.bg, [2]stoimenova@fmi.uni-sofia.bg

In the present work we consider two widely used definitions of a branching process with migration, related to the controlled branching processes framework, classical and multiple. We simulate the two processes with equal offspring and migration characteristics and estimate the offspring mean via the weighted conditional least squares estimators based on two sampling schemes – on the generation sizes only and the generation sizes and the migration components. We propose a robust modification of the second estimator in the case when several trajectories of the process are observed.
Keywords: branching processes, migration, statistical estimation, simulation, robust estimators

СИМУЛАЦИОННО ИЗУЧАВАНЕ НА ИНДИВИДУАЛНОТО СРЕДНО НА РАЗКЛОНЯВАЩИ СЕ МИГРАЦИОННИ ПРОЦЕСИ С ДИСКРЕТНО ВРЕМЕ

Цветомира А. Златкова[1], Весела К. Стоименова[2]

Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски", София, България
e-mails: [1]czlatkova@fmi.uni-sofia.bg, [2]stoimenova@fmi.uni-sofia.bg

В настоящата статия разглеждаме две широко използвани дефиниции на разклоняващи се процеси с миграция, класическа и многомерна, които от своя страна са свързани с регулируемите разклоняващи се процеси. Симулираме двата процеса, използвайки едни и същи характеристики за наследниците и мигрантите. Също така, използваме две оценки по метода на претеглените най-малки квадрати. Първата оценка зависи само от размера на поколенията, докато във втората участва и миграционната компонента. Предлагаме и робастна модификация на втората оценка, когато са наблюдавани няколко траектории на процеса.
Ключови думи: разклоняващи се процеси, миграция, статистическа оценка, симулация, робастни оценки

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.099-106
2020 Mathematics Subject Classification: 60J80, 60J85.

1. Introduction: history. Branching processes, a vital mathematical tool for modeling family name extinction dynamics, originated with Irénée-Jules Bienaymé, a pioneering French mathematician [2]. Despite the lack of a formal proof, Bienaymé's work remained undiscovered until 1972 when Heyde and Seneta brought it to light [6]. Analyzing the mean ratio's influence on family extinction, Bienaymé explored scenarios where a mean ratio less than unity ($m < 1$) revealed the inevitable decline of families. For ($m = 1$), families faded at a slower pace, and for ($m > 1$), families demonstrated growth, with a positive probability of continued expansion across successive generations. This intricate mathematical dynamic underscores the profound impact of branching processes on understanding the generational fate of family lineages.

Contributions from Francis Galton and Henry Watson further shaped branching processes. Galton's 1873 problem, published in the *Educational Times*, addressed the population dynamics of a large nation where adult males colonize a district with distinct surnames. Watson initially attempted to solve this problem but made an error in his analysis, incorrectly predicting the extinction of all family lines. Although this proposition was later disproven, Galton, Watson, and Bienaymé are recognized for their contributions to the earliest model of a branching process.

There are many sources where the formulation of the model (for example [1], [5] and [14]) can be found, but we will use the one given in [3, p. 2], which is as follows: Let $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probability space on which an array of non-negative integer-valued random variables $\{X_n(i) : n = 0, 1, \dots; i = 1, 2, \dots\}$ is given, where $\{X_n(i)\}$ are independent and identically distributed (i.i.d.) with a common probability mass function (p.m.f.) $\{p_k\}_{k\geq 0}$ (*offspring distribution*). To avoid trivialities, we assume that $p_0 > 0$, $p_0 + p_1 < 1$ and therefore $p_j \neq 1$ for any j. If any p_j were equal to 1, it would essentially mean that the corresponding event always happens, which might trivialize the analysis or the model being discussed. The Bienaymé–Galton–Watson (BGW) process is a discrete time homogeneous Markov chain $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ defined inductively by $Z_0 = 1$ and for $n = 0, 1, 2, \dots$

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{Z_n} X_n(i), & Z_n > 0, \\ 0, & Z_n = 0. \end{cases}$$

The notation Z_{n+1} is employed to represent the total number of individuals in the $(n+1)$st generation, while $X_n(i)$ denotes the number of offspring of the ith individual living in the nth generation. The population initiates with a single individual, signified by $Z_0 = 1$. In this definition it is not possible to regulate the number of individuals throughout the generations.

In 1974, Sevastyanov and Zubkov [9] laid the foundation for controlled branching processes. Two years later, in 1976, N. Yanev introduced a special case of a ϕ-controlled branching process with random control functions [12]. Building upon this, in 1980, N. Yanev and K. Mitov [13], along with independent work by S. Nagaev and L. Khan [7], expanded on the concept by introducing the branching process with random migration.

Beyond its biological modeling origins, it is essential to recognize the broader implications of these processes. Their relevance extends into fields like quantum optics and atomic physics, showcasing the versatility and significance of these concepts across diverse scientific domains.

Building on foundational concepts laid out by Sevastyanov, Yanev, and others, our article serves as an overview of controlled branching processes and branching processes with random migration. We focus on understanding how individual means are estimated within these dynamic systems. By presenting numerical results and metrics evaluating estimation effectiveness, we aim to offer valuable insights into the practical applications of these established models. This analysis contributes to a deeper understanding of controlled branching processes. To guide readers through the paper's structure, Section 2 introduces models and notation, while Section 3 delves into sampling schemes and weighted least squares estimators for the offspring mean. The concluding Section 4 offers a presentation of simulations and the corresponding numerical results.

2. Models with migration. There are numerous sources providing the definition of a controlled branching process introduced by Sevastyanov in [9]. For the purpose of this article, we will give the formulation presented in [4].

Definition 1. *The multiple controlled branching (MCB) process* $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ *is defined recursively as*

$$Z_0 = I_0 > 0, \quad Z_{n+1} = \Big(\sum_{d\in D} \sum_{i=1}^{\phi_{n,d}(Z_n)} X_{n,d}(i) \Big)^+, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

where I_0 *is an integer and* $a^+ = max\{0, a\}$.

In this definition, D is an index set, such that for each $d \in D$: $\{X_{n,d}(i)\}_{n\geq 0, i\geq 1}$ are i.i.d. integer-valued random variables (r.v.), which are independent for different values of d, and $\{\phi_{n,d}(k)\}_{n\geq 0}$ are non-negative integer-valued r.v. for fixed values of d and k (independent from the previous ones for different values of d).

A special case of the MCB process is the one with random migration [4]. Let $X = \{X_n(i), n = 0, 1, \dots; i = 1, 2, \dots\}$, $\eta = \{(\eta_{n,1}, \eta_{n,2})\}$ and $I = \{I_n\}$ are independent sets of non-negative integer-valued i.i.d. r.v. Additionally, $\{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$ are i.i.d. r.v. (independent from the previous ones), with $P(\xi_n = -1) = p$, $P(\xi_n = 0) = q$, $P(\xi_n = +1) = r$ and $p + q + r = 1$.

If $D = \{1, 2, 3\}$, $X_{n,1}(i) = X_n(i)$, $X_{n,2}(i) = -\eta_{n,2}$ (individual emigration), $X_{n,3}(i) = I_n$ (immigration), $\phi_{n,1}(Z_n) = \min\{Z_n, Z_n + \xi_n\eta_{n,1}\}^+$, $\phi_{n,2}(Z_n) = \xi_n^- \mathbf{1}_{\{Z_n>0\}}$ and $\phi_{n,3}(Z_n) = \xi_n^+ \mathbf{1}_{\{Z_n>0\}}$, where $\xi_n^- = \max\{0, -\xi_n\}$ and $\xi_n^+ = \max\{0, \xi_n\}$. Using this notations in (1), we can write it as:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{\phi_{n,1}(Z_n)} X_n(i) - \sum_{i=1}^{\phi_{n,2}(Z_n)} \eta_{n,2} + \sum_{i=1}^{\phi_{n,3}(Z_n)} I_n \tag{2}$$

In this context, $\phi_{n,1}(\cdot)$ serves to determine whether family emigration occurs. If it happens, an individual is removed from the population and does not contribute to future reproduction. This action effectively excludes the individual's entire family from the next generation, reflecting a parallel absence in subsequent reproductive cycles. $\phi_{n,2}(\cdot)$ indicates the occurrence of individual emigration, specifically, emigration after reproduction. $\phi_{n,3}(\cdot)$ shows if there is an immigration in the nth generation, i.e. if we add individuals that will take part in the reproductive cycle of the next generation.

It is easy to check that (2) gives us:

Definition 2.

$$Z_0 > 0, \quad Z_{n+1} = \Big(\sum_{i=1}^{Z_n} X_n(i) + M_n \mathbf{1}_{\{Z_n>0\}} \Big)^+, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

where

$$M_n = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{\eta_{n,1}} X_n(j) - \eta_{n,2}, & \textit{with probability } p \\ 0, & \textit{with probability } q \\ I_n, & \textit{with probability } r \end{cases},$$

with $\sum_{k=1}^{x} = 0$ *if* $x \leq 0$.

This model closely resembles the one defined in [8], with a key distinction that in [8] 0 is not an absorbing state (if 0 is an absorbing state, the process concludes once it reaches zero), but $I = \{(I_n, I_n^0)\}$ and with probability r, $M_n = I_n \mathbf{1}_{\{Z_n>0\}} + I_n^0 \mathbf{1}_{\{Z_n=0\}}$, i.e

Definition 3.

$$Z_0 \geq 0, \quad Z_{n+1} = \Big(\sum_{i=1}^{Z_n} X_n(i) + M_n \Big)^+, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

where

$$M_n = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{\eta_{n,1}} X_n(j) - \eta_{n,2}, & \textit{with probability } p \\ 0, & \textit{with probability } q \\ I_n \mathbf{1}_{\{Z_n>0\}} + I_n^0 \mathbf{1}_{\{Z_n=0\}}, & \textit{with probability } r \end{cases}.$$

In both Definition 2 and Definition 3, the condition $p + q + r = 1$ holds true.

A simpler variant of model (3), introduced above, is presented in [3], where emigration and immigration take place before the reproduction phase.

Definition 4. *The CB process* $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ *is defined recursively as*

$$Z_0 = I_0 > 0, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{\phi_n(Z_n)} X_n(i), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Here, the control function dictates three possible scenarios:

- $Z_n - \phi_n(Z_n)$ individuals are removed from the population if $\phi_n(Z_n) < Z_n$ and do not participate in the evolution of the process;
- $\phi_n(Z_n) - Z_n$ are added to the population before reproduction if $\phi_n(Z_n) > Z_n$;
- No individual are removed or added if $\phi_n(Z_n) = Z_n$.

This model provides a more straightforward framework where migration events precede the reproductive phase.

3. Estimators for the offspring mean. Understanding the offspring distribution in branching processes is fundamental to reveal the overall behavior of the process. Estimating the offspring mean, $m = E[X_1(1)]$, is an important step toward grasping the

dynamics across generations in various scenarios. We will explore two types of conditional weighted least squares (CWLS) estimators connected to the processes introduced earlier.

Using the CWLS method, Yanev and Nitcheva, [8], proposed the following estimator for the offspring mean of the process defined in (4)

$$\tilde{m}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+Z_{i-1}} - n \sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i}{1+Z_{i-1}}}{\sum_{i=1}^{n} (1+Z_{i-1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+Z_{i-1}} - n^2}. \tag{6}$$

We see that the only thing we need for the estimator is the number of individuals in each generation, although that is not always an easy task. Furthermore, conducting an analytical analysis of the estimator presents challenges and is a subject for future work.

To obtain this estimator, the method involves minimizing the sum of squared weighted residuals with respect to two parameters, m and M (representing the migration mean, which is currently not of our interest). This method is also applied in [10] for the offspring mean of the process defined in (5). The resulting estimator is given by:

$$\hat{m}_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i \varepsilon(Z_{i-1})}{\varepsilon(Z_{i-1})+1} \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2(Z_{i-1})}{\varepsilon(Z_{i-1})+1} \Big)^{-1}, \tag{7}$$

where $\varepsilon(Z_{i-1})$ is the expectation of the control function, denoted as $\varepsilon(k) = E[\phi_n(k)]$. The asymptotic behavior of (7) has been studied with respect to the criticality of the process, and it has been proven that the estimator exhibits asymptotic normality and consistency. It is noteworthy that in this case, the minimization is solely with respect to m, assuming prior knowledge of $\varepsilon(k)$ for each generation. Consequently, obtaining more information about the family tree becomes crucial. However, in [10], they also mentioned that if $\varepsilon(k)$ is not known, it can be replaced $\varepsilon(Z_{i-1})$ with $\phi_{i-1}(Z_{i-1})$ and the modified estimator is:

$$\hat{m}_n = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i \phi_{i-1}(Z_{i-1})}{\phi_{i-1}(Z_{i-1})+1} \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_{i-1}^2(Z_{i-1})}{\phi_{i-1}(Z_{i-1})+1} \Big)^{-1}. \tag{8}$$

4. Simulation study. We present the outcomes of simulations, each including 1000 paths, spanning across different generations ($n = 10, 50, 100$) for both the processes detailed in (4) and (5). In the first model, emigration can occur both before and after reproduction, while in the second, it is only possible before. Another significant distinction is that immigration in (4) happens after the new individuals are produced, but in (5), it occurs before.

To generate the offspring distribution, as well as the distributions for emigrants and immigrants, Python is employed to randomize the values (also it is used for simulating the models). The resulting distributions are presented in the following three tables.

The following graphics, Figure 1 and Figure 2, display only a single path, providing a basic understanding of the two processes.

From both figures, we observe that up to the 50th generation, the two processes exhibit very similar behavior. However, in the third plots, we notice that process (5) demonstrates more rapid growth. This difference arises because we allow very few emi-

Table 1. Offspring distribution

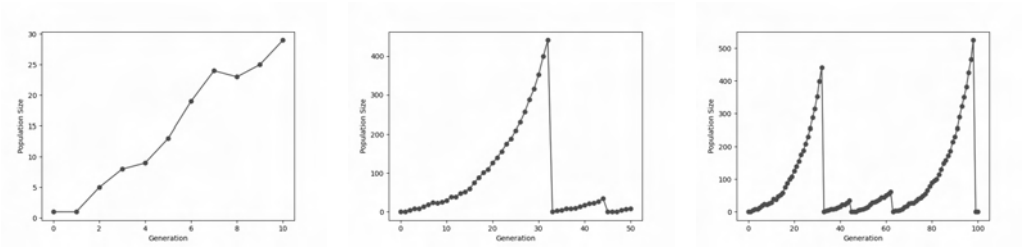
0	1	2
0.0718	0.7571	0.1711

Table 2. Emigrant distribution

1	2	3
0.1979	0.5996	0.2025

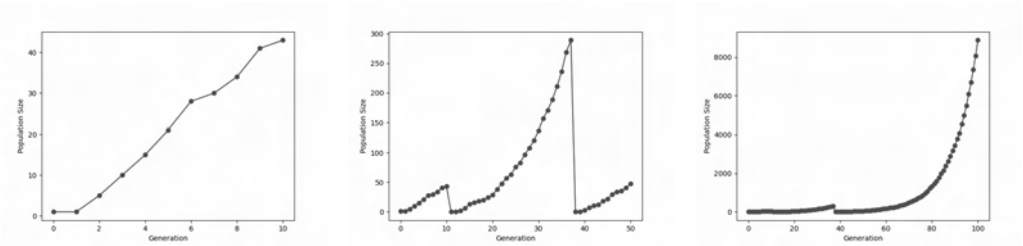
Table 3. Immigrant distribution

1	2	3
0.2951	0.0243	0.6806



(1) $n = 10$ (2) $n = 50$ (3) $n = 100$

Fig. 1. Process with migration, model (4)



(1) $n = 10$ (2) $n = 50$ (3) $n = 100$

Fig. 2. Process with migration, model (5)

grants before reproduction, and at some point, they become insignificant for (5). On the contrary, (4) shows slower growth because this process involves individual emigration, meaning that certain individuals are removed after reproduction and do not participate to the next generation.

Additionally, we provide corresponding estimators for m as given by equations (6) and (8). For each case, we calculate the mean of the estimated m-s in every path and present the resulting value (the same approach is used in [8]), i.e.

$$avg_N(\tilde{m}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\tilde{m}_n(j), \quad avg_N(\hat{m}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{m}_n(j),$$

where N is the number of simulated paths, which, in our case, is set to $N = 1000$ for each scenario.

For the simulation of (5), we once again assume that p, q, and r represent the probabilities of emigration, no migration, and immigration, respectively. This is analog of

Gawton-Watson process with migration defined in [3], in which the control function is a random variable, depending on p, q and r. Here $p = 0.03$, $q = 0.2046$, $r = 0.7654$ and the offspring mean is $m \approx 1.0993$, starting from $Z_0 = 1$. The results are presented in Table 4.

Table 4. Values of $avg_N(\tilde{m})$ and $avg_N(\hat{m})$

n	$avg_N(\tilde{m})$	$avg_N(\hat{m})$
10	0.9963	1.0418
50	1.0245	1.0168
100	1.0172	1.0019

The simulation results indicate the effective performance of both methods. However, an interesting question for a future work is whether it is possible to employ a similar estimator as (8) for a process that involves three control functions, such as (2).

The simulated process is supercritical. This allows us to use the asymptotic normality of the estimator (8). According to [3], Theorem 5.7, $\sqrt{A_n}(\hat{m}_n - m) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ as $n \to \infty$, where $A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2(Z_{i-1})}{\varepsilon(Z_{i-1}) + 1}$ and $\sigma^2 > 0$ is a constant. Having observed N trajectories $\{S_1, \ldots, S_N\}$ of the process, carrying information about the generation sizes and the value of the migration function, and supposing that some of the trajectories contain outliers ("contaminated" data which influence the correct estimation of the offspring mean), robust modifications of the estimators (8) can be constructed. Following the methodology, described in [11], the weighted least trimmed modification of (8) is defined as

$$\overline{m}(k) = arg \min_{m \in R} \sum_{i=1}^{k} -w_i f(Est(S_{\nu(i)}, m))$$

where k is the trimming factor, $f(x)$ is the logarithm of the density function of the standard normal distribution, ν is a permutation of the indexes, such that $f(Est(S_{\nu(1)}, m)) \geq f(Est(S_{\nu(2)}, m)) \geq \cdots \geq f(Est(S_{\nu(n)}, m))$. With $Est(S_i, m) = \frac{\sqrt{A_n}}{\sigma}\left(\hat{m}_n^{(i)} - m\right)$ we note the transformation of the offspring mean estimator, which asymptotically behaves like a standard normal r.v. The weights $w_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, are such that an index $k = \max\{i : w_i > 0\}$ exists. Following the steps in [11], Theorem 1, it can be proved that this estimator exists and its breakdown point is not less than $(N - k)/n$ if $n \geq 3$, $(N + 1)/2 \leq k \leq N - 1$. Hence the estimator $\overline{m}(k)$ is robust and it incorporates only the most "probable" or "typical" trajectories of the process. The trajectories leading to untypical for the standard normal distribution values $Est(S_i, m)$ are indicated as "outlier trajectories" and are excluded from the final form of the estimator $\overline{m}(k)$.

Acknowledgements. The authors would like to thank the referee for the constructive remarks and suggestions.

REFERENCES

[1] K. B. Athreya, P. E. Ney. Branching Processes. New York, Springer-Verlag, 1972.

[2] I. J. Bienaymé. De la loi de multiplication et de la durée des familles. Soc. *Philomat. Paris Extraits* Ser. 5 (1845), 37–39.

[3] M. González, I. Del Puerto, G. Yanev. Controlled Branching Processes. Wiley-ISTE, 2018.

[4] M. González, M. Molina, I. Del Puerto, N. M. Yanev, G. Yanev. Controlled branching processes with continuous time. *J. Appl. Probab.* **58** (2021), 830–848.

[5] T. E. Harris. Theory of Branching Processes. New York, English. Springer, 1963.

[6] C. C. Heyde, E. Seneta. The simple branching process, a turning point test and a fundamental inequality: a historical note on I. J. Bienaymé. *Biometrika* **59**, no. 3 (1972), 680–683.

[7] S. V. Nagaev, L. V. Khan. Limit theorems for Galton–Watson branching processes with migration. *Theory Probability Appl.*, **25** (1980), 523–534.

[8] D. Nitcheva, N. M. Yanev. A system for simulation and estimation of branching processes. *Pliska Stud. Math. Bulg.* **13** (2000), 173–178.

[9] B. A. Sevast'yanov, A. M. Zubkov. Controlled Branching Processes. *Theory Probability Appl.*, **19**, no. 1 (1974), 14–24.

[10] T. N. Sriram, A. Bhattacharya, M. Gonzalez, R. Martinez, I. Del Puerto. Estimation of the offspring mean in a controlled branching process with a random control function. *Stochastic Process. Appl.*, **117**, no. 7 (2007), 928–946.

[11] V. Stoimenova, D. Atanasov, N. M. Yanev. Robust Estimation and Simulation of Branching Processes. *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **57**, no. 5 (2004), 19–22.

[12] N. M. Yanev. Conditions for degeneracy of ϕ-branching processes with random ϕ. *Theory Probab. Appl.*, **20** (1976), 421–428.

[13] N. M. Yanev, K. V. Mitov. Controlled branching processes: the case of random migration. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **33**, no. 4 (1980), 473–475.

[14] М. Славчова-Божкова, Н. Янев. Разклоняващи се стохастични процеси. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, 2007 [M. Slavchova-Bozhkova, N. Yanev. Razklonyavashti se stohastichni protsesi. Universitetsko izdatelstvo "Sv. Kliment Ohridski", 2007] (in Bulgarian).

СЕКЦИЯ В: ОБРАЗОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

SECTION C: EDUCATION IN MATHEMATICS AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

EMBEDDED ASSESSMENT THROUGHOUT THE PROBLEM-BASED LEARNING – A PATH TO AUTHENTIC LEARNING EXPERIENCES*

Borislava Kirilova

Faculty of Mathematics and Informatics,
Sofia University "St. Kliment Ohridksi", Sofia, Bulgaria
e-mail: b.kirilova@fmi.uni-sofia.bg

This article examines the benefits and challenges associated with Problem-Based Learning (PBL) as a teaching and assessment tool, a constructivist approach that promotes a more pragmatic and student-centered mode of assessment. A tangible illustration of the proposed assessment tool is presented. The study aims to analyze different aspects of mathematical competence in line with the European Commission Framework for Lifelong Learning, such as critical thinking, practical application in authentic problems, and more effective knowledge acquisition. Data were collected through direct classroom observations, open-ended questionnaires, surveys, and personal interviews. The methodology was applied to a sample of 60 students from American College of Sofia (ACS) who participated in project work instead of conventional testing. The results of the study revealed that assessing students' progress through problem-based tasks not only enhances the development of students' mathematical competencies compared to traditional methods, but also fosters lifelong learning skills. However, this approach requires a more significant time commitment compared to traditional testing.
Keywords: Problem-Based Learning, embedded assessment, authentic assessment, binomial distribution, normal distribution, hypotheses.

ВГРАДЕНО ОЦЕНЯВАНЕ ПО ВРЕМЕ НА ПРОБЛЕМНО-БАЗИРАНО ОБУЧЕНИЕ – ПЪТ КЪМ АВТЕНТИЧЕН УЧЕБЕН ОПИТ

Борислава Кирилова

Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски", София, България
e-mail: b.kirilova@fmi.uni-sofia.bg

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.109-116
2020 Mathematics Subject Classification: 62F03.

В статията се разглеждат предимствата и предизвикателствата, свързани с проблемно-базираното обучение (ПБО) като инструмент за преподаване и оценяване – конструктивистки подход, който насърчава по-прагматичен и ориентиран към учениците способ за оценяване. Представена е конкретна илюстрация на предложения инструмент за оценяване. Изследването има за цел да анализира различни аспекти на математическата компетентност в съответствие с Европейската рамка за учене през целия живот, като критично мислене, практическо приложение на придобитите знания при решаване на проблеми от реалния живот и умения за учене. Данните са събрани чрез преки наблюдения в класната стая, въпросници с отворен отговор, анкети и лични интервюта. Методологията беше приложена върху извадка от 60 ученици от Американски колеж в София, които участваха в работа по проект вместо в конвенционален тип изпитване. Резултатите от изследването разкриват, че оценяването на напредъка на учениците чрез проблемно базирани задачи не само повишава развиването на математическите им компетентности, в сравнение с традиционните методи, но и възпитава умения за учене през целия живот. Този подход обаче изисква по-значителен ангажимент откъм време спрямо традиционното изпитване.
Ключови думи: проблемно-базирано обучение, вградено оценяване, автентично оценяване, биномно разпределение, нормално разпределение, статистически хипотези.

Introduction. In the realm of education, the conventional test has consistently served as the main tool for assessing the knowledge and skills acquired during the educational process. However, as educators have become more steeped in the constructivist model of learning, there is a growing consensus that traditional examinations are not the only instrument of assessing knowledge. Constructivism requires to abandon traditional assessment, standardized tests, and checklists. In this paradigm, assessment is seamlessly integrated into the learning process, giving students a more meaningful role in assessing their own progress [19]. Traditional test papers, characterized by limited time for work and covering specific learning material, in most cases measure mainly the memorization and the repetition of facts [8]. There is a significant likelihood that certain cases do not precisely portray the student's capacity to apply knowledge in practical situations or think critically about authentic problems. Furthermore, the uniform nature of examinations, designed to fit all, fails to consider diverse learning styles and may result in a distorted representation of a student's true capabilities. Papers can cause stress and anxiety in students, which can interfere with their performance and not be indicative of their actual mathematical competencies [20]. Problem-Based Learning (PBL) is an instructional approach that integrates various forms of active learning opportunities, offering students the chance to collaborate and engage in a low-stress environment. In a study conducted by Chapell et al. [4], it was found that students experiencing high anxiety exhibited significantly weaker performance on a time-pressure test compared to their peers with lower anxiety levels. This outcome was attributed to the impact of stress and anxious thoughts, which were observed to reduce working memory capacity [12]. Project-based assessment provides authentic learning experiences that extend beyond the classroom and mere academic content. However, it is important to consider the fact that standardising the assessment of projects and eliminating subjectivity present challenges that significantly reduce their advantages over examinations. Assessment conducted under the guidance of a proctor provides a fairer grading process for students

as it reduces the opportunity to present someone else's work as their own [17]. Respectively, a complete transition to the implementation of assessment in the current learning process could eliminate the advantages of problem-based learning. On the other hand, if our attention is solely directed toward assessments conducted in the classroom under the direct supervision of the teacher, we should anticipate no disparity in the prevalence of cheating between traditional paper-and-pencil tests and computer-based grading [13].

Methodology. The initial stage of implementing project-based evaluation requires careful selection of the topics to be addressed in line with the learning objectives. To foster the development of mathematical competencies [20], it is essential to select topics that are relevant to real-world challenges, interdisciplinary in nature, and require research, data analysis, creativity, problem solving, and critical thinking. Creating transparent and objective assessment criteria is crucial for fostering student motivation [5]. Rubrics should be formulated to evaluate not only the final result but also the process of engagement, collaboration, and individual contributions. Conventional assessment methods often do not meet these requirements. In PBL, students actively participate in classroom learning and demonstrate their progress while practicing the appropriate type of tasks or developing problem-solving skills. This method provides numerous opportunities for authentic, embedded assessment. Embedded assessment means that the assessment of students' progress and achievement is seamlessly integrated into ongoing practical activities, whereas non-embedded assessment takes place outside the regular learning process, often in the form of tests. Assessing student progress and performance during a PBL session can be effectively achieved through embedded assessment [3]. The embedded assessment tool documents what tutors observed while students were engaged in learning or completing a task. Authentic assessment is associated with criteria defining to what extent the problem addressed is part of real life. Students are required to engage in authentic problems, rather than repeating facts.

Embedded assessment. Analyzing real-world cases by problem-based assessment provides students with exposure to different problem-solving methodologies and enhances their ability to apply these approaches. This helps bridge the gap between theoretical understanding and practical application. The examples presented in this section were developed by ACS students during mathematics classes, with the grades earned replacing a current assessment.

The examples presented in this section were developed by students at the American College of Sofia during mathematics classes, and the resulting assessment replaces a current test grade.

Problem-based assessment for 2021/2022 year: The aim of the project is to create two problems related to the topic "Statistical inference", as follows: 1. Statistical inference with a binomial distribution model on data from a learning test. 2. Statistical inference with a normal distribution model on data from a learning test. Choose a real-life topic of interest to you. It can be related to a personal story; note it in the introduction to your paper. If not, provide a rationale for why you chose this particular topic and how it might apply true-to-life. Before you start actual work on the project, you need to choose a general data set. Each of these sets should contain a sample of at least 100 items from reliable sources. Cite them in the last part of the report. Make sure that none of your classmates have already chosen the same data samples by entering them into a table that is common to the grade level. It is not even acceptable for students from different

classes to use the same data. At the conclusion of the final report, please complete the following teacher-created survey to test how effective you think project-based testing is: Perceived Importance: On a scale of 1 to 5, evaluate the importance of assessments based on authentic problems for your subject matter expertise knowledge (1 = Not important at all, 5 = Extremely important). Knowledge Acquisition: Do you believe that information learned through projects is better retained compared to traditional testing methods (Yes/No)? If yes, please explain why. Application to Real Life: How well do you think the knowledge gained through project work can be applied to real-life situations (Very Poor, Poor, Neutral, Good, Very Good)? Critical Thinking Skills: In order to understand to what extent do projects enhance students' problem-solving skills, the following questions were asked: Do you think that the problem-based work helped to improve your ability to research, extract and evaluate the data collected (Not at all, Slightly, Moderately, Very much, Extremely)? How has project-based testing contributed to your ability to develop solutions with the use of statistical analysis (Little, Somewhat, A lot)? Suggestions for Improvement: What suggestions do you have to improve the effectiveness of project-based testing? Is there anything else you would like to share about your experience with project-based testing?

In the original document, this section presents solved problems similar to those expected to be created by students. However, the author prefers to show students' solutions after formative assessment and remediation were applied. Both of the following topics have their roots in the reality surrounding the students and more particularly the COVID-19 pandemic environment which was so live during the time of the research.

An example of statistical inference with a binomial distribution model proposed by a student at an American College of Sofia. The first one of the problems is related to the effectiveness of the vaccines.

The introduction was as follows: the first approved vaccine passed three stages of clinical trials as required by the US's Center for Disease Control (CDC) and the Federal Drugs Administration (FDA) before finally being approved for emergency use by the FDA on December 11, 2020. It remained the solely approved vaccine until April 23, 2021 when the "Johnson & Johnson" vaccine was approved as well. For the purposes of his work the student has assumed the number of people vaccinated with the "J&J" vaccine is negligible and therefore the effects on the population can also be neglected. In particular to the basic used vaccine – that one developed by "Pfizer", after the third and final stage of their clinical trials the producer reported a 95% (at least) protection rate against vaccine breakthrough infection. This results in a 5% (at most) chance of getting infected with COVID-19 after completing the two doses series of the "Pfizer" vaccine. Meanwhile, the Center of Disease Control (CDC) [21,22] provided data about the total number of vaccinated people who fully completed the Pfizer track and the number of people with the "Pfizer" vaccine who got the infection up to one month after completing the series. The numbers were as follows by April 2021: $n = 10\ 135\ 725$ people got the two jabs from the "Pfizer" and $x = 12\ 611$ got infected afterwards.

Based on the facts above and assuming that the possibility of each vaccinated person to get infected constitutes independent events the student constructed the experiment based on a binomial distribution such as $B(n; \pi) = B(10\ 135\ 725; 0.05)$ and the following hypothesis definitions: the null hypothesis $H_0 : \pi \leq 0.05$ suggesting that there isn't a greater than reported risk of getting the virus after the vaccination. In addition, the

alternative hypothesis is $H_1 : \pi > 0.05$ suggesting that "Pfizer" incorrectly measured the rate of getting the virus after jabbing and the risk is higher than reported by them. Significance level $\alpha = 0.05$ meaning that results will hold with 95% confidence is set by the project guidelines. To solve the issue the student has cleverly applied a straight calculation saying $P(x \geq 12\,611) = 1 - BINOM.DIST(12\,611; 10\,135\,725; 0.05; TRUE) \approx 1 > 0.05 = \alpha$.

Shortly this can be read as that the probability of getting more than the reported infection cases within the observed population and given the reported vaccine efficiency strongly exceeds the assumed confidence level and therefore, we can be 95% confident that we cannot reject the null hypothesis. Furthermore, with 95% confidence, it could be concluded that "Pfizer" did not misreport the rate for possible infections after vaccination and that it is less or equal to 5% with 95% confidence.

An example of statistical inference with a normal distribution model proposed by an American College student. The second problem explores a possible relation between the vaccination levels and the death cases.

The rationale is based in the statistical data for Bulgaria and Denmark and in particular the deaths occurring in the two countries during April 2021. The student choses to compare Bulgaria's death rates to those of Denmark due the last country having the closest, among all other European countries, number of citizens residing in it compared to our home country (Bulgaria – 6 896 663, Denmark $\sim$ 5.84 million). In both countries vaccination begins on December 27, 2020. According to "Our World in Data", however, by April 2021, only 3% of the Bulgarian population was fully vaccinated, whereas in Denmark about 10% were fully vaccinated (and 13% had at least one dose put on) [23, 24].

Based on the information above it is naturally expected that the mean of Bulgarian deaths per day during April 2021 would be greater than that of Denmark. Statistical data for Bulgaria in this particular month summarizes to $(\mu, \sigma) = (110, 47.63)$ and for Denmark $(\mu, \sigma) = (2.2, 1.21)$ for $n = 30$ daily observations. Thus, the following hypothesis definitions are constructed: the null hypothesis (H_0) follows fact that the average deaths per day in the Scandinavian country is $\mu_0 = 2.2$ ($H_0 : \mu \leq \mu_0 = 2.2$) i.e average death cases in Bulgaria will not exceed the average in Denmark, and the alternative hypothesis is that Bulgaria's deaths per day are bigger than those of Denmark ($H_1 : \mu > 2.2$). Project guidelines request a significance level of $\alpha = 0.05$ meaning that results will hold with 95% confidence and therefore the corresponding *z-score used is 1.645.*

Given the above setup the empirical $z_e = 16.64$ is calculated. As $16.64 \gg 1.645$ or $z_e \gg z$ a conclusion was made that the null hypothesis H_0 can be rejected with more than 95% confidence. In addition, with confidence higher than 95% it can be concluded that average death cases for Bulgaria is higher than the average death cases for Denmark.

Results and discussion. In the field of education, the traditional system of assessing students through examinations has long been a subject of debate [11]. Although tests are designed to assess students' knowledge and skills acquired during learning activities, they often fail to capture essential skills such as critical thinking, problem solving, and creativity. Here, an attempt is made to report not only the results based on the final product, but also the work process itself. Perceived Importance: The author is aware that the answers obtained depend more on how well the students have understood that the purpose of this type of testing is to test their real-world problem-solving skills and subject matter competence. Accordingly, answers can be highly subjective. To avoid

inaccuracies, detailed explanations of what is meant by a level choice on the scale were presented on a whiteboard and additional personal interviews were conducted. Following these steps, the final consensus revealed that approximately 92% (rounding to a whole number was used for the purpose of the discussion) of the students believed that exams emphasizing practical skills created the necessary environment to move into a higher level of skill development according to Bloom's taxonomy as revised and specified for educational purposes in mathematics education [1]. Knowledge Acquisition: 87% of students felt that knowledge gained through project work was better remembered in comparison to their preparation for traditional testing methods. The remaining 13% felt that PBL did not suit their learning style because they had to work in an environment that required a high degree of self-direction. This thesis is supported by Prince & Felder [14] who claimed that students who struggle with the level of self-direction and responsibility required in a PBL environment are no exception. Research skills: By creation of hypothesis testing problems 97% of the students felt that skills such as research, data collection, extract, and interpretation were developed. Analytical skills: Working with an actual data encourages students to critically evaluate information, make interdisciplinary connections, and arrive at meaningful conclusions in the context of the problem rather than simply following problems from the textbook. Data analysis often involves using statistical software and data processing tools. Students gain practical experience with technology, enhancing their digital literacy skills, which are crucial in today's information-driven world. According to 92% of students, the competencies developed through the "Statistical inference" project would have benefited them beyond the classroom. Application to Real Life: The use of realistic data often requires students to integrate knowledge from different disciplines – a practice disapproved of by only 23% of the experimental group. These challenges promote lifelong learning as students can apply these interactive models in a variety of contexts throughout their future lives. This interdisciplinary approach fosters a holistic understanding of complex issues, promoting a broader perspective and encouraging students to draw connections between different areas of study. Suggestions for Improvement: Although embedded PBL evaluation offers numerous advantages, it also has some potential disadvantages compared to conventional, non-embedded evaluation. Here are some of the disadvantages students have associated with embedded assessment: Developing and completing a project takes significantly longer than preparing for and taking a traditional exam [10] which was confirmed by 96% of the experimental group. During the interviews, some of the students (12%) shared their concerns about whether PBL adequately prepares them for the State Profile Math Exams. These students prefer traditional exams, since in their opinion, they are more efficient in covering a broad range of content in a short amount of time. Traditional exams often mirror the format of standardized tests more closely [7]. PBL may focus on a specific topic, potentially leaving some other less explored due to the luck of time. Kirschner et al. [9], shared that PBL might not cover a broad range of content efficiently, potentially leaving gaps in students' knowledge compared to traditional exams. Assessing problem-based learning can be subjective and challenging. Evaluation criteria can vary, and it can be difficult to quantify and standardize the evaluation of different projects [2]. According to Thomas [16], project-based learning evaluation can be subjective and challenging. Project assessment can involve more ambiguity and variability in grading compared to the objective nature of traditional ongoing examinations. Furthermore, project management, monitoring and

evaluation involves the periodic collection, processing, and storage of significant amounts of information by the tutors [6]. In contrast, traditional tests may be more familiar and easier to manage for educators without extensive professional practice [15]. Ultimately, the choice between embedded and traditional assessment depends on the educational goals, the nature of the subject, and the preferences of both educators and students. Many modern educational approaches aim to strike a balance between these two methods to provide a well-rounded learning experience. It's important to note that while these criticisms exist, proponents of project assessment argue that many of these challenges can be addressed through thoughtful design, proper training, and ongoing assessment refinement. The effectiveness of PBL often depends on how well it is implemented and integrated into the broader educational context.

Conclusion. The requirements of the educational process are evolving and so are the methods of assessment. Although tests continue to be the main tool, the integration of project-based assessment offers an effective alternative. A constructivist approach gives priority to authentic learning experiences, promotes the practical application of knowledge and cultivates key competences for lifelong learning. Although there are challenges in its implementation, the benefits are undeniable – a more committed, adaptive and prepared generation of students for the changing demands of the 21st century.

REFERENCES

[1] L. Anderson, D. Krathwohl. A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing. A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives. Longman, 2001.

[2] J. Biggs, C. Tang, G. Kennedy. Teaching for quality learning at university. SRHE and Open University Press, 2022. ISBN 13:978-0-33-524275-7.

[3] Ph. Blumberg. Assessing Students During the Problem-Based Learning (PBL) process. *Medical Science Educator*, **15**, no.2 (2006).

[4] M. Chapell et al. Test anxiety and academic performance in undergraduate and graduate students. *Journal of Educational Psychology*, **97**, no. 2 (2005), 268–274, https://doi.org/10.1037/0022-0663.97.2.268.

[5] M. Flores et al. Perceptions of effectiveness, fairness and feedback of assessment methods: A study in higher education. *Studies in Higher Education*, **40**, no. 9 (2014), 1523–1534, https://doi.org/10.1080/03075079.2014.881348.

[6] E. Hadjikolev et al. Conceptual model of a virtual project management center. Scientific Research of the Union of Scientists in Bulgaria – Plovdiv, series B. Natural Sciences and Humanities, Vol. XVI, 2013, ISSN 1311-9192

[7] J. Hattie. Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses related to achievement, 2009. London: Routledge.

[8] T. Hattingh et al. Student learning behaviours around assessments. *Australasian Journal of Engineering Education*, **24**, no. 1 (2019), 14–24, https://doi.org/10.1080/22054952.2019.1570641.

[9] P. Kirschner et al. Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, **41**, no. 2 (2006), 75–86, https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_1.

[10] J. Mergendoller et al. The effectiveness of problem-based instruction: A comparative study of instructional methods and student characteristics. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, **1**, no. 2 (2006), https://doi.org/10.7771/1541-5015.1026.

[11] P. Nestorova et al., The test – (un)reliable way of checking knowledge. *Scientific works of UFT*, **59**, (2012) "Food, science, engineering and technologies", 962–965, ISSN 1314-7102.
[12] M. Owens et al. Anxiety and depression in academic performance: An exploration of the mediating factors of worry and working memory. *School Psychology International*, **33**, no. 4 (2012), 433–449, https://doi.org/10.1177/0143034311427433.
[13] Ph. Petrov. Prevention of Cheating in Paper-And-Pencil Tests for the Organizational and Technological Conditions of the Bulgarian Schools with the Help of Web-Based Test Generator Software. *Journal "Mathematics, Computer Science and Education"*, **1**, no. 1, (2018).
[14] M. Prince, R. Felder. Inductive teaching and learning methods: Definitions, comparisons, and Research Bases. *Journal of Engineering Education*, **95**, no. 2 (2006), 123–138, https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2006.tb00884.x.
[15] K. Simons, P. Ertmer. Scaffolding disciplined inquiry in problem-based learning environments. *The International Journal of Learning: Annual Review*, **12**, no. 6 (2006), 297–306, https://doi.org/10.18848/1447-9494/cgp/v12i06/47900.
[16] J. Thomas. A review of research on project-based learning. 2000, California, Autodesk Foundation.
[17] J. Wilkinson. Staff and student perceptions of plagiarism and cheating. *Int. J. Teach. Learn. High. Educ.* **20** (2009), 98–105.
[18] D. William. What Is Assessment for Learning? *Studies in Educational Evaluation*, **37**, no. 1, (2011), 3–14.

NOTES

[19] http://www.keytttcd.cct.bg/images/files/D8-KeyTTT%20Methodology%20basisBG.pdf.
[20] https://www.britishcouncil.org/sites/default/files/youth-in-action-keycomp-en.pdf.
[21] Data on the Daily Number of New Reported COVID-19 Cases and Deaths by EU/EEA Country." *European Centre for Disease Prevention and Control*, 7 Apr. 2022, https://www.ecdc.europa.eu/en/publications-data/data-daily-new-cases-covid-19-eueea-country.
[22] Rates of Covid-19 Cases or Deaths by Age Group and Vaccination Status. *Centers for Disease Control and Prevention*, Centers for Disease Control and Prevention, https://data.cdc.gov/Public-Health-Surveillance/Rates-of-COVID-19-Cases-or-Deaths-by-Age-Group-and/3rge-nu2a.
[23] H. Ritchie et al. Coronavirus (COVID-19) Vaccinations. *Our World in Data*, 5 Mar. 2020, https://ourworldindata.org/covid-vaccinations.
[24] Vaccine Timeline. Historic Dates and Events Related to Vaccines and Immunization, https://www.immunize.org/timeline/.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

POSSIBILITIES FOR USING AI IN MATHEMATICS EDUCATION*

Tsvetelina Stefanova[1], Slavi Georgiev[2,3]

[1]Department of Computer Systems and Technologies,
"Angel Kanchev" University of Ruse, Bulgaria
e-mail: tsveti.stefanov@gmail.com
[2]Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
[3]Department of Applied Mathematics and Statistics,
"Angel Kanchev" University of Ruse, Bulgaria
e-mail: sggeorgiev@uni-ruse.bg

Artificial intelligence could be used as a powerful and innovative tool in mathematics education. It is poised to transform the way of learning and teaching this subject. The main objective of our study is to provide a more complete and thorough understanding of the role and impact of using AI in mathematics education by determining the trends, the AI methods, the technological applications and the opportunities for utilizing AI by teachers and students. The potential benefits and threats caused by the use of AI are also discussed.
Keywords: artificial intelligence, mathematics education, intelligent tutoring systems.

ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА ИЗПОЛЗВАНЕ НА AI В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Цветелина Стефанова[1], Слави Георгиев[2,3]

[1]Катедра „Компютърни системи и технологии",
Русенски университет „Ангел Кънчев", Русе, България
e-mail: tsveti.stefanov@gmail.com
[2]Институт по математика и информатика, Българска академия на науките
София, България
[3]Катедра „Приложна математика и статистика",
Русенски университет „Ангел Кънчев", Русе, България
e-mail: sggeorgiev@uni-ruse.bg

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.117-125
This study was supported by the Bulgarian National Science Fund under Project KP-06-M62/1 "Numerical deterministic, stochastic, machine and deep learning methods with applications in computational, quantitative, algorithmic finance, biomathematics, ecology and algebra" from 2022.
2020 Mathematics Subject Classification: 97P80, 97U50, 97U70.

Изкуственият интелект може да се използва като мощен и иновативен инструмент в обучението по математика. Той е способен да трансформира начина на учене и преподаване на този предмет. Основната цел на нашето изследване е да осигури по-пълно и задълбочено разбиране на ролята и въздействието на използването на AI в обучението по математика чрез определяне на тенденциите, методите на AI, технологичните приложения и възможностите за използване на AI от учители и ученици. Потенциалните ползи и рискове, свързани с използването на изкуствения интелект, също са разгледани.
Ключови думи: изкуствен интелект, обучение по математика, интелигентни системи за обучение

1. Introduction. Technology has been tremendously developing in recent times, which affects all areas of life, including education. Artificial intelligence (AI) could help learners understand the lessons and topics they find difficult and it may also serve as a powerful tool for teachers not only to support the education process, but to cultivate critical thinking [10] and problem-solving skills in their students. One of the most important school subjects is Mathematics as it has application in various fields such as natural sciences, economics, social sciences, medicine, computing, banking and many others. However, according to the results of many exams like PISA and the maturity exams in a lot of countries, including Bulgaria, it appears to be a challenge for a large number of students. Technological advances, especially AI systems, give an opportunity for enhancing the understanding of mathematics by diagnosing difficulties in learning and providing personalised support [8, 9]. Such systems could also increase the interest in mathematics through gamification and more impressive visualization, especially in functional analysis and geometry.

2. Existing research concerning the application of AI in mathematics education. The role of artificial intelligence in education has been an object of many studies, but few of them give a holistic picture of the usage of AI in mathematics education. In [3] Gwo-Jen Hwang and Yun-Fang Tu have made a review of 129 relevant articles published in the quality journals indexed by the Social Sciences Citation Index (SSCI) from the Web of Science (WoS) database published from 1996 to the end of 2020. They find that 45.24% of the works discuss "intelligent tutoring systems", 28.57% – "profiling and prediction", 21.43% – "adaptive systems and personalization" and only 4.76% talk about "assessment and evaluation".

Another study [7] analyses publications in journals indexed in ScienceDirect, Scopus, SpringerLink, ProQuest, and EBSCOhost for the period 2017-2021. After a thorough analysis, it is found that from over 900 publications identified by title, abstract and keywords, only 20 fully explain the use of AI in mathematics education and clearly describe the data obtained. A reason for the small number of publications, according to [7], is that authors focus more on the use of AI in other fields of education and mathematics is less concerned. However, the considered in that research publications indicate that AI is helping students and teachers to improve the quality and effectiveness of learning and teaching by implementing solutions like robots, AI systems, teachable agents, autonomous agents, machine learning models, and digital technology devices.

3. Opportunities for using AI in mathematics education. Teachers and students could use numerous means to support mathematics learning – from information sources on the Internet (e-textbooks, reference books, blogs, forums, presentations,

videos, etc.) to systems using artificial intelligence. In general, AI systems suitable for mathematics education can be divided into two large groups – AI-based calculators and Intelligent tutoring systems (ITS). The first type are applications and they are used to a great extent by students to get help in solving specific mathematical problems, while the second type covers complex systems that can adapt the presented educational material depending on the individual needs and learning style of the student [4].

a. Opportunities for students

AI-based calculators. In present days, there are numerous AI-based calculators that can be used by teachers and students. They differ in their architecture (web applications, desktop applications or mobile applications), features, and price, but their principle of operation is similar:

– The user captures the task with the camera of their device or uses a formula editor or chat to enter it;

– The system then uses optical character recognition (OCR) and artificial intelligence to recognize the handwritten or editor-typed task;

– An AI-based module extracts the information and turns it into a mathematical formulation;

– Through another AI-based module, the task is solved and the solution is presented to the user. It should be noted that some systems do not provide a step-by-step solution for all types of problems, and in some cases, they only give answers (Microsoft Math Solver). There are systems which, when they cannot solve the problem, display a link to external ones allowing the user to see the solution (Google Socratic).

In our research, the functional capabilities and characteristics – working with photos, presence of an equation editor, display of the solution step by step, license for use, and Bulgarian language support – of nine AI-based calculating systems (Google Socratic [19], Microsoft Math Solver [25], Photomath [27], Symbolab [29], Nerd AI [26], Question.AI [28], Answer.AI [16], ChatGPT 3.5 [18] and MathGPT Chat [23]) are tested and analysed. Their abilities to solve certain classes of problems have been examined: quadratic equations, trigonometric expressions, systems of linear equations, systems of quadratic equations, ordinary integrals, integration by parts and logarithmic equations (Table 1).

The results show that among the AI-based calculating systems only ChatGPT 3.5 does not support working with task pictures. Seven of the studied programs have an equation editor for entering problem formulas, and two programs (ChatGPT 3.5 and MathGPT Chat) require the use of chat to enter problem conditions. The next functional possibility that is investigated is whether AI-based calculators can show the solution step by step, which is useful for student learning – again, seven of the systems output step-by-step solutions, with three of the programs having some limitations: Google Socratic displays step-by-step solutions for some tasks, and for others it provides a link to other programs supporting that feature; Microsoft Math Solver provides step-by-step solutions for some problems and only the correct answer for others; MathGPT Chat displays detailed post-solutions, but if they are very long, it displays only a part of them and offers to upgrade to a paid version to view the full solutions. The analysis of the types of tasks that AI-based calculators can solve shows that they can all solve quadratic equations, systems of linear equations and ordinary integrals. For trigonometric expressions, all programs did well, with eight showing a stepwise solution and only Microsoft Math Solver producing a

single answer. The result of the logarithmic equations is similar – eight of the programs solve the problem (seven show a step-by-step solution, and Microsoft Math Solver – only an answer). The special thing about this task is that ChatGPT has given two different answers to the task set in Bulgarian and in English (in English the answer is correct, in Bulgarian – wrong). This case shows that students should be critical of the information offered by the AI-based calculators and it is mandatory to verify it. The task, where integration by parts should be applied, the solution has turned out to be a little more complicated – six showed a step-by-step solution, Microsoft Math Solver – only an answer, Google Socratic shows a link to another program, and Answer.AI gives a wrong answer. The system of quadratic equations turns out to be the most complex of all the tasks. Five programs solve it and show a step-by-step solution, Google Socratic bring up a link to another program, Microsoft Math Solver and Photomath fail to solve it, and Question.AI gives a wrong answer. Regarding the usage license – most programs offer free access, two of the programs (Symbolab and Nerd AI) offer a time-limited trial period after which a certain price must be paid, MathGPT Chat has limits on the number of uses, as well as on the length of the solutions displayed (for full solutions one must upgrade to a paid version), and Answer.AI requires user activity to be used for free. It has also been analysed whether AI-based calculating systems support Bulgarian language. Four of the programs are found to be the case – Google Socratic, Question.AI, ChatGPT 3.5 and MathGPT Chat. Undoubtedly, the communication and the proposed solutions to the tasks in Bulgarian language would greatly facilitate Bulgarian users (especially in the lower classes) when using these AI-based calculators.

The paper [11] states that it is not yet clear how these AI-based calculators will fit into current mathematics education programs. According to some analysts, if such systems are allowed without restrictions, this will lower the knowledge of students. Others believe that the role of such tools should be discussed by the educational community, while others note that the availability of these tools changes the goals of mathematics education.

Intelligent tutoring systems. Intelligent tutoring systems are computer-based tools that use artificial intelligence to create an adaptive learning environment. This environment must simultaneously correspond to the level and needs of the learner, as well as to what is included in the educational program. ITS analyse vast amounts of data to assess individual strengths and weaknesses, identify knowledge gaps, and provide customized content and exercises to address specific needs. Unlike AI-based calculators, intelligent tutoring systems are much more complex and interactive tools.

In [12], it is stated that ITS most often include four different modules: an "expert knowledge" module, which includes rules and terms, task databases, and error databases; a "student" module that stores information about student's knowledge and behaviour, a "tutor" module for choosing the best pedagogical action and an interface for interacting with the student.

When used in the educational process, ITS provide personalized instruction and feedback to students, adapting to their individual learning styles and needs. By analysing student performance data, AI algorithms can identify areas where a student is struggling and provide targeted support to help them overcome those challenges. This level of customization allows students to progress at their own pace, ensuring they have the knowledge and skills they need before moving on to the next learning unit.

Table 1

	Google Socratic	Microsoft Math Solver	Photomath	Symbolab	Nerd AI	Question.AI	Answer.AI	ChatGPT 3.5	MathGPT Chat
Working with photos	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	No	Yes
Equation editor	Yes	Yes	Yes	Yes	No	Yes	No	Chat	Chat
A step-by-step solution	Yes/Link	For some tasks	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Quadratic equations	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Trigonometric expressions	Yes	Only answer	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Systems of linear equations	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Systems of quadratic equations	Link to other programs with solution	No	No	Yes	Yes	Wrong	Yes	Yes	Yes
Ordinary integrals	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Integration by parts	Link to other programs with solution	Only answer	Yes	Yes	Yes	Yes	Wrong	Yes	Yes
Logarithmic equations	Yes	Only answer	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes*	Yes
License to use	Free	Free	Free	Paid 76.99 lv. per year	Paid 14.99 lv. per week	Free	Free***	Free	Free**
Support of Bulgarian language	Yes	No	No	No	No	Yes	No	Yes	Yes

The designations are as follows:
Yes – the task is solved and in addition to the answer, a step-by-step solution is visualized;
No – the task cannot be solved;
Wrong – the task is solved incorrectly;
* – ChatGPT has given two different answers to the same task, set in Bulgarian and in English (in English the answer is correct, in Bulgarian – wrong);
** – MathGPT Chat has limits on the number of solved problems, as well as the length of the displayed solutions (for longer solutions, it displays a part of the solution and offers to switch to the paid Pro version);
*** – Answer.AI requires activity from the user (daily use, viewing ads, sharing on social networks) and gives rewards so that the program can be used for free.

Examples of ITS systems for mathematics education are MATHia [22], ALEKS [15], ASSISTments [17], Knewton Alta [21], i-Ready [20], Matific [24], etc.

One of the essential issues in the use of ITS is the provision of multilingual support in order to achieve more effective learning. Some modern ITS (e.g. Knewton Alta) support only English, which limits their use to English-speaking countries.

For multilingual support ITS developers apply different solutions – using external applications to translate text information into different languages or built-in multilingual support in the systems. For example, MATHia does not have built-in multilingual support, while ALEKS supports English and Spanish. For visualisation of text information in other languages, these systems use Google Translate, but sometimes the translations are not accurate.

Other ITS work with a limited number of built-in languages. i-Ready supports English, Spanish, Portuguese, and Haitian. The Gradescope system, which is used to intelligently grade student work (written assignments, exams and practices), has a limited set of built-in languages, too – English, Japanese, Korean, Portuguese, Spanish and Turkish, and it is used in the respective countries. Matific has built-in support for more than 40 languages (including Bulgarian) and it is used in over 50 countries, most of which are members of the European Union.

In [13] it is stated that there is a study conducted in 2021 which is based on data from 100,000 students in the US state of Florida. It finds that the use of MATHia in lower secondary school leads to better results in algebra, especially for the weaker students. In the same source [13], they claim that ALEKS is effective when used to supplement traditional instruction. According to a research by the University of Western Sydney [1], the use of Matific in the Australian primary school classrooms increases students' results by 34%.

Authors of [8] state that some ITS are being developed as gamification strategies to improve students' attention. This approach also increases learners' engagement and active participation in the educational process and helps them develop their interpreting and decision-making skills.

In Ecuador, over 14,000 students have used an online platform with built-in AI capabilities and access to over 400 courses from different curricula. The results of the study [14] show that when starting the program, students have about 25% of the necessary knowledge in mathematics, while after 16 weeks of training their level of preparation has increased significantly to 68.7%, which corresponds to a one-year course of study.

b. Opportunities for teachers

Educators need to be aware of the possibilities and limitations that the use of AI offers in teaching mathematics in order to deliver the educational material in a state-of-the-art way. By doing so, they will prepare their students for successful career after graduation as AI enters more and more areas of life.

In addition to the benefits of AI systems for teaching mathematics to students, AI-based tools can also be used effectively by educators to support the organization of the educational process. These tools can create lesson plans [11], suggest assignments and solutions, collect data on learners' success, offer an individual approach to learning for each student. Teachers can analyse the information provided by AI-based tools about learner performance and make appropriate decisions about their teaching methods. In this way,

the time spent by teachers on preparation is reduced and the traditional mathematics education could be greatly improved [6].

For example, ChatGPT can be asked to generate problems [5, 11] and solutions to them, as well as give wrong solutions (so that students can find where the error in the solution is).

Another case in which AI could help teachers is when improving their qualification through ITS. A research conducted by scientists at the University of South Carolina [2] shows that when middle school mathematics teachers complete an online professional program that uses artificial intelligence to improve their knowledge and teaching skills, their students' math scores improve.

4. Challenges of using AI in mathematics education. The use of artificial intelligence systems in mathematics education has great advantages, but at the same time, their successful implementation faces a number of challenges.

One of the challenges is the vast variety ITS and AI-based calculators – which ones to choose and how to use them in the learning process so that they best meet the specific learning needs.

The next challenge is related to the need for teachers and students to be familiar with the advantages and disadvantages, the possibilities and means of using artificial intelligence in mathematics education. Teachers must take training courses on using AI in the educational process in order to effectively utilize it in the classroom and improve students' learning outcomes.

Another challenge is related to the need to update mathematics curricula and introduce new strategies and techniques into the learning process so as to ensure a controlled use of AI.

As ITS collect and analyse a large amount of information about learners, another challenge is related to ensuring the privacy and protection of students' data.

Last but not least, it is a challenge to ensure equal access for all students to AI-based learning tools. The lack of that would result in ineffective mathematics learning for some students.

5. Conclusions. Having more and more capable computer-based learning tools with built-in AI for use of both teachers and students will improve and make mathematics learning more accessible and effective.

The potential of AI to greatly improve personalized learning for students is enormous. The extensive use of ITS will positively change the way students learn and engage with mathematics.

Artificial intelligence will not replace educators, but it can be used to free up some of their time and it may also help them grow as mathematics educators. The new generations of students need innovative teaching methods. This can be achieved by implementing various techniques allowing them to develop their reasoning, creative and critical thinking.

In the near future, artificial intelligence is going to support professional work in many fields, including education, so that teachers and students can achieve higher quality in less time.

REFERENCES

[1] C. Attard. Research Evaluation of Matific Mathematics Learning Resources: Project Report, University of Western Sydney, Australia, 2016.

[2] Y. Copur-Gencturk. AI can teach math teachers how to improve student skills, https://theconversation.com/ai-can-teach-math-teachers-how-to-improve-student-skills-218210, last visited 20.12.2023

[3] G.-J. Hwang, Y.-F. Tu. Roles and Research Trends of Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Bibliometric Mapping Analysis and Systematic Review. *Mathematics*, **9**, no. 6 (2021), 584, https://doi.org/10.3390/math9060584.

[4] A. Jancarik, J. Novotna, J. Michal. Artificial Intelligence Assistant for Mathematics Education. Proceedings of the 21st European Conference on e-Learning-ECEL, 2022, 143–148.

[5] T. Koehler, J. Sammon. How Generative AI Can Support Research Based Math Instruction, https://www.edutopia.org/article/using-ai-math-instruction, last visited 17.12.2023

[6] M. B. Mallik. Artificial Intelligence: Potential Benefit of Mathematics Teaching and Learning, *International Journal of Scientific Development and Research (IJSDR)*, **3**, Issue 9 (2018), 230–232.

[7] M. Mohamed et al. Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, **17**, no. 3 (2022), Article No: em0694, https://doi.org/10.29333/iejme/12132

[8] F. Nino-Rojas et al. Systematic review: Trends in intelligent tutoring systems in mathematics teaching and learning. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, **12**, no. 1 (2024), 203–229.

[9] S. Orhani. Artificial Intelligence in Teaching and Learning Mathematics. *Kosovo Educational Research Journal*, **2**, no. 3 (2021), 29–38.

[10] D. Paola. Enhancing Math Education with AI: Promoting Critical Thinking and Analyzing Information, https://eightify.app/summary/education-and-technology/enhancing-math-education-with-ai-promoting-critical-thinking-and-analyzing-information, last visited 14.12.2023

[11] J. Tapper. AI for Math Teachers with Chat GPT [Grades 6-12], https://www.collaboratedconsulting.org/post/ai-for-math-teachers?fbc, last visited 15.12.2023.

[12] S. V. Vaerenbergh, A. Perez-Suay. Classification of Artificial Intelligence Systems for Mathematics Education. In: Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence (eds P. R. Richard, M. P. Vélez, S. Van Vaerenbergh). Mathematics Education in the Digital Era, vol. **17**, Springer, 2022, 89–106.

[13] UNESCO. Global Education Monitoring Report 2023: Technology in education– A tool on whose terms? Paris, UNESCO, 2023.

[14] In Ecuador, Artificial Intelligence Makes Learning Math Easier, https://www.worldbank.org/en/news/feature/2022/02/10/en-ecuador-aprender-matematicas-es-mas-facil-con-inteligencia-artificial-nivelacion-remediacion-academica, last visited 21.12.2023.

[15] ALEKS, https://www.aleks.com/about_aleks, last visited 18.12.2023.

[16] Answer.AI, https://answerai.pro/, last visited 17.12.2023.

[17] ASSISTments, https://new.assistments.org/, last visited 16.12.2023.

[18] ChatGPT, https://chat.openai.com/, last visited 19.12.2023.

[19] Google Socratic, https://socratic.org/, last visited 18.12.2023.

[20] i-Ready, https://i-readycentral.com/, last visited 20.12.2023.

[21] Knewton Alta, https://www.wiley.com/en-ie/education/alta, last visited 18.12.2023.
[22] MATHia, https://www.carnegielearning.com/solutions/math/mathia/, last visited 21.12.2023.
[23] MathGPT Chat, https://chat.math-gpt.org/, last visited 19.12.2023.
[24] Matific is truly global, https://www.matific.com/au/en-au/home/why-matific/multilingual/, last visited 20.12.2023.
[25] Microsoft Math Solver, https://math.microsoft.com/en, last visited 18.12.2023.
[26] Nerd AI – Tutor & Math Helper, https://play.google.com/store/apps/details?id=com.codeway.homework&hl=en_US&pli=1, last visited 21.12.2023.
[27] Photomath, https://photomath.com/, last visited 20.12.2023.
[28] Question.AI, http://question.ai/, last visited 17.12.2023.
[29] Symbolab, https://www.symbolab.com/, last visited 20.12.2023.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

APPLICATION OF THE METHOD OF GENERALIZATION FOR CREATING GEOMETRY PROBLEMS*

Dobrinka Boykina

Faculty of Mathematics and Informatics,
University of Plovdiv "Paisii Hilendarski", Plovdiv, Bulgaria
e-mail: boikina@uni-plovdiv.bg

The article presents several applications of the generalization method in the implementation of the activity of creating planimetric problems. While applying the generalization method, the following methods are used: a) removing a given restriction or replacing it with a more general restriction; b) replacing a given constant with a variable; c) combining ways a) and b).
Keywords: problem, generalization, creating problems.

ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДА ОБОБЩЕНИЕ ЗА СЪСТАВЯНЕ НА ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЯ

Добринка Бойкина

Факултет по математика и информатика,
Пловдивски университет „П. Хилендарски", Пловдив, България
e-mail: boikina@uni-plovdiv.bg

В статията се представят няколко приложения на метода обобщение при реализиране на дейността съставяне на планиметрични задачи. При неговото прилагане са използвани следните начини: а) премахване на дадено ограничение или заменянето му с по-общо ограничение; б) заменяне на дадена константа с променлива; в) комбиниране на начини а) и б). Разработката е предназначена най-вече за действащите учители по математика и за студентите – бъдещи учители.
Ключови думи: задача, обобщение, съставяне на задачи.

При обучението по математика в училище обикновено се поставя акцент върху усвояването на предвидената в учебната програма теория по изучаваната тема и придобиването на умения за нейното прилагане при решаване на задачи. За да се реализира успешно обучението, е необходимо учениците целенасочено да овладеят не само изучаваната теория, но и съответни методи за решаване на математически

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.126-134
2020 Mathematics Subject Classification: 97D40.

задачи, както и да умеят да извършват методическа разработка на тези задачи. Тя по същество се състои в реализация на четириетапната схема за решаване на задачи, предложена от Д. Пойа [3]. За постигането на тази цел е необходимо действащите учители, а също и студентите, подготвящи се за учители по математика за средното училище, да владеят както същността на използваните методи, така и техните приложения – при това не само за решаване на различни видове задачи, но и за съставяне на такива задачи.

Цитираната схема на Д. Пойа е прилагана и усъвършенствана от редица методици у нас и в чужбина. Така например тя е обстойно обогатена в статията [1], където е разработен съвременен вариант на технологичен модел на дейността решаване на математически задачи (ДРМЗ), който има голямо практическо приложение. Този модел на ДРМЗ е приложен многократно в монографията [2] при решаването на множество задачи, които имат различни структури или са от различни области на математиката, но там не е разгледан въпросът за съставяне на нови задачи. За да бъде реализиран напълно последният етап „Поглед назад“ от цитираната схема на Д. Пойа и от упоменатия модел на ДРМЗ, трябва в него да се включи и дейността съставяне на задачи. За това обаче е необходимо първо учителите и студентите, които се подготвят за учители по математика, да усвоят нужните знания и умения за съставяне на задачи.

Настоящата статия има за **цел** да бъдат подпомогнати настоящите и бъдещите учители чрез представяне на конкретни примери за приложение на методите обобщение и конкретизация за съставяне на задачи по планиметрия.

Обобщението е метод, който може да се използва за ефективно съставяне на задачи. За целта се извършва анализ на формулировката на конкретната задача от училищния курс по математика (УКМ), която за определеност ще наричаме базова. Обикновено в условието на всяка задача се задават някакви ограничения за обектите в нея или се съдържат константи.

В такива случаи обобщение може да се получи по следните начини:

а) чрез премахване на дадено ограничение или чрез заменянето му с по-общо ограничение;

б) чрез заменяне на дадена константа с променлива;

в) чрез комбинация на а) и б).

Ще илюстрираме казаното с примери.

Задача 1 (базова). Даден е равностранен $\triangle ABC$, на който радиусът на описаната окръжност има дължина 7 cm. Да се намери лицето S на $\triangle ABC$.

Нека да анализираме задачата. Тъй като даденият $\triangle ABC$ е равностранен, той се определя еднозначно с един метричен[1] елемент. В случая това е даденият радиус. В условието на базовата задача са поставени две ограничения за фигурата: $\triangle ABC$ е равностранен и радиусът на описаната му окръжност е 7 cm.

Едно обобщение може да се направи, като се замени конкретната стойност за радиуса на описаната окръжност с константа-параметър. Така се получава:

Задача 1.1. Даден е равностранен $\triangle ABC$, на който радиусът на описаната окръжност е R. Да се изрази чрез R лицето S на $\triangle ABC$.

[1] Метричен елемент на една фигура е число, изразяващо дължина на отсечка, лице на фигура или обем на тяло.

Решението на формулираната задача (както и на базовата) е тривиално за учениците, понеже те са учили формулите $S = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ и $b = R\sqrt{3}$.

Друго обобщение може да се получи чрез промяна вида на триъгълника, т.е. като се премахне ограничението правилен (равностранен) триъгълник. Ако $\triangle ABC$ е равнобедрен, а той се определя еднозначно чрез два елемента, от които поне единият трябва да е метричен, то би могло да се съставят различни задачи в зависимост от това какви елементи ще бъдат заложени като дадени в условието на задачите. Така например могат да бъдат дадени: бедро и радиус на описаната окръжност; ъгъл между бедрата и радиус на описаната окръжност; основа и радиус на описаната окръжност; бедро и ъгъл (без значение кой ъгъл); основа и ъгъл; основа и бедро; и т.н. Ето и формулировките на съответните задачи.

Задача 1.2. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC = b$), на който радиусът на описаната окръжност е R. Да се изрази чрез b и R лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.3. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$), на който радиусът на описаната окръжност е R. Ако $\sphericalangle ACB = \gamma$, да се изрази чрез R и γ лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.4. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с основа $AB = c$, на който радиусът на описаната окръжност е R. Да се изрази чрез R и c лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.5. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC = b$), в който $\sphericalangle ACB = \gamma$. Да се изрази чрез b и γ лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.6. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с основа $AB = c$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$. Да се изрази чрез c и γ лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.7. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC = b$) с основа $AB = c$. Да се изрази чрез b и c лицето S на $\triangle ABC$.

Задача 1.8. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$), на който радиусът на описаната окръжност е R. Ако $\sphericalangle ABC = \alpha$, да се изрази чрез R и α лицето S на $\triangle ABC$.

Разбира се, нови задачи могат да се съставят и като се промени търсеното в задачата. Но това тук не е цел на статията. Читателят може самостоятелно да формулира такива задачи по аналогия с горните. А тук ще представим други обобщения, като премахнем ограничението триъгълникът да е равностранен или равнобедрен. Тъй като произволният триъгълник се определя до еднаквост с три елемента, от които поне един трябва да е метричен, то, ако в условията на новите задачи бъде зададен радиусът R на описаната около триъгълника окръжност, могат да бъдат съставени много задачи за изразяване лицето на произволен триъгълник чрез радиуса R и коя да е друга двойка негови елементи (метрични или неметрични, основни или неосновни), като обаче се спазва изискването: *елементите във всяка избрана тройка не бива да са зависими помежду си.* В качеството на контра пример на това изискване ще отбележим, че трите елемента: страна, ъгълът срещу нея и радиусът R на описаната около триъгълника окръжност са зависими елементи, защото за тях важи равенството $c = 2R\sin\gamma$. Тук, за илюстрация, ще представим само една задача, като приемем за дадени елементи например едната му страна, един от прилежащите ѝ ъгли и радиуса R на описаната около триъгълника окръжност. Така се достига до следната задача.

Задача 1.9. Даден е произволен $\triangle ABC$, за който $AB = c$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и радиусът на описаната окръжност е R. Да се изрази чрез R, c и β лицето S на $\triangle ABC$.

Разбира се, и тук читателят може да формулира още задачи за произволен триъгълник, като варира дадените или търсените елементи, съобразявайки се с горната забележка за независимост на дадените елементи.

Излизайки от базовата задача **1**, чрез замяна вида на дадената фигура, с метода обобщение може да се формулира и задача за правилен многоъгълник с n страни.

Задача 1.10. Даден е правилен n-ъгълник $A_1A_2 \dots A_n$, вписан в окръжност k с радиус R. Да се изрази чрез R лицето му S.

Поради ограничения в обема на статията, тук няма да представяме решенията на съставените по-горе задачи, получени от базовата чрез метода обобщение, а и това не е цел на разработката. Ще отбележим само някои идеи, които читателят (учител, студент, ученик) би могъл да използва за подробно разписване на техните решения. При всяка от тези задачи могат да се прилагат различни знания за откриване на съответно решение. Това зависи от даденото в нейното условие. Така например при задача 1.2. чрез допълнително построяване на симетралите на основата и едното бедро се получават подобни триъгълници, от които се намира връзка между височината на триъгълника и дадените елементи b и R, а от нея и теоремата на Питагор се изразява чрез тях и основата AB. Търсеният резултат е $S = \dfrac{b^3}{4R}\sqrt{4R^2 - b^2}$. При задача 1.3., прилагайки синусовата теорема, чрез R и γ се изразява основата AB, а от нея се намира и височината към основата. За търсеното лице се получава $S = 4R^2.\sin\gamma.\cos^2\dfrac{\gamma}{2}$. По аналогичен начин, използвайки синусовата теорема и формули по тригонометрия (основната и за понижаване на степента) при задача 1.4., се изразяват чрез R и c функциите $\sin\gamma$ и $\cos^2\dfrac{\gamma}{2}$. Тогава нейният отговор е $S = \dfrac{c}{2}\left(2R + \sqrt{4R^2 - c^2}\right)$. При задачи 1.5. и 1.7. директно се прилагат познати формули за лице на триъгълник. Задача 1.6. има пряка връзка със задача 1.3. поради формулата $c = 2R.\sin\gamma$. Отговорът на задача 1.8. е $S = 2R^2.\sin 2\alpha.\sin^2\alpha$. Към задача 1.5. се свежда решаването на задача 1.10. Нейният отговор е $S = \dfrac{n}{2}R^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}$.

При задача 1.9., отнасяща се за произволен триъгълник, чрез дадените елементи R, c и β посредством синусова теорема се изразява страната AC, а с косинусова теорема, приложена за AC, се съставя квадратно уравнение за страната BC, дискриминантата на което е $D = \sin^2\beta\left(4R^2 - c^2\right)$. Ясно е, че $D \geq 0$, тъй като във всеки триъгълник страната c не може да е по-голяма от диаметъра на описаната окръжност. В частния случай при $c = 2R$ триъгълникът е правоъгълен с хипотенуза $AB = c$ и лицето му е $S = 4R^2.\sin 2\beta$. При $0 < c < 2R$ корените на уравнението са $a_{1,2} = c.\cos\beta \pm \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}$. За да бъде удовлетворено изискването за пълнота на решението, тук се налага провеждане на изследване дали и кога тези корени могат да представят дължината на страната BC. За целта е целесъобразно да се изследват различни случаи в зависимост от стойностите, които може да приема ъгъл β. Така, ако $90^\circ \leq \beta < 180^\circ$, то $a_2 < 0$, а за да бъде положителен другият корен $a_1 = c.\cos\beta + \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}$, трябва да бъде изпълнено неравенството $\operatorname{cotg}\beta > -\dfrac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{c}$. Тогава лицето е $S = \dfrac{c}{2}\left(c.\cos\beta + \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}\right)\sin\beta$.

В частния случай, когато $\beta = 90°$, триъгълникът е правоъгълен, но с хипотенуза AC и $S = \frac{c}{2}\sqrt{4R^2 - c^2}$. Ако $\beta \in (0°; 90°)$, то очевидно $a_1 > 0$ и тогава търсеният отговор е $S = \frac{c}{2}\left(c.\cos\beta + \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}\right)\sin\beta$. Но в този случай е необходимо да се изследва още дали и кога $a_2 > 0$, което може да доведе до втори отговор на задачата. Това изисква да се разгледа неравенството $c.\cos\beta - \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2} > 0$. То ще бъде изпълнено при $\operatorname{cotg}\beta > \frac{\sqrt{4R^2 - c^2}}{c}$. В този случай решението е $S = \frac{c}{2}\left(c.\cos\beta - \sin\beta\sqrt{4R^2 - c^2}\right)\sin\beta$.

Както се вижда, някои от съставените задачи не са сложни и за тяхното решаване се използват известни, познати на учениците знания, а решаването на други изисква прилагане на повече теоретични знания и проява на досетливост. Този факт показва, че дейността съставяне на задачи може да бъде използвана от учителя и с цел реализиране на диференцирано обучение по математика съобразно индивидуалните особености на своите ученици. Така например, според нас, задача 1.9. е целесъобразно да бъде разглеждана в извънкласни форми на обучение по математика.

Докато базовата задача 1. и съставените от нея задачи имат структурата: те са определени до „еднаквост“ с дадените си елементи, то следващата базова задача, както и тези, които ще бъдат съставени, имат друга структура – фигурите в тях са определени до релацията „подобност“.

Задача 2 (базова). Даден е квадрат $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = 1 : 2$, $AN : AD = 1 : 2$ и $AP : AC = 1 : 2$. Да се намери отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

От тази базова задача едно обобщение може да се извърши, като се замени константата $\frac{1}{2}$ с параметър, например p. Така се получава следващата задача.

Задача 2.1. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = AN : AD = AP : AC = p$, където $p \in (0; 1)$. Да се изрази чрез параметъра p отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

В тази задача точките M, N и P делят посочените отсечки в едно и също отношение. Ако обаче тези точки делят съответните отсечки в различни отношения, т.е. $\frac{AM}{AB} = p$, $\frac{AN}{AD} = q$, $\frac{AP}{AC} = r$, то се получава ново обобщение, а именно:

Задача 2.2. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $\frac{AM}{AB} = p$, $p \in (0; 1)$; $\frac{AN}{AD} = q$, $q \in (0; 1)$; $\frac{AP}{AC} = r$, $r \in (0; 1)$. Да се изрази отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$ чрез параметрите p, q и r.

Като се има предвид, че квадратът е видово понятие както спрямо ромба, така и спрямо правоъгълника, т.е. и ромбът, и правоъгълникът са родови понятия за квадрата, то чрез метода обобщение могат да бъдат формулирани нови задачи и за ромб, и за правоъгълник. Така, ако се премахне ограничението ъгълът между две съседни страни да е 90°, т.е. да се разгледа фигурата ромб, то последните две задачи (2.1. и 2.2.) могат да бъдат обобщени по следния начин.

Задача 2.3. Даден е ромб $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = AN : AD = AP : AC = p$, където $p \in (0;1)$. Да се изрази отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$ чрез параметъра p.

Задача 2.4. Даден е ромб $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $\dfrac{AM}{AB} = p$, $p \in (0;1)$; $\dfrac{AN}{AD} = q$, $q \in (0;1)$; $\dfrac{AP}{AC} = r$, $r \in (0;1)$. Да се изрази отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$ чрез параметрите p, q и r.

Ако се премахне ограничението съседните страни да са равни, но се запази условието ъглите на $ABCD$ да са прави, се получава фигурата правоъгълник. Тогава чрез метода обобщение от същите задачи (2.1. и 2.2.) могат да се съставят нови задачи и за правоъгълник. Техните формулировки са следните.

Задача 2.5. Даден е правоъгълник $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = AN : AD = AP : AC = p$, където $p \in (0;1)$. Да се изрази чрез параметъра p отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

Задача 2.6. Даден е правоъгълник $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $\dfrac{AM}{AB} = p$, $p \in (0;1)$; $\dfrac{AN}{AD} = q$, $q \in (0;1)$; $\dfrac{AP}{AC} = r$, $r \in (0;1)$. Да се изрази чрез параметрите p, q и r отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

Понеже и ромбът, и правоъгълникът са видови понятия спрямо успоредника, то задачите за ромба (2.3. и 2.4.), както и задачите за правоъгълника (2.5. и 2.6.) също могат да бъдат обобщени, като тези фигури се заменят с фигурата успоредник, отчитайки факта, че в общия случай успоредникът се определя с три елемента, от които поне един трябва да е метричен. Така се стига до формулировката на следните нови задачи.

Задача 2.7. Даден е успоредник $ABCD$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $AM : AB = AN : AD = AP : AC = p$, където $p \in (0;1)$. Да се изрази отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$ чрез параметъра p.

Задача 2.8. Даден е успоредник $ABCD$, на който $\sphericalangle BAD = \phi \neq 90^\circ$, имащ страни $AB = a$ и $AD = b$. Точките M, N и P принадлежат съответно на страните AB, AD и диагонала AC така, че $\dfrac{AM}{AB} = p$, $p \in (0;1)$; $\dfrac{AN}{AD} = q$, $q \in (0;1)$; $\dfrac{AP}{AC} = r$, $r \in (0;1)$. Да се изрази чрез параметрите p, q, r и елементите a, b и ϕ отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

По-нататъшно обобщение може да се направи, ако вместо успоредник се разгледа изпъкнал четириъгълник, за който е изпълнено условието в следващата задача.

Задача 2.9. Дадени са 4 точки A, B, C и D такива, че B и D са от различни полуравнини относно правата AC и разстоянията от B до AC и от D до AC са равни. Върху отсечките AB, AD и AC са избрани точки M, N и P такива, че $\dfrac{AM}{AB} = p$, $p \in (0;1)$; $\dfrac{AN}{AD} = q$, $q \in (0;1)$; $\dfrac{AP}{AC} = r$, $r \in (0;1)$. Ако $\sphericalangle BAC = \alpha$, да се изрази чрез параметрите p, q, r и α отношението $S_{AMPN} : S_{ABCD}$.

При тази серия няма да представяме решенията на новосъставените задачи. Това може да остане за самостоятелна работа на читателя (учител или студент, подготвящ се за учител по математика, или дори ученик). Ще отбележим обаче, че един поглед назад върху задачите, съставени от изходната задача 2, показва, че между тези десет задачи има определена връзка, която е двупосочна. От една страна, тръгвайки от базовата задача, чрез метода обобщение по вида на разглежданата фигура, и в зависимост от това дали точките M, N и P делят въпросните отсечки в едно и също отношение или ги делят в различни отношения, се достига до всяка следваща двойка задачи, като последната задача 2.9. се явява обобщение на всички предходни обобщения. При това резултатите, които се получават при тяхното решаване, показват, че отговорът на задачи 2.1., 2.3., 2.5. и 2.7. е еднакъв – търсеното отношение е равно на p^2. Един и същ резултат се получава и при решаването на задачи 2.2., 2.4. и 2.6., а именно търсеното отношение е $\frac{r}{2}(p+q)$. От друга страна, съществува връзка и в обратна посока. Така, задача 2.1. може да се разглежда като получена от задача 2.3. или от задача 2.5. чрез специализация, като съответно фигурите ромб или правоъгълник се заменят с фигурата квадрат. Аналогично, задачи 2.3. и 2.5. могат да се разглеждат като получени чрез специализация от задача 2.7. Същият извод важи и за задача 2.2. спрямо задачи 2.4. и 2.6., а също и за тези две задачи спрямо задача 2.8.

Задача 3 (базова задача). През произволна точка M, вътрешна за равностранния $\triangle ABC$, са построени прави p, q и r, успоредни съответно на страните AB, AC, BC. Правата p пресича AC и BC съответно в точките B_1 и A_1, правата q пресича AB и BC съответно в точките C_1 и A_2, а правата r пресича AC и AB съответно в точките B_2 и C_2. Да се докаже, че $\frac{A_1A_2}{BC}+\frac{B_1B_2}{AC}+\frac{C_1C_2}{AB}=1$.

В тази задача има 2 ограничения: триъгълникът е равностранен и точка M е вътрешна. Едно обобщение може да се осъществи, ако равностранният триъгълник се замени с произволен триъгълник, т.е. обобщението е по вида на триъгълника.

Задача 3.1. През точка M, вътрешна за произволен $\triangle ABC$, са построени прави p, q и r, успоредни съответно на страните AB, AC, BC. Правата p пресича AC и BC съответно в точките B_1 и A_1, правата q пресича AB и BC съответно в точките C_1 и A_2, а правата r пресича AC и AB съответно в точките B_2 и C_2. Да се докаже, че

$$\frac{A_1A_2}{BC}+\frac{B_1B_2}{AC}+\frac{C_1C_2}{AB}=1.$$

Ще извършим обобщение по мястото на точка M.

Задача 3.2. През точка M, която не е външна за $\triangle ABC$, са построени прави q и r, успоредни съответно на страните AC и BC. Правата q пресича BC в точка A_1, а правата r пресича AC в точка B_1. Да се докаже, че: $\frac{A_1B}{BC}+\frac{AB_1}{AC}=1$.

Задача 3.3. През точка M, която е външна за $\triangle ABC$, са построени прави p, q и r, успоредни съответно на страните AB, AC и BC. Правата p пресича правите AC и BC съответно в точки B_1 и A_1, правата q пресича правите AB и BC съответно в точки C_1 и A_2, а правата r пресича правите AC и AB в точки B_2 и C_2. Да се докаже, че:

а) $\frac{A_1A_2}{BC}+\frac{B_1B_2}{AC}-\frac{C_1C_2}{AB}=1$, ако M е разположена в $\sphericalangle ACB$

б) $\dfrac{A_1A_2}{BC} - \dfrac{B_1B_2}{AC} + \dfrac{C_1C_2}{AB} = 1$, ако M е разположена в $\sphericalangle ABC$

в) $-\dfrac{A_1A_2}{BC} + \dfrac{B_1B_2}{AC} + \dfrac{C_1C_2}{AB} = 1$, ако M е разположена в $\sphericalangle CAB$

Както се вижда от по-горе разгледаните примери, методът обобщение може да се прилага за формулиране на нови, по-общи задачи, излизайки от дадена задача, която тук условно е наречена базова. В учебната практика, отчитайки голямата абстрактност на дадена обща задача и с цел повишаване на достъпността, понякога се налага да се съставят нови задачи чрез методите специализация или конкретизация. Конкретизация е налице например, ако се направи преход от задача 1.1. към задача 1. или от задача 2.1. към задача 2., тъй като въпросният параметър (R или p) се заменя с конкретно число. Затова в такива случаи специализацията и конкретизацията се разглеждат като процеси, обратни на обобщението. Ако например в качеството на изходна е зададена последната задача (Задача 1.10.) от първата серия по-горе, а именно: „Даден е правилен n-ъгълник $A_1A_2 \dots A_n$ вписан в окръжност k с радиус R. Да се изрази чрез R лицето му S.“, то чрез метода специализация могат да се формулират съответни задачи за правилни триъгълници, четириъгълници, петоъгълници, шестоъгълници.

В някои случаи възниква необходимост от съставяне на други задачи, понеже на субекта (ученика, студента, учителя) не е известен метод за решаване на дадената обща задача. В такива случаи много полезно се оказва разглеждането на конкретни частни ситуации, т.е. формулиране на нови задачи посредством метода конкретизация. Тази идея е реализирана например в задача 10.22 в монографията [2, с. 232 – 236]. Затова тук няма да посочваме примери, а само ще отбележим, че там в процеса на търсене на решение на общата задача се наложи разглеждане (формулиране) на задачата в няколко частни случая, от които се изгради идея за стойността на търсения резултат и за намиране на решение в общия случай.

В заключение ще отбележим, че прилагането на различни методи за съставяне на задачи (не само използваните в тази статия, а и други, които ще бъдат обект на разглеждане в други публикации) обогатява възможностите за по-задълбочено усвояване на системите задачи в обучението по математика. Освен това овладяването на дейността съставяне на задачи е особено полезно за учителя по математика, защото облекчава съществено работата му при извършване на подбор на задачи за класна или контролна работа, а също при проверяването на решенията им. За целта той може да постъпи по следния начин. Първо, формулира (съставя) задачата в най-общ вид, решава я и получава общ отговор. Второ, чрез методите конкретизация или специализация формулира от общата задача конкретни задачи, които да са предназначени за различните ученици или групи ученици (съобразно техните индивидуални възможности), като дава на параметрите различни конкретни стойности. Трето, от отговора на общата задача лесно намира отговорите на всички конкретни задачи, които е формулирал.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Милушев, Д. Бойкина. О методике решения задач школьного курса математики. *Вісник Черкаського університету, Серія „Педагогічні науки“*, № 8 (261) (2013), 95 –

107, ISSN 2076-586X. [V. Milushev, D. Boykina. O metodike resheniya zadach shkol'nogo kursa matematiki Visnik Cherkas'kogo universitetu, Seriya "Pedagogichni nauki", № 8 (261), (2013), 95–107] (in Russian).

[2] Д. Милушева-Бойкина. Прочети, разбери и изгради идея. Монография, Пловдив: УИ „Паисий Хилендарски", 2021. 289 с. ISBN 978-619-202-675-2 [D. Milusheva-Boykina. Procheti, razberi i izgradi ideya. Monografiya, Plovdiv: UI "Paisiy Hilendarski", 2021. 289 pp] (in Bulgarian).

[3] Д. Пойа. Как да се решава задача. София, „Народна просвета", 1970, 152 с. [D. Polya. Kak da se reshava zadacha. Sofiya, "Narodna prosveta", 1970, 152 pp] (in Bulgarian).

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

ONE PROBLEM, MANY SOLUTIONS*

Plamen Gostev

Faculty of Mathematics and Informatics,
Sofia University "St. Kliment Ohridksi", Sofia, Bulgaria
and Sofia High School of Mathematics, Bulgaria
e-mail: gostev@fmi.uni-sofia.bg

During primary school students are introduced to basic geometry knowledge. As students go through high school, they acquire more and more complex knowledge. In the current article, we present different solutions to one problem, depending on the age and knowledge required to solve the problem. We'll start with two familiar problems. Then we'll generalize and we'll prove a lemma. In the last part we'll present different problems and their solutions that were born from the first two problems and the lemma.
Keywords: circle, regular polygon, diagonal.

ЗАДАЧА – ЕДНА, ПОДХОДИ МНОГО

Пламен Гостев

Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски", София, България
Софийска математическа гимназия „Паисий Хилендарски"
e-mail: gostev@fmi.uni-sofia.bg

Още в началния етап на образование учениците се запознават с основните геометрични понятия. В средния курс на обучение учениците придобиват базови знания, които постепенно се надграждат в гимназиалния етап от обучението.

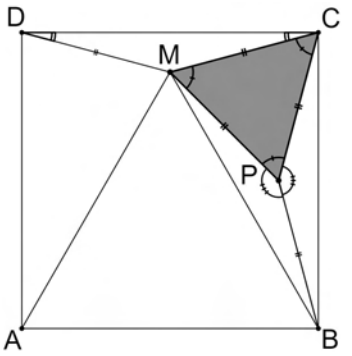
В настоящата статия ще демонстрираме различни подходи при решаване на една и съща задача. Ще започнем с две познати задачи, на които ще покажем решения за различни възрасти с постепенно обогатяване на знанията. От обобщението на тези задачи и доказателството на една лема се появяват няколко нови и интересни задачи, които биха дали на заинтересованите читатели идеи за съставяне на други такива.
Ключови думи: окръжност, правилен многоъгълник, диагонал

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.135-140
2020 Mathematics Subject Classification: 97G40.

Задача 1. В квадрата $ABCD$ е взета точка M такава, че $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = 15^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AMB$.

Решение. Добрият седмокласник бързо би разбрал, че с намирането на двойка еднакви триъгълници ще успее да докаже, че $\triangle ABM$ е равнобедрен. Но с базови знания – дотук. Тогава най-естествено би започнал да търси някакъв по-изобретателен подход. Един от най-честите такива е построяването на ъгъл с големина 60° и получаването на равностранен триъгълник. В случая точка M е „близо“ до страната CD, но нищо не пречи да има такава точка и до страната BC.

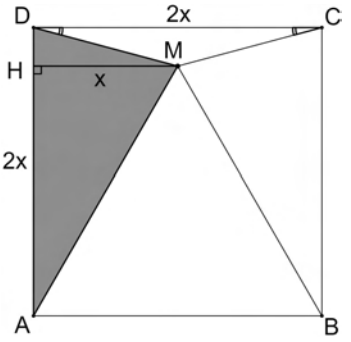
Правим построение по идея от статия [1]: точка P – вътрешна за квадрата такава, че $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PBC = 15^\circ$. Тогава се оказва, че $\sphericalangle PCM = 60^\circ$ и $\triangle CDM \cong \triangle BCP$, откъдето $\triangle MCP$ става равностранен. С пресмятане на ъгли достигаме до $\sphericalangle BPM = 150^\circ$. Тогава $\triangle BCP \cong \triangle BMP$, откъдето $BC = BM$ и $\sphericalangle CBM = 30^\circ$. Тогава $\triangle ABM$ става равностранен и достигаме до $\sphericalangle AMB = 60^\circ$.



Друг възможен подход е чрез решаването на вече позната задача: триъгълник с ъгъл от 75° и височина, равна на половината от страната, към която е спусната.

Нека $MH \perp AD$ ($H \in AD$). Тогава в $\triangle AMD$ височината (MH) към страната AD е два пъти по-къса от нея и $\sphericalangle ADM = 75^\circ$. Ще покажем, че $\triangle ADM$ е равнобедрен, $AD = AM$, откъдето ще следва, че $\triangle ABM$ е равностранен, съответно $\sphericalangle AMB = 60^\circ$.

За $\sphericalangle DAM$ има три възможности: да е по-голям от 30°, да е по-малък от 30° или да е точно 30°.



(1) Ако $\sphericalangle DAM > 30^\circ$, то $\sphericalangle DMA < 75^\circ$ и от неравенство между страни и ъгли в $\triangle ADM$ получаваме, че $\sphericalangle ADM = 75^\circ > \sphericalangle DMA$, следователно $AM > AD = 2x$. Но в правоъгълния $\triangle AMH$ с хипотенуза AM, $\sphericalangle HAM > 30^\circ$ и катета $HM = x$. Тогава $AM < 2HM = 2x$, противоречие.

(2) Ако $\sphericalangle DAM < 30^\circ$, с аналогични разсъждения отново стигаме до противоречие.

Така остава единствената възможност – $\sphericalangle DAM = 30^\circ$, с което задачата е решена.

Използвайки **единствеността** в съществуването на **точка** M, можем да формулираме следното елегантно решение, което би ни хрумнало при направа на точен чертеж и известен ни вече отговор. Нека точка M_1 от вътрешността на квадрата е такава, че $\triangle ABM_1$ е равностранен. Тогава достигаме до $\sphericalangle CDM_1 = \sphericalangle DCM_1 = 15^\circ$, откъдето точките M и M_1 съвпадат.

Възможно е задачата да бъде решена „**стандартно**“, с помощта на две косинусови теореми.

Нека страната на квадрата е y. Тогава от приложената за $\triangle CMD$ косинусова теорема получаваме, че $DM^2 = y^2(2 - \sqrt{3})$. След което отново чрез косинусова

теорема за $\triangle AMD$ получаваме, че $AM = y$, откъдето се получава, че $\triangle ABM$ е равностранен и $\sphericalangle AMB = 60^\circ$.

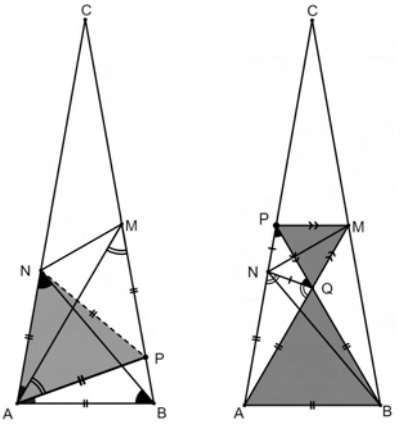
Обобщение. Разглеждаме описаната около квадрата окръжност. Имаме ъгли по 15°, тогава можем да разделим окръжността на 12 равни дъги от по 30°.

(1) В точка M се пресичат хордите $2-10$ и $3-11$. Разглеждаме $\triangle 2-5-11$: с помощта на синусовия вариант на Теоремата на Чева получаваме вярното равенство: $\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}.\frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ}.\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = 1$. Тогава хордите $2-10,\ 3-11$ и $5-12$ се пресичат в една точка. Аналогично през същата точка M минава и $1-8$. Следователно като вътрешен ъгъл за окръжността $\sphericalangle AMB$ е равен на полусбора от двете му съответни дъги, т.е. $\sphericalangle AMB = 60^\circ$.



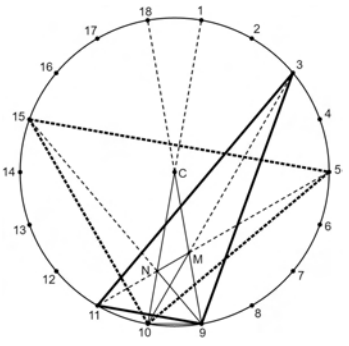
(2) Да разгледаме $\triangle 2-8-12$. Диагоналите $2-10,\ 1-8$ и $5-12$ са ъглополовящи на ъглите му, съответно точка M е център на вписаната му окръжност. Аналогично точка M е център и на вписаната в $\triangle 1-5-11$ окръжност, откъдето следва, че диагоналите $1-8,\ 2-10,\ 3-11$ и $5-12$ се пресичат в точка M, така отново намираме, че $\triangle AMB = 60^\circ$.

Задача 2. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с $\sphericalangle C = 20^\circ$. Точките M и N, съответно от страните BC и AC, са такива, че $\sphericalangle BAM = 60^\circ$ и $\sphericalangle ABN = 50^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AMN$.



Решение. Забелязваме, че $\triangle ABN$ е равнобедрен, защото $\sphericalangle ABN = \sphericalangle ANB$. Това ни насочва към построение, което да доведе до появата на равностранен триъгълник. Ако точка $P \in BC$ е такава, че $\sphericalangle BAP = 20^\circ$, тогава $\triangle ABP$ е равнобедрен ($AB = AP$), откъдето $\triangle ANP$ става равнобедрен с ъгъл 60°, т.е. равностранен. Но $\triangle AMP$ също е равнобедрен ($AP = PM$) с остри ъгли от по 40°. Също така $\triangle MNP$ е равнобедрен ($NP = MP$) и ъгълът при върха му е 40°. Тогава се намира, че търсеният $\sphericalangle AMN = 30^\circ$.

Друго възможно построение е на права през M, успоредна на основата AB, която пресича бедрото AC в точка P. Означаваме пресечната точка на AM и BP с Q. Тогава $\triangle ABQ$ и $\triangle MPQ$ са равностранни. Обаче $AB = AN$, $\triangle ANQ$ е равнобедрен и $\sphericalangle NQA = 80^\circ$. Но $\sphericalangle PQM = 60^\circ$, следователно $\sphericalangle NQP = 40^\circ$, откъдето $\triangle NPQ$ е равнобедрен. От еднаквостта на $\triangle MNP$ и $\triangle MNQ$ следва, че $\sphericalangle AMN = 30^\circ$.

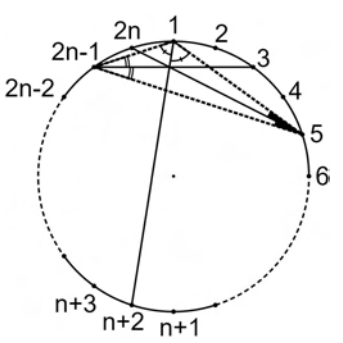


Обобщение. Да разгледаме окръжността с център върха на триъгълника и радиус, равен на бедрото му. Имаме вписани ъгли, кратни на 10°, заради което

разделяме окръжността на 18 равни дъги по 20°.

Тогава отново с помощта на синусовия вариант на Теоремата на Чева за $\triangle 3{-}9{-}11$ и вярното равенство $\frac{\sin 20}{\sin 40}.\frac{\sin 70}{\sin 30}.\frac{\sin 10}{\sin 10} = 1$ получаваме, че хордите $3-10$, $5-11$ и $9-18$ се пресичат в една точка (M). Аналогично, разглеждайки $\triangle 5-10-15$, получаваме, че хордите $1-10$, $5-11$ и $9-15$ се пресичат в една точка (N). Може да се използва и че точка N е център на вписаната окръжност в $\triangle 1-9-11$. Тогава търсеният $\sphericalangle AMN$ е равен 30°.

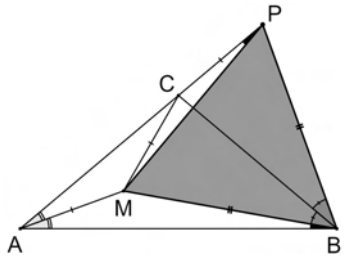
Разглеждайки изложените решения, можем да се замислим какви разновидности на тези задачи можем да създадем. В направата на всяка ще бъдат подходящо подбрани диагонали на правилен многоъгълник, минаващи през една точка. Първо ще докажем една лема, която е дадена като задача 6.114 на стр. 163 в книгата [2]. От тази лема ще се раждат нататъшните ни идеи за задачи.



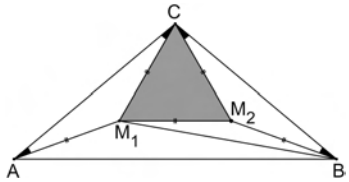
Лема. *В правилен $2n$-ъгълник диагоналите $1-(n+2)$, $3-(2n-1)$ и $5-2n$ се пресичат в една точка.*

Доказателство. Разглеждаме $\triangle 1-5-(2n-1)$. В него въпросните диагонали са ъглополовящи на ъглите му. Следователно се пресичат в една точка (центърът на вписаната му окръжност).

Задача 3. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ $(AC = BC)$ с $\sphericalangle C = 100^\circ$. Точка M от вътрешността му е такава, че $\sphericalangle MAB = 20^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 10^\circ$. Да се намери $\sphericalangle BCM$.

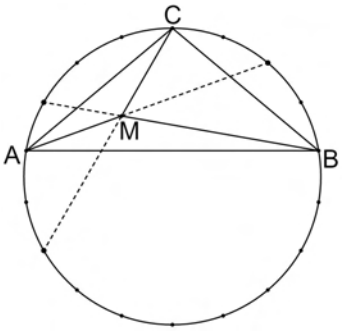


Решение. Ще разгледаме подход с допълнително построение, което води до поява на **равностранен триъгълник**. Нека точка $P \in AC^{\rightarrow}$ е такава, че $AP = AB$. От еднаквостта на $\triangle BAM$ и $\triangle PAM$ следва, че $BM = PM$, но $\sphericalangle MBP = 60^\circ$, откъдето $\triangle BMP$ е равностранен. Тогава BC е симетрала на PM, откъдето $CM = CP$ и достигаме до $\sphericalangle BCM = 80^\circ$.



В тази задача можем отново да ползваме **единствеността** на **точка** M. Нека точка M_1 от вътрешността на триъгълника е такава, че $\sphericalangle BAM_1 = \sphericalangle CAM_1 = \sphericalangle ACM_1 = 20^\circ$. Ако докажем, че $\sphericalangle M_1BA = 10^\circ$, то M_1 и M съвпадат и търсеният $\sphericalangle BCM = 80^\circ$.

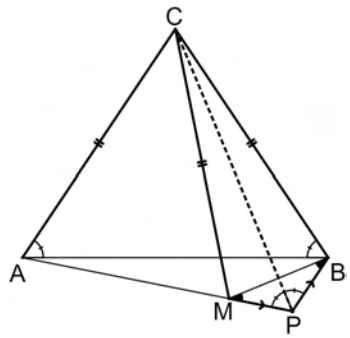
Нека M_2 е вътрешна за триъгълника точка, за която $\sphericalangle M_2CB = \sphericalangle M_2BC = 20^\circ$. Тогава $\triangle ACM_1 \cong \triangle BCM_2$ и се получава, че $\triangle CM_1M_2$ е равностранен. $\triangle BM_1M_2$ е равнобедрен с ъгъл 160°, откъдето намираме, че $\sphericalangle M_1BA = 10^\circ$, с което задачата е решена.



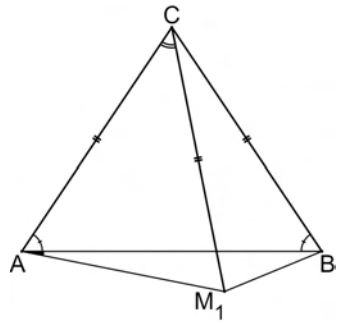
Възможно е задачата да се реши стандартно със **синусови теореми**, както и с разглеждане на **описаната** около $\triangle ABC$ **окръжност**, разделена на 18 равни дъги. Тогава с помощта на синусовия вариант на Теоремата на Чева се стига до извода, че три от диагоналите на правилния осемнадесетоъгълник се пресичат в една точка (M).

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$ с ъгли, за които е изпълнено $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 5 : 5 : 6$. Точка M е такава, че $3\sphericalangle ABM = 6\sphericalangle BAM = \sphericalangle ACB$, като точките C и M са в различни полуравнини спрямо правата AB. Намерете $\sphericalangle AMC$.

Решение. Означаваме големините на ъглите на триъгълника с $5x$, $5x$ и $6x$, съответно. Нека пресечната точка на правата AM и **правата**, която минава през B и е **успоредна** на AC, е P. Тогава $\sphericalangle MBP = 3x$ и $\sphericalangle BPM = 10x$. От $\triangle BPM$ намираме, че $\sphericalangle PMB = 3x$, т.е. $PM = PB$. $ACBP$ е равнобедрен трапец, тогава $\sphericalangle ABC = \sphericalangle APC = 5x$. Следователно PC е ъглополовяща на $\sphericalangle MPB$, откъдето $\triangle CPM \cong \triangle CPB$ и $CM = CB$. Оттук достигаме до $\sphericalangle AMC = 6x = 67{,}5°$.



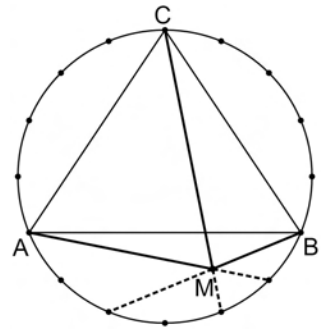
И в тази задача можем да използваме **единствеността на точка** M. Нека точка M_1 е външна за триъгълника и е такава, че $\sphericalangle M_1CA = 4x$ и $\sphericalangle M_1AB = x$. Ако докажем, че $\sphericalangle M_1BA = 2x$, то точките M_1 и M ще съвпадат и задачата на практика е решена. Разглеждайки $\triangle AM_1C$, намираме, че $\sphericalangle CM_1A = 6x$, откъдето $AC = CM_1$. Но $AC = BC$, следователно $\triangle BCM_1$ е равнобедрен. Тогава $\sphericalangle ABM_1 = 2x$ и точките M и M_1 съвпадат.



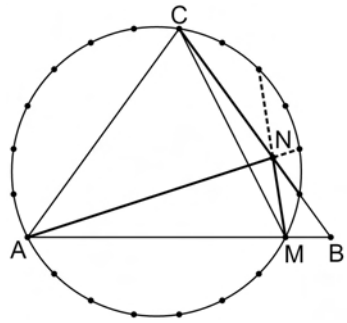
Можем да решим задачата и като разгледаме описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Тогава от доказаната **лема** следва, че хордите, определени от правите AM, BM и CM, са **диагонали** на правилен шестнадесетоъгълник, които се пресичат в една точка. Оттук достигаме до $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ACB$.

(Задача 4. може да бъде формулирана и така: Даден е $\triangle ABC$ с ъгли, за които е изпълнено $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 3 : 3 : 2$. Точките M и N, съответно от страните BC и AC, са такива, че $\sphericalangle BAM = \dfrac{2}{3}\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABN = \dfrac{5}{6}\sphericalangle ABC$. Да се намери $\sphericalangle AMN$.

Тук разглеждаме окръжността, описана около $\triangle ABN$, и я разделяме на 16 равни дъги.)



Задача 5. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с $\sphericalangle C = 72^\circ$. Точките M и N, съответно от страните AB и BC, са такива, че $\sphericalangle ACM = 63^\circ$ и $\sphericalangle CAN = 36^\circ$. Да се намери $\sphericalangle CMN$.



Решение. Тук разглеждаме описаната около $\triangle AMC$ окръжност. В нея хордите, определени от правите AN, CN и MN, са диагонали на правилен двадесетоъгълник, които се пресичат в една точка, което отново следва от доказаната лема. По подобен начин, както в предишните задачи, достигаме до $\sphericalangle CMN = 18^\circ$.

Заключение. Авторът се надява, че читателят ще се заинтригува от подходите и самостоятелно ще разшири темата чрез съставяне на нови задачи или решаване на някои от изложените чрез други подходи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Алексиева. Равностранни триъгълници за ученици, кандидатстващи след 7 клас, Математика плюс, 1 (2002), 53–54 [A. I. Aleksieva. Ravnostranni triagalnitsi za uchenitsi, kandidatstvashti sled 7 klas, Matematika plyus, 1 (2002), 53–54].

[2] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии, Москва, МЦНМО, 2006 [V. V. Prasolov. Zadachi po planimetrii, Moskva, MTSNMO, 2006].

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

THE HEURISTIC "DIVIDING INTO SUBPROBLEMS" IN SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS IN 7-th GRADE*

Tsvetelina Zhelyazkova[1], **Dobrinka Boykina**[2]
Faculty of Mathematics and Informatics,
University of Plovdiv "Paisii Hilendarski", Plovdiv, Bulgaria
e-mails: [1]tsvetelina.zhelyazkova@yahoo.com, [2]boikina@uni-plovdiv.bg

The article is devoted to the heuristic activity in math problem solving education. A brief overview of publications related to the using of heuristics in solving problems is included. A series of geometric math problems illustrating the application of the heuristics "dividing into subproblems" and discovering suitable additional constructions in 7-th grade is proposed.
Keywords: heuristics, geometric problems, dividing into subproblems.

ОТНОСНО ЕВРИСТИКАТА „ОТДЕЛЯНЕ НА ПОДЗАДАЧИ“ ПРИ РЕШАВАНЕ НА ГЕОМЕТРИЧНИ ЗАДАЧИ В 7. КЛАС

Цветелина Желязкова[1], **Добринка Бойкина**[2]
Факултет по математика и информатика,
Пловдивски университет „П. Хилендарски“, Пловдив, България
e-mails: [1]tsvetelina.zhelyazkova@yahoo.com, [2]boikina@uni-plovdiv.bg

Настоящата статия е посветена на евристичната дейност при обучението в решаване на задачи. Направен е кратък обзор на публикации, свързани с използването на евристики при решаването на математически задачи. Предложена е серия от геометрични задачи, предназначени за 7. клас, с които се илюстрира приложението на евристиките „отделяне на подзадачи“ и откриване на подходящи допълнителни построения.
Ключови думи: евристика, геометрични задачи, отделяне на подзадачи.

Въведение. Решаването на немалка част от математическите задачи може да се сведе до решаване на техните задачи-компоненти, до които се достига в резултат на провеждане на евристична беседа и прилагане на евристични прийоми – „особени мисловни прийоми, които се формират в хода на решаване на едни задачи и, в помалка или в по-голяма степен, съзнателно се пренасят при търсене решения и на

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.141-148
2020 Mathematics Subject Classification: 97D50.

други задачи.“ [6, с. 63]. Е. Скафа и В. Милушев разглеждат базови евристики при решаване на задачи като: „прийоми за преобразуване на изискванията на задачата, отделяне на следствия, съставяне на спомагателни (промеждутъчни) задачи и т.н.“ [6, с. 91]. В този аспект базовата евристика „отделяне на подзадачи“ има съществена роля в процеса на търсене и откриване решения както на алгебрични, така и на геометрични задачи.

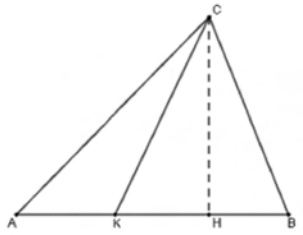
Целта на настоящата статия е да се представят различни приложения на евристиките „отделяне на подзадачи“ и откриване на подходящи допълнителни построения при решаване на геометрични задачи в 7. клас.

Въпросът за използване на евристики при търсене на решения на задачи се разглежда от редица автори и изследователи. Така например, Ив. Тонов в монографията [11, с. 160–173] разглежда стратегия за използването на ***междинна стъпка*** при доказване на неравенства. З. Лалчев и И. Вутова в статията [5] именуват помощните елементи, които свързват условието и заключението на дадена задача, с термина „***свързващи елементи***“ и представят идея за търсене на решения на конкретни геометрични задачи. Така обособяването и решаването на получените задачи довежда до решението на дадената. Д. Пойа обръща внимание на ролята на ***помощните (спомагателни) задачи***, като отбелязва, че „Част от решението на помощната задача (или дори цялото) може да стане част от решението на първоначалната задача“ [9, с. 236]; „помощната задача може да дава *методологична помощ*; тя може да подскаже метода на решението, скица на решението или насоката, в която трябва да се започне работа и т.н.“ [9, с. 236]. А освен това помощната задача може да има и „стимулиращо влияние“ [9, с. 236]. Авторът посочва още, че „С отделяне внимание върху помощни задачи, с работа върху тях и с придобития при това опит ние имаме добра възможност да вземаме решения в правилна насока“ [9, с. 237]. Също така „Понякога може да се захванем с една помощна задача само за *практика*“ [9, с. 237].

Примерни задачи. Откриването на задачи-компоненти в процеса на търсене на решения може да бъде подготвено чрез включването им (или на сходни такива) в системи от задачи, предхождащи разглежданата. В следващите редове ще представим някои примери, като акцентът ще бъде поставен върху обособяването на подзадачи на разглежданата. Изборът на конкретните задачи е мотивиран от идеята на авторите за имплементиране на добре познатите задачи за сравняване на лица на равнинни фигури, разглеждани в часовете за избираема подготовка в 6. клас (приложение на пропорциите при решаване на геометрични задачи), при решаване на тривиални примери в задължителните учебни часове в 7. клас. Основни цели при решаването на предложените задачи са: (1) осъществяване пренос на знания, използвайки по-рано изучените основни задачи (виж ОЗ1 и ОЗ2 по-долу); (2) повишаване на степента на сложност на често срещаните задачи от седмокласния материал чрез прибавяне на допълнителна компонента, а именно използване лица на триъгълници. Във връзка с посочените по-горе цели се използват като базови задачи примерни такива в учебници и сборници по математика за 7. клас, които се изменят чрез добавяне на подзадача, свързана с лица на триъгълници. Поради голямото разнообразие на математически задачи в училищния курс по математика, допускаме възможността някои от предложените по-долу примери (или подобни на тях) да са включени и в учебни помагала по съответния предмет за седмокласници.

В решенията на задачите в настоящата разработка се включват следните основни задачи, свързани с лица на фигури:

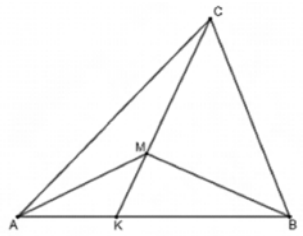
ОЗ1: *Ако два триъгълника имат по една равна височина, то лицата им се отнасят както дължините на страните, към които са построени равните височини.* [10, с. 7]



Фиг. 1

В част от предложените примери се разглеждат случаи, при които два триъгълника имат общ връх, а основите им лежат на една права (фиг. 1).Тогава е в сила пропорцията $\frac{S_{AKC}}{S_{BKC}} = \frac{AK}{BK}$.

ОЗ2: *Ако точка K е произволна точка от страната на триъгълник ABC, а точка M е произволна точка от отсечката CK* (фиг. 2), *то* $\frac{S_{AMC}}{S_{BMC}} = \frac{S_{AKM}}{S_{BKM}} = \frac{AK}{BK}$.



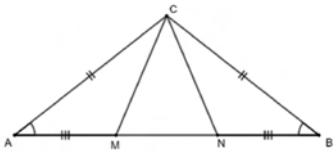
Фиг. 2

ОЗ2 се явява обобщение на [2, с. 150].

Преди да се приложат (използват като помощни), посочените задачи могат да се разгледат като част от система задачи за лица на фигури. В предложената поредица от конкретни примери ще демонстрираме използването на базовата евристика „отделяне на подзадачи“ при решаването на задачи, чиито компоненти се явяват ОЗ1 или ОЗ2, както и се прилагат знания по геометрия от задължителните учебни часове в 7. клас. С оглед на ограничения обем, няма да се спираме на подробни обяснения в решенията.

Първите два примера използват задача, подходяща за задължителните часове (Задача A):

Задача A. [4, с.18] Симетралите на бедрата AC и BC на равнобедрен $\triangle ABC$ пресичат основата AB съответно в точки M и N (M е между A и N) такива, че $AM = MN = NB$. Намерете градусната мярка на $\sphericalangle ACB$.



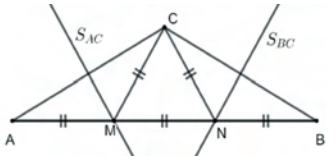
Фиг. 3

Задача 1. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Ако точките M и N са от страната AB (M е между A и N; N е между M и B) такива, че $S_{ANC} = S_{BMC}$ (фиг. 3), да се докаже, че $\triangle MNC$ е равнобедрен.

В решението последователно се доказва, че: (1) $AN = BM \Leftrightarrow AM = BN$, като се използва ОЗ1; (2) $\triangle AMC \cong \triangle BNC$ по първи признак; (3) $\triangle MNC$ е равнобедрен.

След решаване на задачата, в етапа „Поглед назад“ може да се коментира при какви условия $\triangle MNC$ е равностранен. Като естествено продължение на дадената задача се явява следната.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$. Симетралата на AC пресича AB в точка M, а симетралата на BC пресича AB в точка N, като точка M е между A и N, а точка N е между M и B (фиг. 4). Ако е известно, че $S_{AMC} = S_{MNC} = S_{NBC}$, да се намери големината на $\sphericalangle ACB$.

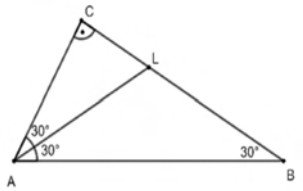


Фиг. 4

Решението на тази задача включва решаване на следните задачи-компоненти:

(1) доказателство, че $AM = MN = NB$, което се доказва с помощта на ОЗ1; (2) $\triangle MNC$ е равностранен; (3) намиране големините на $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 30^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$.

Задача 3. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Ако $\sphericalangle A = 60^\circ$, AL ($L \in BC$) е ъглополовяща и $S_{ABL} = 20$ cm^2 (фиг. 5), да се намери S_{ABC}.



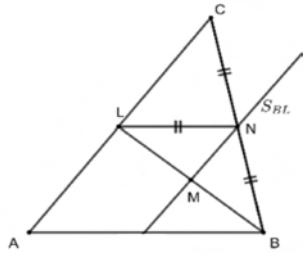
Фиг. 5

В решението на задачата включваме следните подзадачи: (1) $BL : CL = 2 : 1$; (2) $\dfrac{S_{ABL}}{S_{ALC}} = \dfrac{BL}{CL} = \dfrac{2}{1}$ (ОЗ1); (3) $S_{ABC} = S_{ABL} + S_{ALC} = 30$ cm^2.

Твърдение (1) е добре познато на седмокласниците (виж [7, с. 178 – 179]). Все пак неговото доказателство включва някои подзадачи:

В $\triangle ALC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) се установява, че $CL = \dfrac{1}{2}AL$ ($AL = 2CL$), като се прилага теоремата: „*Ако в правоъгълен триъгълник един от ъглите е* 30°*, то катетът срещу този ъгъл е равен на половината от хипотенузата.*“ [7, с. 176]; Доказва се, че $\triangle ABL$ е равнобедрен (ъглите при основата AB са равни) и съответно $BL{=}AL{=}2CL$.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$, в който BL ($L \in AC$) е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$. Симетралата на BL пресича BL и BC съответно в точки M и N (фиг. 6). Ако $S_{LNC} = 2S_{MBN}$, да се докаже, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

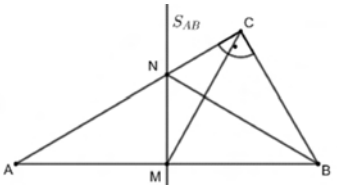


Фиг. 6

Задачите-компоненти включват доказателства на следните твърдения: (1) $S_{LNM} = S_{MBN}$ (NM е медиана в LBN); (2) точка N е среда на BC (следва от $S_{LNC} = 2S_{MBN} = S_{LNB}$); (3) $\sphericalangle BLC = 90^\circ$;

(4) $\triangle ABC$ е равнобедрен (BL – ъглополовяща и височина).

Задача 5. В правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) $AC > BC$, симетралата на хипотенузата пресича AB в точка M и AC в точка N (фиг. 7). Ако $S_{BNC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$, да се намери $\sphericalangle MCB$.



Фиг. 7

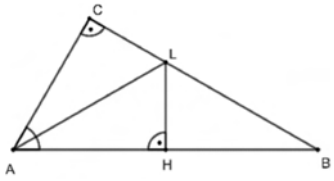
Подзадачите са: (1) доказва се, че $CN = \dfrac{1}{2}AN$ (използвайки като помощна ОЗ1), откъдето следва, че $CN = \dfrac{1}{2}BN$ (тъй като $AN = BN$); (2) намират се ъглите на $\triangle BNC$ и $\triangle ABC$ (прилагайки теоремата за правоъгълен триъгълник, в който катет е равен на половината от хипотенузата); (3) установява се, че $\sphericalangle MCB = \sphericalangle MBC = 60^\circ$ (използвайки теоремата за медиана в правоъгълен триъгълник).

Задачите с допълнителни построения често се оказват нелеко предизвикателство за много от седмокласниците. П. Петров изгражда оригинална евристична схема за търсене и откриване на пътя за решаване на геометрични задачи, която прилага многократно при множество конкретни задачи от училищния курс в своята монография [8]. С оглед обучаване на учещите, той при всяка задача поставя акцент на

самото **откриване** на съответния път, като за целта мотивира всяко допълнително построение или предстояща стъпка. В книгата „Допълнителните построения – магията на геометрията“ Н. Иванова разглежда допълнителните построения по степен на определеност [4, с. 8 – 11] и посочва, че това „има за цел да подскаже критерии за съвместимостта на тяхната реализация с възможностите на определена възрастова група, за тяхната посилност на даден етап от обучението в средното училище. То съдейства за аргументирането на последователността и етапността при формиране на умения за прилагане на метода на допълнителните построения и ориентира към по-конкретни идеи, свързани със систематизация на допълнителните построения и с възможности за алгоритмизация на някои видове допълнителни построения“ [4, с. 11 – 12]. Също така в статията [3] С. Гроздев и Т. Чехларова разглеждат действието ***„добавяне“*** (и негов частен случай – допълнително построение в геометрични задачи) и поставят акцент на идеята за автоматизирането и превръщането му в операция.

В настоящата статия няма да се спираме подробно върху използването на допълнителните построения при обучението в решаване на геометрични задачи, но в следващото изложение ще разгледаме няколко конкретни примера, при които се прилага евристиката допълнително построение, в резултат на което се конструират подзадачи за дадената.

Задача 6. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Ако AL е ъглополовяща ($L \in BC$) и $S_{ABL} : S_{ALC} = 2 : 1$ (фиг. 8), намерете големината на $\sphericalangle ABC$.



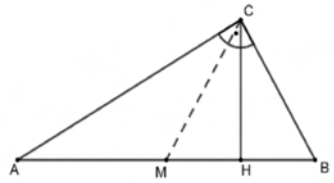
Фиг. 8

При решението тук се използва ОЗ1 и се установява, че $BL : CL = 2 : 1$, т.е. $BL = 2CL$. (*)

След преформулиране на задачата тя може да се окаже позната на учениците (виж [4, с.34]). Ако до този момент тя не е решавана, полученото равенство (*) дава идея да се построи $LH \perp AB$, $H \in AB$. Това допълнително построение определя следващите подзадачи.

Учениците от 7. клас със сигурност ще забележат, че в правоъгълния триъгълник LHB катетът LH е равен на половината от хипотенузата и тогава ще намерят големината на $\sphericalangle HBL = 30^\circ$, т.е. $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Допълнителното построение се явява „свързващият елемент“, благодарение на който се реализира решението.

Задача 7. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Ако CH е височина към хипотенузата и $S_{HCB} = \frac{1}{4} S_{ABC}$ (фиг. 9), да се намери $\sphericalangle BAC$.

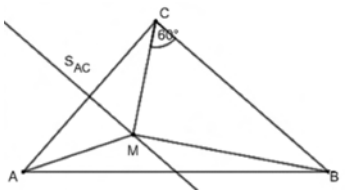


Фиг. 9

При решаване на задачата отново се прилага ОЗ1, след което се установява, че $HB = \frac{1}{4} AB$ или $AH = 3HB$. Така преформулираната задача в повечето случаи се оказва позната за учениците (виж [4, с.34]), тъй като доказателството на обратното твърдение е често срещано в учебниците за 7. клас (виж [7, с.178]). Получената тук връзка $HB = \frac{1}{4} AB$ между дължините на тези отсечки насочва към идеята за „работещо“ допълнително построение. Решаването на задачата включва построяване на медианата CM към хипотенузата ($M \in AB$), при което се обособява $\triangle MBC$, за който се доказва, че е равностранен. След това се намира и големината

на $\sphericalangle BAC = 30^\circ$.

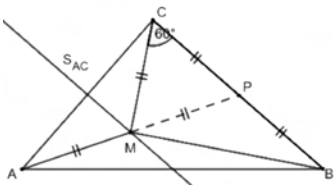
Задача 8. Даден е $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$). Върху симетралата на катета AC е взета точка M такава, че $\sphericalangle BCM = 60^\circ$ (фиг. 10). Ако $S_{AMC} = S_{AMB}$, докажете, че $\triangle BMC$ е правоъгълен и $BM = AC$.



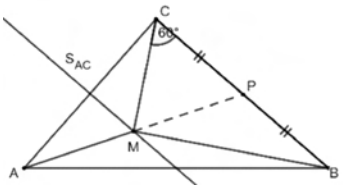
Фиг. 10

Фактът, че $\triangle AMC$ и $\triangle AMB$ са равнолицеви с обща страна AM насочва към идеята за продължаване на AM до пресичането ѝ със страната BC (в точка P), фиг. 11. Досещането за това допълнително построение може да се подготви чрез предварително запознаване на учениците с ОЗ2.

Като подзадачи на дадената задача се обособяват: (1) намирането на ъглите на $\triangle AMC$ (който е равнобедрен поради характеристичното свойство на симетралата на AC); (2) пресмятане на $\sphericalangle CMP$ (като външен ъгъл за $\triangle AMC$ или съседен на $\sphericalangle AMC$); (3) установяване, че $\triangle CMP$ е равностранен (фиг. 12).

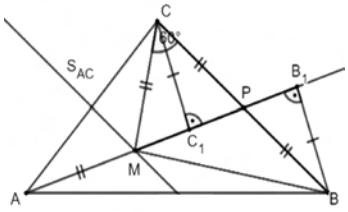


Фиг. 11



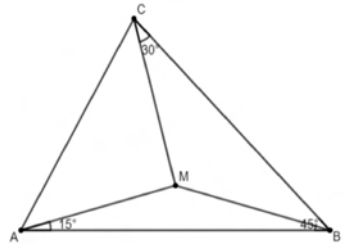
Фиг. 12

Разбира се, учениците могат да разсъждават и така: „Щом $\triangle AMC$ и $\triangle AMB$ са равнолицеви с обща страна AM, то височините им към нея, спуснати от върховете C и B, са равни. Затова, ако се разгледат $\triangle CC_1P$ и $\triangle BB_1P$, където CC_1 и BB_1 са упоменатите височини, то те са еднакви по втори признак. От тяхната еднаквост следва, че $CP = BP$, т.е. MP е медиана в $\triangle CMP$.“ (фиг. 13). Тогава, прилагайки теоремата „*Ако в триъгълник медианата към страна е равна на половината от страната, то ъгълът срещу тази страна е прав.*“ [2, с. 152], учениците лесно доказват, че $\triangle BMC$ е правоъгълен. За доказателството на $BM = AC$ е целесъобразно да се насочат към включване на отсечките в еднакви триъгълници, посредством които да „свържат“ дадените отсечки. След естественото откриване на ъглите на $\triangle BMP$, като последна подзадача на дадената, се доказва еднаквостта на $\triangle AMC$ и $\triangle BPM$ (по първи признак).



Фиг. 13

Полученият равностранен триъгълник се оказва „ключов елемент“ при откриването на решението. В следващата задача се използва същото допълнително построение, което води до обособяване на различни задачи-компоненти.

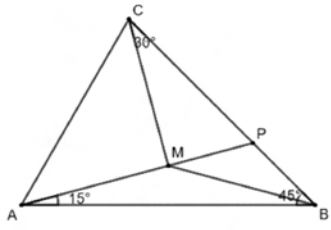


Фиг. 14

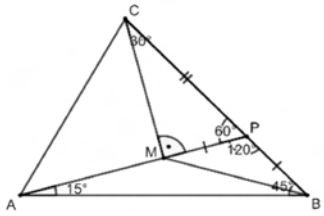
Задача 9. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ (фиг. 14). Точка M е вътрешна за триъгълника такава, че $\sphericalangle MAB = 15^\circ$, $\sphericalangle MCB = 30^\circ$ и $\dfrac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \dfrac{1}{2}$. Да се намерят $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle BAC$.

Нека AM пресича BC в точка P (фиг. 15). Като задачи-компоненти на дадената се явява намирането на ъглите на $\triangle MPC$, $\triangle MBP$, $\triangle ABM$, $\triangle AMC$ (фиг. 16). Учениците бързо откриват, че $\sphericalangle APB = 120^\circ$, $\sphericalangle MPC = 60^\circ$, $\sphericalangle CMP = 90^\circ$ и доказват, че $MP = \dfrac{1}{2}CP$ (1).

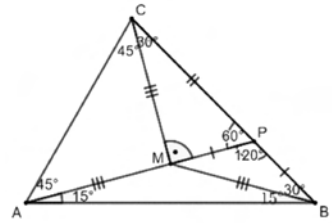
Като се приложи ОЗ2, т.е. $\dfrac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \dfrac{BP}{CP} = \dfrac{1}{2}$ (фиг. 17), се получава $BP = \dfrac{1}{2}CP$ (2). Тогава от равенства (1) и (2) следва, че $MP = BP$, откъдето се установява, че MBP е равнобедрен. Последователно се доказва, че $MB = MC = MA$ и се намират търсените ъгли $\sphericalangle ACB = 75^\circ$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.



Фиг. 15



Фиг. 16



Фиг. 17

След решаване на предходните задачи, анализиране на техните решения и акцентиране на идеята за използване на съответното конкретно допълнително построение, е уместно да се предложат и следните задачи (или техни сродни), използващи същата идея – допълнително построение. Те са предназначени за самостоятелна работа:

Задача 10. [1, с. 137] В триъгълника ABC е избрана точката M по такъв начин, че $\sphericalangle AMC = 120^\circ$, $\sphericalangle BCM = 60^\circ$ и $AM + MC = BC$. Да се докаже, че $BM = AC$.

Задача 11. [1, с. 147] В равнобедрения ABC ъглите при основата са по 40°. В триъгълника е избрана вътрешна точка така, че $\sphericalangle MAB = 10^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 20^\circ$. Да се намери $\sphericalangle ACM$.

Чрез осъществяване на пренос на знания от по-рано разглеждани задачи за отношение на лица на триъгълници, в съчетание с приложение на новите знания от 7. клас, учениците естествено се насочват към идеята за търсене на „работещо“ допълнително построение. Така „сложната“, на пръв поглед, за учениците многокомпонентна задача се оказва достъпна и решима, защото решението ѝ е „трасирано“ от познати помощни задачи, които в някои случаи естествено насочват към подходящо допълнително построение. На следващ етап в обучението предлагаме на учениците решаване на задачи, сходни със задачи 10. и 11., като разглеждането на предходните, които по-горе представихме, подпомагат досещането за работещата идея при тяхното решаване.

Заключение. Представената серия от задачи е целесъобразно да се използва в избираемите учебни часове по математика в 7. клас. Учителят би могъл да изменя, допълва и организира своя система от задачи, приложима за конкретната цел на

занятието, в съответствие с нивото на владеене на учебния материал и особеностите на обучаваната група. Считаме, че настоящата серия от задачи може да се обогати както по отношение на приложението на различни основни задачи, свързани с лица на фигури от 5 – 6. клас, имплементирани в решенията на задачи, достъпни със седмокласен учебен материал, така и по отношение на други допълнителни построения, които се използват при решаването им.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Величков. Сборник задачи и тестове по математика за 7. клас. Първо издание, София, Регалия 6, 2008. [V. Velichkov. Sbornik zadachi i testove po matematika za 7. klas. First Edition. Sofia: Regalia 6, 2008.] (in Bulgarian).

[2] Т. Витанов, А. Калчева, И. Джонджорова, М. Кьосева, П. Тодорова. Математика за 7. клас. ИК „Анубис“, 2018. [T. Vitanov, A. Kalcheva, I. Djondjorova, M. Kyoseva, P. Todorova. Matematika za 7. klas. IK "Anubis", 2018] (in Bulgarian), https://sales.anubis-bulvest.com/parents/useBook/409

[3] С. Гроздев, Т. Чехларова. Върху действието „добавяне“ в дейността „решаване на задачи“. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 331 – 340. [S. Grozdev, T. Chehlarova. On the action of addition in the activity of problem solving. *Math. and Education in Math.*, **36** (2007), 331–340] (in Bulgarian).

[4] Н. Иванова. Допълнителните построения – магията на геометрията (Учебно пособие по математика за 7. клас). Пловдив, Коала прес, 2013 [N. Ivanova. Dopylnitelnite postroeniya – magiyata na geometriyata (Uchebno posobie po matematika za 7. klas). Plovdiv, Koala pres, 2013] (in Bulgarian).

[5] З. Лалчев, И. З. Вутова. Свързващ елемент. *Математика и математическо образование*, **32** (2003), 369 – 373. [Z. Lalchev, I. Z. Vutova. Svarzvasht element. *Math. and Education in Math.*, **32** (2003) 369–373] (in Bulgarian).

[6] В. Милушев, Е. Скафа. Конструиране на учебно-познавателната евристична дейност по решаване на математически задачи. Пловдив: УИ „Паисий Хилендарски“, 2009 [V. Milushev, E. Skafa. Konstruirane na uchebno-poznavatelna deinost po reshavane na matematicheski zadachi. Plovdiv: UI "Paisii Hilendarski", 2009].

[7] П. Нинкова, М. Лилкова, Т. Стоева, И. Шаркова, Л. Раденкова. Математика за 7. клас. София: „Просвета – София“, 2018 [P. Ninkova, M. Lilkova, T. Stoeva, I. Sharkova, L. Radenkova. Matematika za 7. klas. Sofia: "Prosveta – Sofia", 2018] (in Bulgarian).

[8] П. Петров. Евристична схема за откриване на решения на планиметрични задачи. Пособие за учителя. – Ст. Загора, 1993. [P. Petrov. Evristichna shema za otkrivane na reshenia na planimetrichni zadachi. Posobie za uchitelya. – St. Zagora, 1993] (in Bulgarian).

[9] Д. Пойа. Математическото откритие. София: Народна просвета, 1968. [G. Polya. Matematicheskoto otkritie. Sofia: Narodna Prosveta, 1968] (in Bulgarian).

[10] П. Рангелова, Ив. Старибратов. 111 задачи за сравняване лица на равнинни фигури. Методическо ръководство по математика за ученици от 5. до 7. клас и техните преподаватели. Пловдив, Коала прес, 2011 [P. Rangelova, Iv. Staribratov. 111 zadachi za sravnyavane litsa na ravninni figuri. Metodichesko rykovodstvo po matematika za uchenitsi ot 5. do 7. klas i tehnite prepodavateli. Plovdiv, Koala pres, 2011] (in Bulgarian).

[11] И. Тонов. Евристиката – наука, изкуство, занаят. Хабилитационен монографичен труд, София: СУ „Св. Климент Охридски“, 2012 [I. Tonov. Evristikata – nauka, izkustvo, zanayat. Habilitatsionen monografichen trud. Sofia: Sofia University "St. Kliment Ohridski", 2012] (in Bulgarian).

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

COMPUTATIONAL THINKING AND EDUCATIONAL GOALS IN TWO COMPETITION PAPERS FROM THE THIRTY-SECOND CHERNORIZEC HRABAR TOURNAMENT*

Borislav Lazarov[1], **Albena Vassileva**[2]

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
e-mails: [1]lazarov@math.bas.bg, [2]albena@math.bas.bg

The article provides a brief overview of two competition papers from the thirty-second Chernorizec Hrabar tournament. Via examples, the relationship of some types of computational thinking from Weintrop's taxonomy to the covering some specific educational goals in the initial stage of the Bulgarian primary education is examined.
Keywords: computational thinking, Chernorizec Hrabar Tournament, Weintrop taxonomy, primary math education.

АЛГОРИТМИЧНО МИСЛЕНЕ И ОБРАЗОВАТЕЛНИ ЦЕЛИ В ДВЕ СЪСТЕЗАТЕЛНИТЕ ТЕМИ НА ТРИДЕСЕТ И ВТОРОТО ИЗДАНИЕ НА ТУРНИРА „ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАБЪР“

Борислав Лазаров[1], **Албена Василева**[2]

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mails: [1]lazarov@math.bas.bg, [2]albena@math.bas.bg

В статията е направен кратък обзор на две теми от тридесет и второто издание на турнира *Черноризец Храбър*. Чрез примери е разгледано отношението на някои типове алгоритмично мислене от таксономията на Вайнтроп към постигането на конкретни образователни цели в началния етап на основното образование.
Ключови думи: алгоритмично мислене, турнир „Черноризец Храбър“, таксономия на Вайнтроп, начално математическо образование.

Въведение. През 2023 г. турнирът *Черноризец Храбър* се проведе за тридесет и втори път, което е показател за траен интерес към тази инициатива. Повече информация за развитието и измеренията на турнира *Черноризец Храбър* може да се

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.149-153
2020 Mathematics Subject Classification: 97C30, 97D30, 97U40.

намери в статията [1]. Наред с образователните задачи, Турнирът е източник на данни и предоставя платформа за изследователска дейност в областта на математическото образование. Настоящото изследване се явява продължение на разработката [2], посветена на ролята на алгоритмичното мислене (computational thinking) за постигането на конкретни образователни цели в началния етап на основната степен, формулирани в нормативната база [4].

Теоретична основа и параметри на изследването. Приемаме алгоритмичното мислене като „мисловните процеси, включени в представянето на решения на задачи, като алгоритми или последователни изчислителни стъпки“ [5, p. 266]. Нашата теза е, че алгоритмичното мислене, заедно с определени дедуктивни умения, е основата, върху която се формира математическо мислене от висок порядък. Поради това създаването на методика за формиране и развитие на алгоритмично мислене (съкратено АМ) намираме за централна тема в математическото образование в началния етап на основната степен. Тук ще представим ролята на една относително тясна област в образователния процес – математическо състезание с избираем отговор – при формиране на първоначални умения и навици за АМ във възрастовите групи 2. и 4. клас.

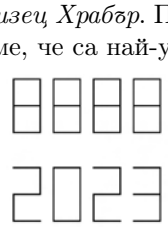
Ще се опираме на таксономията, предложена от Вайнтроп и колеги [6], която се отнася до АМ в математиката и природните науки. В нея са определени 4 клъстера, всеки от които е разбит на конкретни типове АМ. В Приложение сме изброили онези, които сме наблюдавали в разгледаните тестови единици от състезателните теми.

Статистическите данни са за учениците, явили се в Първа частна математическа гимназия. От тях второкласниците са 60, четвъртокласниците са 109. В краткия дидактически коментар към всяка от разглежданите тестови единици (съкратено ТЕ) се позоваваме на [4] за образователните цели и на таксономията [6] за типовете алгоритмично мислене. В приложението са дадени описания на съкращенията според двата цитирани източника. Повече детайли могат да се намерят в [2].

Структурата на състезателните теми е следната:
– състезателните теми се състоят от ТЕ с условие и 5 варианта за избор на отговор, като точно един от тях е верният;
– 3. и 4. клас работят 90 минути по обща състезателна тема с 20 ТЕ;
– за второкласници темата е от 15 ТЕ и времето за работа е 60 минути;
– за верен отговор на ТЕ се получават 7 точки; за непопълнен отговор се дават по 3 точки; за грешен избор на отговор не се дават точки.

Примери. Ще анализираме няколко примерни тестови единици от състезателните теми на тридесет и второто издание на турнира *Черноризец Храбър*. Привеждаме кратки обосновки за избор на отговор, без да претендираме, че са най-удачните.

ТЕ 4 за 2. кл. Колко чертички са изтрити от горния ред, за да се получи долният?
А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 8 Д) никое от тези

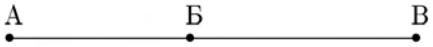


Отговор. В.

Коментар. Първите 4 ТЕ от състезателната тема са леки и имат за цел да насърчат второкласниците за по-нататъшна работа. От подобни ТЕ има нужда, тъй

като даже на разглежданата ТЕ 23% от участниците не са посочили верния отговор. Конкретната ТЕ се превзема с непосредствено преброяване, което, според статистиката, за второкласниците не е рутинна дейност. Тук могат да са от полза типовете АМ ps3 и da1, чрез които се преследват оц4 и оц5.

ТЕ 7 за 2. кл. От точка А до точка Б са 2 метра; от точка Б до точка В е с 1 метър повече, отколкото от А до Б. Костенурката отишла от А до В и се върнала в А. Колко метра е извървяла общо?



А) 10 Б) 9 В) 8 Г) 7 Д) никое от тези

Идея. От точка Б до точка В са 3 м, значи АВ е 5 м. Извървеният път е А-В-А, което е 10 м. *Отговор.* А.

Коментар. На пръв поглед такава ТЕ не крие някаква дълбока идея, но за второкласници това е трънлива пътека: относително дълъг текст, предварителни подготвителни изчисления, неявно зададена информация. Всичко това изисква алгоритмично мислене от висок порядък за възрастовата група. По таксономията на Вайнтроп това са da2 и da3. Подобно алгоритмично мислене са демонстрирали 68% от участниците, като по този начин се преследва оц3. Разчитането на чертеж и връзката с текстовите данни е насочено към оц5.

ТЕ 14 за 2. кл. Кофичката на Ачо се пълни с 3 кофички вода на Бебо. Голямата кофа събира 11 кофички вода на Бебо. Ачо първо изсипал пълна кофичка с вода в празната голяма кофа, после Бебо изпразнил оттам една своя кофичка; отново Ачо налял своя кофичка и Бебо изпразнил своя от голямата кофа. Това продължило до момента, когато Ачо напълнил голямата кофа. Колко свои кофички с вода е изсипал Ачо общо?

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6 Д) никое от тези

Обосновка. В кофички на Бебо пълненето станало така:

$3-1=2 \to 2+3-1=4 \to 4+3-1=6 \to 6+3-1=8 \to 8+3=11.$

Ачо е изсипал 5 свои кофички. *Отговор.* В.

Коментар. Това е най-тежката ТЕ в темата. Поначало разчитането на алгоритъм е непосилна задача даже за много средношколци. Тук алгоритъмът има стоп-оператор, което е още по-тежко предизвикателство за алгоритмичното мислене – ps1 и донякъде ps2, ориентирано към оц3 и оц5. Независимо от това 15% от участниците са посочили верния отговор.

ТЕ 6 за 3. – 4. кл. Намислих си число. Към него добавих 3. Получения сбор умножих по 4. На произведението размених местата на цифрите и излезе 23. Кое число си бях намислил?

А) 2 Б) 4 В) 6 Г) 8 Д) никое от тези

Обосновка. Отзад-напред $23 \to 32 \to 32:4=8 \to 8-3=5$. Намисленото число е 5. *Отговор.* Д.

Коментар. В тестовата единица се визира оц1. Алгоритъмът е правилно разчетен от 83% от четвъртокласниците, явили се в ПЧМГ. Статистиката показва от една страна, че подобни начини са познати в целевата група и от друга страна, че развитието на АМ от типове ms5 и ps1 е съвсем достъпно за четвъртокласници.

ТЕ 15 за 3. – 4. кл. За едно число X ще означаваме с $X\uparrow$ най-малкото четно число, което е по-голямо от X, и с $X\downarrow$ най-голямото нечетно число, което е по-малко от X. Например $2\uparrow = 4$, $11\downarrow = 9$. На колко е равно $23\uparrow + 23\downarrow$?

А) $22\uparrow + 20\uparrow$ Б) $22\downarrow + 24\downarrow$ В) $20\uparrow + 24\downarrow$ Г) $24\uparrow + 22\downarrow$ Д) никое от тези

Обосновка. $23\uparrow + 23\downarrow = 24 + 21 = 22 + 23 = 20\uparrow + 24\downarrow$. *Отговор.* В.

Коментар. Изчислителните алгоритми се прилагат в суперпозиция с броенето, което надхвърля обсега на оц1. Верния отговор са посочили 38% от участниците. Още 18% не са отбелязали отговор, което може да тълкуваме като „непознат тип задача“. Алгоритмично мислене от тип ms1 и ms2 е формирано в близо половината от целевата група, т.е. сред голяма част от изявените ученици такова мислене може да бъде развивано.

ТЕ 18 за 3.– 4. кл. Кое е възможно най-голямото произведение на естествени числа със сбор 10?

А) 36 Б) 32 В) 48 Г) 24 Д) никое от тези

Обосновка. Ако измежду числата има число $a > 4$, може да го заменим с 2 и $a - 2$ – сборът няма да се промени, а произведението ще е по-голямо (проверява се за 5, 6, 7, 8, 9, 10). Ако има събираеми 1 и b, то заменяйки ги на $b + 1$ сборът няма да се промени, а произведението ще стане по-голямо. Така ограничаваме възможностите до събираеми/множители 2, 3 или 4. Проверката показва, че най-голямо произведение е $3 \cdot 3 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$. *Отговор.* А.

Коментар. Не знаем дали учениците са обосновали отговора си по дадения от нас начин. Тестовата единица формално визира оц1, но ние сме я включили, имайки предвид оц4. Краткото условие заобикаля оц5, което дава възможност да се изявява алгоритмично мислене от тип ms3 и ms4. Верния отговор са посочили 10% от явилите се в ПЧМГ четвъртокласници, което определя тестовата единица като най-сложната от темата. За нас поуката е, че за формиране на подобно АМ е рано да се предприемат стъпки.

Заключение. Националното външно оценяване по математика в IV клас съдържа тест с избираем отговор, затова математическите състезания в такъв формат имат пряко отношение към математическото образование в началния етап на основната степен. Наред със състезателния елемент, състезателните теми на турнира „Черноризец Храбър“ имат насочващ характер, което може да стане основа за системно обучение (методика) в отделни направления на математиката. Тук потвърдихме с примери основния извод в изследването (Лазаров 2023): алгоритмично мислене може да се формира и доразвива в ранна възраст, най-вече при изявени ученици по математика. По този начин впоследствие, изграждайки определени дедуктивни умения, изявените ученици могат да формират математическо мислене от висок порядък.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Лазаров. Четвърт век турнир „Черноризец храбър“. Математика и математическо образование. *Математика и математическо образование*, **46** (2017), 101–108.

[2] Б. Лазаров. Образователни цели и типове алгоритмично мислене в теми от турнира „Черноризец Храбър“ за II — IV клас. *Професионално образование*, Том **25**, бр. 2 (2023), 103-119,

[3] E. Beheshti, D. Weintrop, H. Swanson, K. Orton, M. Horn, K. Jona, U. Wilensky. Computational Thinking in Practice: How STEM Professionals Use CT in Their Work, 2017. San Antonio, Texas: Northwestern University.

[4] МОН, 2015. НАРЕДБА № 5 от 30.11.2015 г. за общообразователната подготовка. Държавен вестник, бр. 95 [08.12.2015 г.].

[5] Y. Tabesh, S. Zarkesh. 2020. Computational thinking hackathon. Chapter 4.4. In: Geretschleger, R. (ed.) Engaging Young Students in Mathematics through Competitions – Perspectives and Practices, 2020, 265–271. World Scientific.

[6] D. Weintrop, E. Beheshti, M. Horn, K. Orton, K. Jona, K. Trouille, U. Wilensky. Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms. *Journal of Science Education and Technology*, **25**, no. 1 (2016), 127–147.

Приложение

Образователни цели съгласно с [4]

оц1: овладяване на алгоритми за смятане – събиране, изваждане, умножение и деление;

оц2: формиране на начални умения за измерване и чертане;

оц3: формиране на умения за описване на ситуации от реалния свят с математически модели;

оц4: формиране на интерес към математиката;

оц5: формиране на умения за четене и разбиране на текстове, функциониращи в комуникативната практика (български език).

Наблюдавани типове алгоритмичното мислене в математиката и природните науки съгласно с [3]

Работа с данни:

da1: събиране на данни;

da2: създаване на данни;

da3: обработване на данни.

Моделиране и симулации:

ms1: използване на изчислителни модели за осмисляне на понятия;

ms2: използване на изчислителни модели за намиране и проверка на решения;

ms3: оценка на изчислителни модели;

ms4: проектиране на изчислителни модели;

ms5: конструиране на изчислителни модели.

Алгоритмични практики при решаване на задачи:

ps1: подготовка на задача за числено решаване;

ps2: програмиране;

ps3: избиране на ефикасни изчислителни средства.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE – ETHICAL NORMS AND IMPLEMENTATION IN THE TRAINING OF FUTURE TEACHERS*

Nataliya Pavlova[1], **Dragomir Marchev**[2]

[1]Faculty of Mathematics and Computer Science,
Shumen University "Bishop Konstantin of Preslav", Shumen, Bulgaria
e-mail: n.pavlova@shu.bg
[1]Faculty of Natural Sciences,
Shumen University "Bishop Konstantin of Preslav", Shumen, Bulgaria
e-mail: d.marchev@shu.bg

The entry of artificial intelligence into the daily life and work sphere of the mass consumer, causes the need to set frameworks in its use. This is particularly important in the field of education, where the ethical aspect is of key importance. In the given work, some moral-ethical issues are affected when citing content generated with the help of artificial intelligence. A model is presented for dealing with plagiarism, while supporting students' work through the use of artificial intelligence chatbots. Examples of generation and citation are given.
Keywords: AI, plagiarism, ethical norms, university students

ИЗПОЛЗВАНЕ НА ИЗКУСТВЕН ИНТЕЛЕКТ – ЕТИЧНИ НОРМИ И ПРИЛОЖЕНИЕ В ПОДГОТОВКАТА НА БЪДЕЩИТЕ УЧИТЕЛИ

Наталия Павлова[1], **Драгомир Марчев**[2]

[1]Факултет по математика и информатика,
Шуменски Университет „Епископ Константин Преславски", Шумен, България
e-mail: n.pavlova@shu.bg
[2]Факултет по природни науки,
Шуменски Университет „Епископ Константин Преславски", Шумен, България
e-mail: d.marchev@shu.bg

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.154-160
Тази статия е разработена в рамките на проекти № РД-08-112/31.01.2024 № РД-08-137/2.02.2024 по Фонд научни изследвания на ШУ „Епископ Константин Преславски" за 2024.
2020 Mathematics Subject Classification: 97B10, 97B40, 97B50.

Навлизането на изкуствения интелект в бита и работната сфера на масовия потребител предизвиква необходимостта от поставяне на рамки в използването му. Това е особено важно в областта на образованието, където възпитателният аспект е от ключово значение. В дадената работа са засегнати някои морално-етични въпроси при цитиране на съдържание, генерирано с помощта на изкуствен интелект. Представен е модел за справяне с плагиатството, при подпомагане на работата на студентите чрез използване на чатботове с изкуствен интелект. Дадени са примери за генериране и цитиране.
Ключови думи: изкуствен интелект, плагиатство, етични норми, студенти

Въведение. Прилагането на изкуствения интелект в различни области бележи бум през последните години. Докато за специалистите тази област е предизвикателство от години, за масовия потребител на този етап това е повече забавление, състоящо се в генериране на забавни изображения, провокативно комуникиране с „машината“ и помощ при справяне с леки задачи. Въпреки това, достъпните възможности за използване на Artificial intelligence (AI), като ChatGPT, стимулираха хора, работещи в различни области, да използват тези чатботове в работата си. Едни от първите ползватели станаха учениците, които бързо намериха начин да прилагат достъпните чатботове при справяне с домашни работи. Често се предоверяваха на резултата и търпяха съответните последствия. Естествено възникна въпросът за етичните норми при използването на изкуствен интелект при справяне със задания. Първоначално наличието на подобен инструмент, породи усещането, че той може да се използва, без да се упоменава и цитира. В дадената работа ще разгледаме някои етични аспекти, възможности за прилагане и нагласи на студенти, обучаващи се за учители по математика, информатика и природни науки. Дадени са примери за конкретни инструменти, прилагани в обучението, като за избора сме се мотивирали те да са леки за използване и безплатни. Следва да отбележим, че развитието в тази сфера е изключително динамично и постоянно се появяват нови възможности. Така например от декември 2023 е задължително всички студенти да имат акаунт и да работят в системата, осигурена от МОН – StrikePlagiarism.com.

Плагиатство и цитиране. „Сърди“ ли ни се AI? При работа с бъдещи учители и изследователи е важно да изясним някои основни положения. Според Маринов „плагиатството е академично престъпление и може да доведе до сериозни негативни последици за изследователя“ [2]. Според Закона за развитието на академичния състав в република България[1] Чл. 10 (5) „Кандидатът за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ не се допуска до защита на дисертационния труд, когато научното жури е приело решение за наличие на плагиатство в оценявания труд.“, а по Чл. 35. (1) „Освобождава се от академична длъжност лице, когато бъде доказано по законоустановения ред плагиатство или недостоверност на представените научни данни в научните трудове, въз основа на които е придобило или е участвало в процедура за придобиване на научна степен, или е заело или е участвало в конкурс за заемане на академична длъжност“.

Законът дава яснота за пагубните последствия от плагиатството, но у студентите често възникват следните въпроси:

- Работата ми ще я види само преподавател – защо трябва да цитирам?

[1] `https://lex.bg/laws/ldoc/2135680028`

- Какво, ако използваме свои предходни разработки?
- Трябва ли да цитираме лекционния материал по дадената или други дисциплини, използвани в конкретната разработка?
- Плагиатство ли е, ако използваме изкуствен интелект?
- Възможно ли е плагиатството да е „неволно“?

Докато първите три въпроса се изясняват лесно, за последните са необходими разяснения, като все още няма единно мнение по темата. Така например Alser и Waisberg посочват, че „от решаващо значение е да разпознавате и признавате приноса на бота в генерираното съдържание, без да му предоставяте авторство. Освен това е важно да имате предвид възможност за плагиатство, произведено от самия бот“ [3]. Авторите отбелязват, че ботът използва перифразиране, за да избегне плагиатство, което само по себе си също излиза извън етичните норми в научното писане. Тук възниква и проблемът с „неволното“ плагиатство. Докато преди ерата на масовото използване от потребители на AI, подобен феномен можеше да се случи – при механично пропускане на кавички по невнимание, при оставяне на цитата „за по-късно“ или при използването на клишета, сега ситуацията е съвсем различна. Много вероятно е ботът да генерира перифразирано съдържание, а „авторът“ дори да не разбере това. Съответно изниква въпросът дали не следва винаги да се указва генерираното съдържание. Така например Bom счита, че „отговорност на автора е да гарантира, че няма проблеми с плагиатство. Може да се счита за плагиатство използване на генерирано от AI съдържание, без да се предостави правилно цитиране“ [4].

Ще отбележим статията *„Използването на ChatGPT в академично писане (не) е форма на плагиатство: Какво казва литературата?“*, която засяга задълбочено въпроса за генериране на съдържание и „цитирането“ на това съдържание. Авторите предлагат обзор на различни гледни точки за начина на използване и цитиране на материали, създадени с помощта на AI. Самите автори посочват за своята статия: „използвахме ChatGPT като помощ в процеса на писане на тази статия, която впоследствие беше преработена и редактирана, за да отговаря на академичните критерии“ [1].

Все още не във всяко издание има ясни правила и стандарти за цитиране на съдържание, генерирано с AI.

На този етап считаме, че използването на изкуствен интелект в изследователската работа на бъдещите учители, включително при оформление на курсови работи и реферати, е полезно и необходимо, но е важно да бъде упоменато като бележка кои фрагменти на работата са генерирани с помощта на AI.

Морално-етични норми в работата на бъдещия учител. Въз основа на казаното дотук, ще споделим някои добри практики от обучението на студенти от ФМИ и ФПН на ШУ „Епископ Константин Преславски“, насочени към предотвратяването на плагиатство и по-специално при генериране на съдържание с AI.

В началото на своето обучение студентите често пропускат частта с цитирането на използваните източници, въпреки че даденият въпрос е залегнал в училищната подготовка. Така например в учебната програма по „Компютърно моделиране и информационни технологии“ за 7 клас, в темата „Работа по проект“ са заложени компетентности, като „използва интернет и други източници на информация и ресурси за проучване на тема за конкретен проект“ и „зачита авторските права на

използваната информация“[2]. Дългогодишният ни опит показва, че е необходимо, освен акцента върху морално-етичната страна, студентите да се запознаят с популярните стандарти за цитиране и технологии за предотвратяване на „волни“ и „неволни“ прояви на плагиатство.

Всеки преподавател има възможност да отдели време за някои указания в оформлението на работите, но целенасочено даденият въпрос се засяга в рамките на задължителната за бъдещите учители дисциплина „Информационни и комуникационни технологии в обучението и работа в дигитална среда“ (ИКТОРДС) за специалностите „Информационни технологии, информатика и математика“, „Педагогика на обучението по икономика и математика“, както и за студентите, придобиващи квалификация „учител“ по „математика“, „информатика“, „информационни технологии“ и „физика“, а по-късно се задълбочава в ОКС „Магистър“ в дисциплината „Методика на педагогическите изследвания“. Тук при оформлението на работата се акцентира върху APA-стандарта за цитиране. Студентите се мотивират да оформят правилно и да цитират коректно литературата в курсовите си работи, въпреки че те няма да бъдат публикувани. На по-късен етап, при разработка на дипломна работа и публикуване на основния резултат, тези изисквания придобиват особена тежест. По правилник студентите прилагат към дипломната си работа декларация за авторство, с която декларират, че те са автори на получените приноси, което е заявка, че са цитирали коректно използваните източници. Схематично този процес е представен на фигура 1.



Фиг. 1. Модел за справяне с плагиатство в работата на студентите

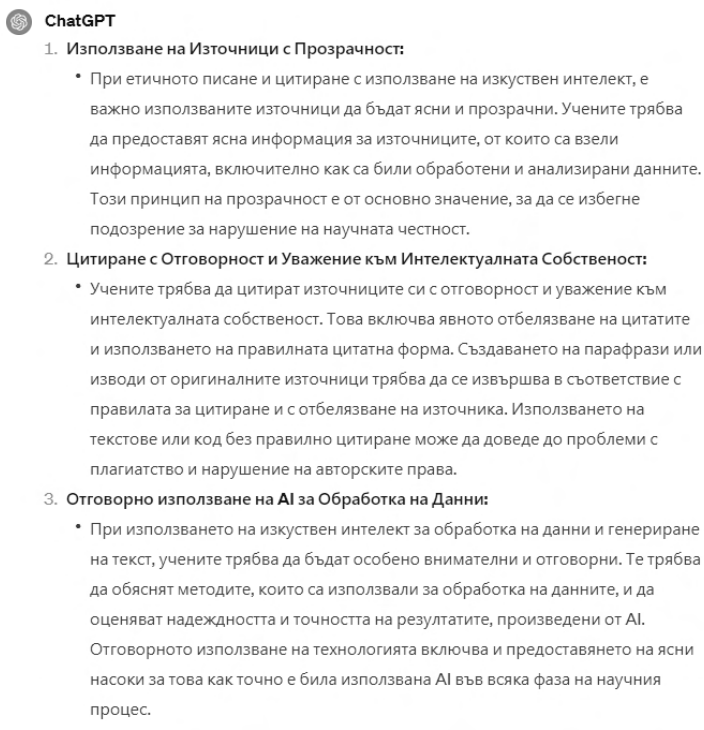
След широкото навлизане на AI в живота на масовия потребител възникнаха редица въпроси, засегнати по-горе. На този етап не всички студенти са работили с чатботове с AI. Някои са опитвали само с цел забавление. Тук решението, което използваме, се състои в експериментиране с различни инструменти и ресурси. Разделяме обучаваната група на две подгрупи, даваме подходящо задание, като едната група трябва задължително да използва изкуствен интелект при решаването на проблема, а на другата се дават алтернативни ресурси. Използвахме ChatGPT. Извън контекста на тази статия следва да отбележим, че студентите реагират по доста неочакван начин в някои случаи. В повечето случаи, тези с използването на AI се справят по-бързо, но не забелязват някои пропуски в генерираното съдържание. В

[2] https://web.mon.bg/upload/24188/UP_PC-modelirane-7kl.pdf

една от групите, студентите имаха затруднения да формулират адекватни въпроси и изявиха мнение, че групата с „книжните материали“ е привилегирована. Въпреки бързината и качеството на генерираното съдържание, работата с чатбот изисква високо ниво на критично мислене и креативност при разкриване на пропуските.

Получените от двете групи продукти се проверяват чрез инструменти за проверка на плагиатство и съдържание, генерирано с AI. Дискутират се резултатите.

Нека разгледаме пример за отговор на задание „Формулирай трите най-важни аспекта за етично писане на научен текст и цитиране, при работа с AI“ от фигура 2:



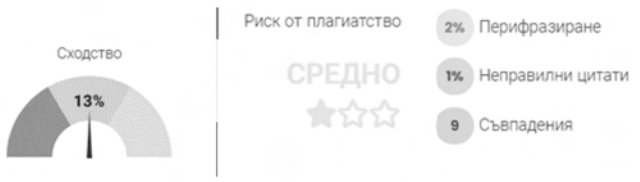
Фиг. 2. Пример за отговор (Генериран чрез ChatGPT)

От фигура 2 е видно, че посочените отговори са логични, но биха могли да се прецизират и синтезират.

Като най-силен аргумент при мотивиране на необходимостта от коректно цитиране можем да отбележим демонстрирането на проверка с антиплагиат инструменти. Голяма част от студентите имат представа за работа с чатботове с AI, но проверката за плагиатство е новост за повечето от тях в рамките на изминалата година. Демонстрацията на проверка на произволна курсова работа или задание извиква емоционална реакция от аудиторията и мотивира студентите да проверяват своите работи самостоятелно, преди да бъдат пуснати за проверка от преподавател. Разглежданите в рамките на занятията инструменти са plag.bg и originality.ai, като те имат възможност за проверка на AI-генерирано съдържание. Платформите изиск-

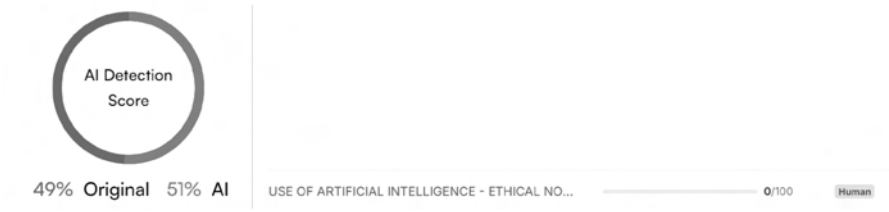
ват създаване на акаунт и имат лимит за възможните безплатни проверки.

Нека да разгледаме пример за такава проверка на работния вариант на настоящата статия, представен на фигура 3.



Фиг. 3. Пример за проверка за плагиатство (Генериран чрез plag.bg)

Вижда се, че нивото на сходство е средно, което не е удачно за научна статия. При внимателен преглед на съвпаденията в отчета се вижда, че откритите „съвпадения“ са цитати на документи, цитирани чрез бележка под линия (два документа) и заглавията на цитираните източници. За „неправилен цитат“ се посочва наименованието на дисциплината ИКТОРДС. Перифразиранията отново са в изброените литературни източници. Ясно е, че няма наличие на плагиат, но има съвпадения в текстовете, което е нормално, т.к. няма как да не се посочат заглавията на цитираната литература, а те присъстват и в други статии.



Фиг. 4. Проверка за използване на AI чрез а) app.originality.ai и б) aidetector.pro

На фигура 4 са представени противоречиви резултати, получени с два различни инструмента Originality намира 51%, а AIdtector Pro – 0% съдържание, генерирано с AI. Ако авторът проверява свой труд, той е наясно кога и колко съдържание е генерирал. В дадената статия, с помощта на AI са генерирани само посочените погоре отговори, представени на фигура 2, но проверка с Originality би отнесла този текст към генериран с AI.

Все още системите за проверка на плагиатство и генерирани текстове не са съвършени и могат авторски текстове да се разпознаят като генерирани от AI, както и правилно цитиран текст да се разпознае като плагиат. Важно е при самопроверка авторът да е наясно къде е възможно да има технически пропуск и да поправи цитирането според стандарта в случай, че пропускът е негов. Освен това, с помощта на подобна проверка можем да открием първоизточник на дадено съдържание в случай, че сме цитирали автор, който не е цитирал коректно.

Какво следва. Към днешна дата сме поставени пред големия въпрос – докъде може да достигне AI. Някои са уплашени, други имат големи надежди по този въпрос. Несъмнено прогресът в науката води до множество физически и интелектуални облекчения в живота и работата на обикновения потребител. Все пак не трябва да забравяме, че прекалено комфортната среда, съчетана с липса на морал, може да доведе до деградация, по думите на Хегел „Количествените натрупвания водят до качествени изменения“.

Специално в областта на образованието, все още наличните недостатъци на AI могат да бъдат използвани в полза на учащите [5]. Липсата на пълно доверие в генерираното съдържание може да провокира критично мислене, креативност и запознаване с нови литературни източници. Наличните достъпни инструменти за генериране на съдържание и съответно за проверка на текст са предпоставка за по-внимателно използване не само на чужди трудове, но и на машинно генерирано съдържание. Спазването на морално-етични норми при създаването на продукт, независимо дали е домашна работа, проект, статия или нещо друго, е важен възпитателен фактор. Формирането на това умение у бъдещите учители е залог за успешното му пренасяне и сред техните ученици.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Jarrah, Y. Wardat, P. Fidalgo. Using ChatGPT in academic writing is (not) a form of plagiarism: What does the literature say? *Online Journal of Communication and Media Technologies*, **13**, no. 4 (2023), e202346. https://doi.org/10.30935/ojcmt/13572.

[2] E. Marinov. Morale and Ethics in Scientific Research. Scientific Research Methodology: Training Materials, ed. by R. Chobanova No. DP 01/2013, ISSN 1312-5079, 2014, 101–108, https://mpra.ub.uni-muenchen.de/60322/.

[3] M. Alser, E. Waisberg. Concerns with the usage of ChatGPT in academia and medicine: A viewpoint. *American Journal of Medicine Open*, **9** (2023), 100036, https://doi.org/10.1016/j.ajmo.2023.100036.

[4] H. Bom. Exploring the opportunities and challenges of ChatGPT in academic writing: A roundtable discussion. *Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, **57** (2023), 165–167, https://doi.org/10.1007/s13139-023-00809-2.

[5] N. Pavlova. Flipped dialogic learning method with ChatGPT: A case study. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, **19**, no. 1 (2024), em0764, https://doi.org/10.29333/iejme/14025.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

POSSIBLE SCORING OF THE CONSTRUCTED-RESPONSE TASKS FROM THE NATIONAL EXTERNAL ASSESSMENT AFTER GRADE VII IN 2023, BASED ON ITEM RESPONSE THEORY*

Pavlin Tsonev

Bulgarian Air Force Academy "Georgi Benkovski",
Dolna Mitropoliya, Bulgaria
e-mail: ptsonev@yahoo.com

The article analyzes the constructed-response tasks from the National External Assessment after Grade 7 held in 2023. Scoring that is different from the generally accepted is justified.
Keywords: Item Response Theory, probabilistic modeling, constructed response tasks.

ПРИМЕРНО ТОЧКУВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ СЪС СВОБОДЕН ОТГОВОР ОТ НАЦИОНАЛНОТО ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ СЛЕД VII КЛАС ПРЕЗ 2023 ГОДИНА, БАЗИРАНО НА ВЕРОЯТНОСТНО МОДЕЛИРАНЕ

Павлин Цонев

Военно-въздушно училище „Г. Бенковски“,
Долна Митрополия, България
e-mail: ptsonev@yahoo.com

Чрез методите на вероятностното моделиране са анализирани задачи със свободен отговор от НВО след VII клас проведено през 2023 г. Обоснован е алтернативен на общоприетия вариант за точкуване на такива задачи.
Ключови думи: Item Response Theory, вероятностно моделиране, тестови задачи със свободен отговор.

Предварителни бележки. Статията е продължение на изследванията на автора върху Националните външни оценявания (НВО) по математика след VII клас, проведени върху задачите с избираем отговор ([6] и [7]).

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.161-168
Изследването е подкрепено от проект №80-10-61/25.4.2023 г. към Фонд научни изследвания на Софийски университет „Св. Климент Охридски“, 2023–2024 г.
2020 Mathematics Subject Classification: 97-11, 97D60.

Задачите със свободен отговор, които се използват в НВО по математика след VII клас, проведено през 2023 г., са два вида:

– с кратък свободен отговор, на които ученикът трябва да напише правилния според него отговор, който е едно или няколко числа;

– с разширен свободен отговор, на които ученикът трябва да напише подробно и логически обосновано решение, спазвайки методите, изучени в училище.

Употребата на комбинация от тези два вида задачи повтаря модела, който е наложен и при Национално външно оценяване от IV клас [3].

Точкуването на задачите със свободен отговор често е свързано с определени трудности. Две от тях са:

– Как да се определи максималният брой точки за дадена задача?

– Как да се разпределят тези точки върху решението на задачата?

В стремежа си оценяването да е максимално обективно често се дават точки, които освен цели числа, са и кратни на 0,5, дори и на 0,25.

Дали това е оправдано?

В настоящото изследване се дава една гледна точка на този въпрос, която се основава на методите на вероятностното моделиране *(Item Response Theory – IRT)* [4]. Тези методи за изследване на тестове все повече навлизат в България в последните години, например [1]. В теорията на вероятностното моделиране са разработени различни модели. Тук е използван еднопараметричния модел, наречен *Rash model*. За нуждите на IRT задачите с кратък свободен отговор трябва да се кодират с 0 точки за грешен отговор и 1 точка за верен отговор, а задачите с разширен свободен отговор да се кодират с цели числа в интервала $[0, n]$, като най-често $n = 2$ или $n = 3$. В статията е прието, ако една задача е кодирана с 0 или 1 точки, да се нарича *0-1 задача*, ако е кодирана с 0, 1 или 2 точки, да се нарича *0-1-2 задача* и т.н.

Основната идея в Rash model е, че възможността един ученик да реши дадена задача може да се измери чрез абстрактна величина, наречена *способност* (означена с θ). Вероятността този ученик да реши съответната задача се описва чрез т. нар. *характеристична функция* (графиката на която се нарича *характеристична крива*).

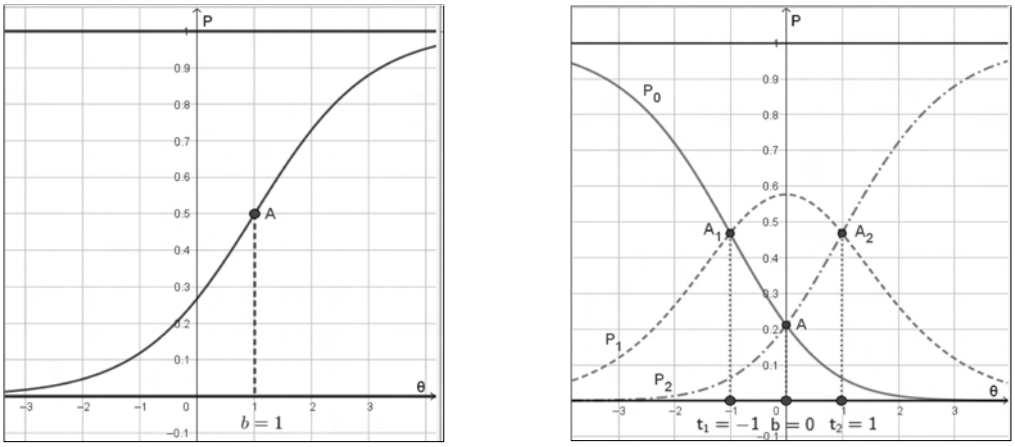
Ако задачата е 0-1, характеристичната функция има вида

$$P(\theta) = \frac{e^{\theta - b}}{1 + e^{\theta - b}},$$

където b е параметър, който се нарича *трудност на задачата*. Графиката на такава крива при $b = 1$ е изобразена на Фигура 1а).

Координатите на точката от характеристичната крива с ордината $P = 0{,}5$ (в случая точка A) показват, че ученик със съответната способност (в случая $\theta = 1$) има вероятност 50% да получи верен отговор на тази задача. Тази стойност на θ (в случая $b = 1$) е трудността на задачата. Обикновено трудността на задачите е в интервала $(-2; 2)$. Ако b е близо до -2, значи задачата е лесна, а ако е близо до 2, значи задачата е трудна.

Ако задачата е 0-1-2, се чертаят три характеристични криви. На Фигура 1б) е даден пример, в който графиките P_0, P_1 и P_2 съответстват на вероятността за получаване на 0, 1 и 2 точки. Трудността на такава задача се получава от абсцисата на пресечената точка A на P_0 и P_2 (в случая $b = 0$). Интерес представляват абсцисите

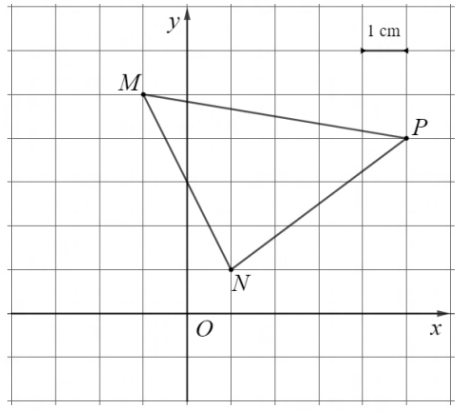


а) б)

Фиг. 1. Характеристични криви на Rash model

t_1 и t_2 на пресечните точки A_1 и A_2 съответно на P_0, P_1 и на P_1, P_2 (в случая $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$). Изводът, който може да се направи при такава задача е, че учениците със способности по-малки от $t_1 = -1$ е най-вероятно да получат 0 точки, тези със способности между $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$ е най-вероятно да получат 1 точка, а тези със способности над $t_2 = 1$ е най-вероятно да получат 2 точки. Проблемни задачи са такива, при които $t_1 > t_2$. По-нататък в статията са коментирани такива примери.

20. В координатна система *Oxy* с единична отсечка 1 cm са дадени точките *M*, *N* и *P*.



А) Запишете координатите на точките *M*, *N* и *P*.

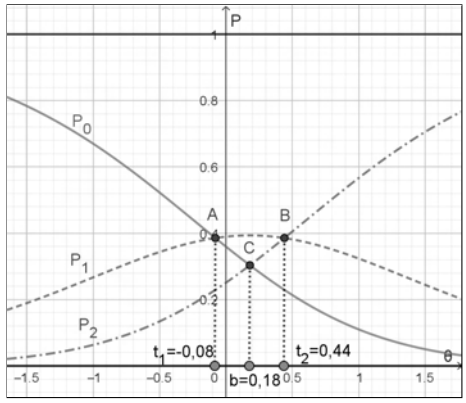
Б) Запишете координатите на точка *Q*, симетрична на точката *N* спрямо координатното начало.

Фиг. 2. Условие на задача 20 А) и Б)

Приложение на IRT при НВО след VII клас от 2023 г. Използвани са резултатите от НВО след VII клас, проведено през 2023 г. в 4 области на България – София-град, Пловдив, Плевен и Разград. Изследвани са получените данни от задачите със свободен отговор на 21 060 ученици. Данните са обработени със приложението jMetrik [5].

За да се приложи вероятностният метод, кодирането на задачите с кратък свободен отговор от 2023 г. се променя на 0-1. Такива са задачите 19 А), 19 Б) и 20 В), при които кодирането е било съответно 0-4, 0-3 и 0-4.

При някои задачи, като задача 20 Б) от Фигура 2, кодирането е 0-0,5-1 точки. За да се използва IRT методиката, кодирането се променя в цели числа на 0-1-2. Получените характеристични криви са изобразени на Фигура 3.



Фиг. 3. Характеристични криви на задача 20 Б)

Изводът, който може да се направи е, че учениците със способности под $-0{,}08$ е най-вероятно да получат 0 точки, тези със способности между $-0{,}08$ и $0{,}44$ е най-вероятно да получат 1 точка, а тези със способности над $0{,}44$ е най-вероятно да получат 2 точки. Тази задача има добри характеристики по отношение на трудност ($b = 0{,}18$) и по отношение на разслояването на учениците по трите точки (това се получава при $t_1 < t_2$).

Пример за задача с $t_1 > t_2$ е задача 23 В), условието на която е дадено на Фигура 4.

23. В ΔABC $AC = BC$, $BL\,(L \in AC)$ е ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BLC = 60°$. През средата на BL е построена права PQ, така че $PQ \perp BL\,(P \in AB, Q \in BC)$.

А) Намерете ъглите на ΔABC.

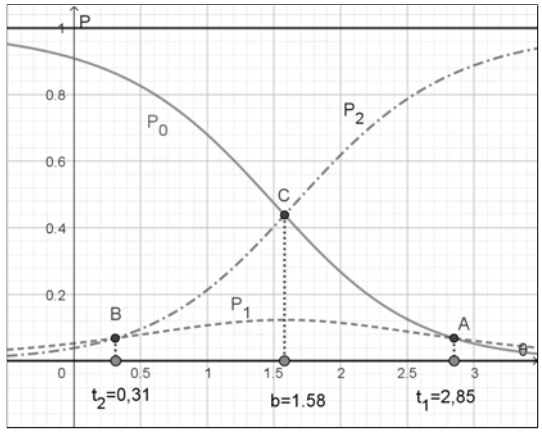
Б) Докажете, че $PBQL$ е ромб.

В) Докажете, че $AL = BQ$.

Г) Докажете, че $AP > PQ$.

Фиг. 4. Условие на задача 23

Оценяването на задачата е с 0,5 точки за доказано $LP = BQ$ и още 0,5 точки за доказано $AL = BQ$. Отново се приема точкуване 0-1-2, за нуждите на IRT. Така се получават графиките на характеристичните криви, изобразени на Фигура 5. При тази задача е най-вероятно да има два типа ученици – със способности под 1,58, които е най-вероятно да получат 0 точки, и такива със способности над 1,58, които е най-вероятно да получат 2 точки. С други думи, очаква се да има само два типа ученици – такива, които не са доказали нито едното равенство и такива, които са доказали и двете равенства. Ученици, които са доказали само едното равенство, се срещат с малка вероятност. Затова такава задача е подходящо да се кодира с 0 и 1 точки.



Фиг. 5. Характеристични криви на задача 23 В)

При други задачи с разширен свободен отговор кодирането е прекалено раздробено, за да може да се приложи IRT методиката. По тази причина е необходимо броят на точките в тяхното оценяване да е цяло число и да е сравнително малко. В [2] е анализиран начинът на точкуване на задачите, които оценяват частичния напредък на ученика при решаването им. Въвежда се понятието *важна стъпка*. Целта на важните стъпки е да се разграничат смислените моменти при решаването на дадена задача. Тези моменти се определят от автора на задачата. Пример за задача с разширен свободен отговор, която е разделена на голям брой важни стъпки, е задача 20 А) от Фигура 2. Оценяването на тази задача е през 0,25 единици. В таблица 1 са дадени точките и процента на получилите тези точки. Както се вижда, процентът на учениците получили някои точки е близко до 0%.

Таблица 1. Оценяване на задача 20 А) според МОН

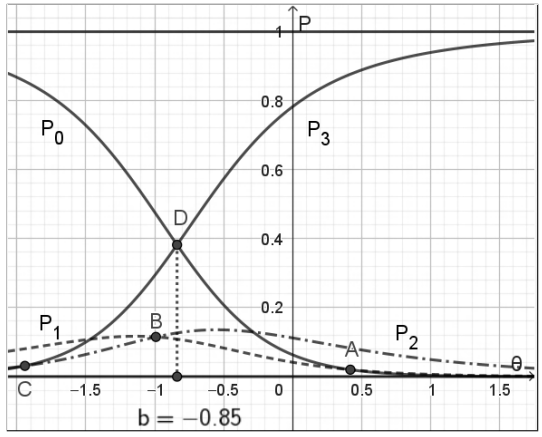
Точки	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
20 А)	34,7%	0%	1,6%	0%	3,9%	0%	2,6%	0%	4,1%	0%	6,4%	0%	46,6%

Това дава основание да се отделят 4 важни стъпки, които позволяват да се направи промяна в точкуването. Те са предложени в таблица 2. По този начин задачата става 0-1-2-3 и може да бъде изследвана с IRT. След като се извърши анализът на

данните на учениците, се получават характеристичните криви, изобразени на Фигура 6. От графиките се вижда, че учениците е най-вероятно да имат 0 или 3 точки, а междинните точки са малко вероятни. С други думи, ако един ученик може да намери координатите на една точка, той може да намери координатите на трите точки от условието на задачата. Тази задача също е пример за ситуация, при която $t_1 > t_2$. Изводът, който може да се направи е, че тя би трябвало да се кодира 0-1. Освен това, трудността на задачата е $b = -0{,}85$, което означава, че е от лесните задачи в теста.

Таблица 2. Ново точкуване на задача 20 А)

Точки от проверката	Обяснение	IRT
0-0,25		0
0,50-1,00	получени са 1 или 2 верни координати	1
1,25-2,00	получени са 3 или 4 верни координати	2
2,25-3,00	получени са 5 или 6 верни координати	3



Фиг. 6. Характеристични криви на задача 20 А)

По подобен начин са изследвани всички задачи със свободен отговор. След това задачите са подредени според коефициента им на трудност (b). Отчетени са графиките на характеристичните им криви, получени от IRT, и е коригиран броят на важните стъпки при решаването им. Оказва се, че се открояват най-много 2 важни стъпки. На тази база е създадено примерно ръководство за точкуване в таблица 3.

Както е известно, общият брой на точките на задачите със свободен отговор трябва да е 50. Затова, получените дотук точки на всяка задача се умножават с коефициент, показан в колона 5 на таблица 4. В случая този коефициент е съобразен с максималния брой точки, които са дадени от МОН на всяка задача (колона 3 на същата таблица). Освен това е взето предвид и нивото на трудност на задачите. По тази причина някои задачи имат разлики в точкуването в колоните 3 и 6. Например, задача 19Б има по-висок коефициент на трудност ($b = 1{,}68$) от задача 20А ($b = -0{,}85$). Затова точките на 19Б са увеличени от 3 на 4, а на 20А са намалени от 3 на 2.

Таблица 3. Примерно разпределение на точките за задачите със свободен отговор

№	Изпълнена дейност	Предложение
19А	получено 3	1
19Б	получено 10	1
20А	получени верни координати на поне 1 точка	1
20Б	• получена 1 вярна координата на Q • получена е втора вярна координата на Q	• 1 • 1
20В	получено $S = 11$	1
21А	намерено разлагане и решено полученото уравнение	1
21Б	получени корени 3 и 9	1
21В	• сгрешено неравенство, но верни изводи за получените корени в получения от неравенството интервал • верни изводи, че 3, 6 и 9 са решения на неравенството	• 1 • 1
22А	• въведени неизвестни x и $x - 2$ • получени брой работници 8 и 6	• 1 • 1
22Б	намерени 5 и 4 дни	1
23А	• правдоподобен чертеж и намерен ъгъл 40° или 100° • намерени и трите ъгъла 40°, 40° и 100°	• 1 • 1
23Б	• установено едно равенство, което доказва ромб • завършено е доказателството за ромб	• 1 • 1
23В	доказано $AL = BQ$	1
23Г	доказано $AP > PQ$	1

Таблица 4. Оценяване на задачите със свободен отговор от 2023 г.

№ задача	Коефициент на трудност b	точки от МОН	Предложение за точкуване	Коефициент	Максимален брой точки
19А	1.74	4	0-1	4	4
19Б	1.68	3	0-1	4	4
20А	−0.85	3	0-1	2	2
20Б	0.18	1	0-1-2	1	2
20В	2.01	4	0-1	4	4
21А	1.25	6	0-1	4	4
21Б	−0.71	2	0-1	2	2
21В	−0.4	4	0-1-2	1,5	3
22А	0.72	5	0-1-2	2	4
22Б	1.36	6	0-1	4	4
23А	0.41	3	0-1-2	2	4
23Б	1.99	3	0-1-2	2	4
23В	1.58	2	0-1	4	4
23Г	2.79	4	0-1	5	5
общо точки		50			50

В заключение. Тази идея за оценяване на задачите със свободен отговор би могла да бъде приложена при бъдещи НВО. Така проверителите ще дават цяло число точки за всяка важна стъпка (не повече от 2-3 на задача). Тези стъпки се определят предварително от авторите на теста. След това екип от експерти ще направи анализ на получените резултати и според получените коефициенти на трудност ще бъдат дадени коефициенти за всяка задача, за да се получи необходимата сума от краен брой точки (в случая 50).

Съвременните технологии позволяват обработката на данните да става в рамките на няколко часа. Работата на експертите също не би трябвало да отнеме повече от 1 работен ден. Може да се предположи, че така ще се повиши обективността при оценяването на НВО.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. M. Alashka. Two-factor Probabilistic Models in Education. Mechanics Transport Communications. *Academic journal*, **14**, no. 3/2, (2016), VII-7-VII-12 (in Bulgarian)

[2] K. Bankov. Scoring Tasks and Using Scales in Standardized Assessments. In: Mathematics Education 75 Years of Mission and History, University Publishing House "St. Kliment Ohridski", (2023), 73–86 (in Bulgarian)

[3] T. Chehlarova. National External Assessment in Mathematics in 4th Class in 2022. *Mathematics & Informatics*, **65**, no. 4 (2022) (in Bulgarian)

[4] R. Hambelton, H. Swaminathan, H. Rogers. Fundamentals of Item Response Theory. SAGE Publications, 1991.

[5] J. P.Meyer. jMetrik. In: Handbook of Item Response Theory, pp. 557–566. Chapman and Hall/CRC, 2017.

[6] P. Tsonev. Some Conclusions on the Results of the National External Assessment in Mathematics for 7th Grade. *Mathematics & Informatics*, **66**, no. 6 (2022), 578–601 (in Bulgarian)

[7] P. Tsonev. Comparison of the Results Based on the Multiplechoice Items from the National External Assessment in Mathematics After Grade VII Held in 2020, 2021 and 2022. Annual International Scientific Conference of VVVU "G. Benkovski", D. Mitropolia, 2023, 353–363 (in Bulgarian)

ЮБИЛЕЙНИ ДОКЛАДИ

ANNIVERSARIES

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

220 YEARS OF CARL GUSTAV JACOBI

Petar Popivanov

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
e-mail: popivano@math.bas.bg

In 2024 is 220th jubilee of the great German mathematician K. G. Jacobi. In this paper we propose short biographical notes and formulate in 12 points his main achievments in analysis, mechanics, variational calculus, etc.

220 ГОДИНИ ОТ РОЖДЕНИЕТО НА КАРЛ ГУСТАВ ЯКОБ ЯКОБИ

Петър Попиванов

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mail: popivano@math.bas.bg

През 2024 г. отбелязваме 220-ия юбилей на великия немски математика К. Г. Якоби. В настоящата статия предлагаме кратки биографични бележки и формулираме в 12 точки основните му постижения в областта на математическия анализ, механиката, вариационното смятане и др.

Карл Якоби произхожда от богато еврейско семейство, но при раждането му на 10.12.1804 г. родителите са му дали френското име Жак-Симон. Било е времето след Френската революция и в разцвета на военните успехи на Наполеон. Семейството му е живеело в Потсдам в тогавашното кралство Прусия. Бащата е банкер и има трима сина и една дъщеря. Съдбата отрежда на Карл Якоби 46 г. живот и той умира на 18.02.1851 г. в Берлин. Началното си образование получава от вуйчо си и на 12-годишна възраст постъпва в гимназията в Потсдам. През 1817 г., в края на първата година на обучението си, той е преместен в последния клас на училището като резултат от добрата си предварителна подготовка и блестящи способности. Накратко, на 13-годишна възраст Карл Густав удовлетворява стандартите за постъпване в кой да е университет. Съгласно правилата на Берлинския университет, студенти не се приемат, ако не са навършили 16 г., и на младия Якоби се налага да остане ученик в същия клас в Потсдам чак до пролетта на 1821 г. Това не е загубено време, защото той се занимава активно и получава награди за успехите си по гръцки, латински и



история. Запознава се и с книгата на Ойлер „Въведение в математическия анализ“. От това време датира и опитът му да разреши алгебричното уравнение от 5-а степен в радикали. Благодарение на Абел, Руфини и на Галоа, знаем, че това е невъзможно в общия случай, а Галоа създава своята знаменита теория за разрешимост на алгебрични уравнения от n-та степен.

В началото на образованието си в Берлинския университет Якоби е раздвоен в интересите си между филологията, отчасти философията и математиката. Той намира равнището на преподаване по математика в Берлин доста елементарно и затова сам се запознава с някои трудове на Ойлер, Лагранж и Лаплас. Около 1823 г. решава да се посвети изцяло на математиката, загърбвайки другите си интереси. В края на учебната 1823 – 1824 г. полага изпити, които му дават педагогическа правоспособност в училищата. Въпреки предложената му позиция в елитна берлинска гимназия, Карл Густав решава да поеме по пътя на изграждане на университетска кариера. През 1825 г. защитава пред комисия (сега „жури“), оглавявана от Енно Дирксен, дисертация по разлагането на алгебричните дроби на елементарни дроби и получава научната степен „доктор по философия“. Почти веднага следва неговата хабилитация и промяната на вероизповеданието му от израилтянско в християнско (протестантско). Възможно обяснение на тази промяна е преодоляването на евентуалните пречки пред научното му израстване, дължащи се изцяло на етнически причини. Още през учебната 1825 – 1826 г. Якоби чете лекции в Берлинския университет по теория на кривите и повърхнините. Изглежда, че перспективите пред него в този университет не са били особено добри и затова той постъпва през май 1826 г. в университета в Кьонигсберг (сега Калининград в Руската федерация). От 28.12.1827 г. е доцент, а от май 1832 г. е пълен професор в Кьонигсберг. Тук той сътрудничи с Ф. Нойман (1798 – 1895) и астронома проф. Ф. В. Бесел (1784 – 1846).

Преди да формулирам някои от основните постижения на Якоби в математиката, които са обезсмъртили неговото име, ще спомена, че той е поддържал кореспонденция и е получил признание за изследванията си по теория на числата (кубични остатъци) от К. Ф. Гаус (1777 – 1855), създател на теорията на квадратичните и биквадратичните остатъци. Особено внимание заслужават резултатите на Якоби по елиптичните функции, чиято теория той изгражда в много сериозна конкуренция с Н. Х. Абел (1802 – 1829). От големия френски математик и задълбочен изследовател на елиптичните интеграли, но от предишно поколение, А. М. Лежандър (1752 – 1833), са запазени писма до Якоби от 1828 г. и от 1829 г. с най-ласкави оценки за работите на Якоби и Абел по елиптични функции, оприличавайки изследванията им със състезание (борба) между „двама млади еднакво силни атлети“. През май 1831 г. Карл Якоби се жени за Мария Швинк. Около 1842 г. заболява от диабет и страда от хронична преумора. Лекарите го съветват да прекара известно време в Италия, но Якоби има сериозни финансови проблеми. Независимо от завидното бащино наследство, голямата икономическа депресия в Европа и разбира се в Прусия през 40-те години на 19. век води известния математик до финансов банкрут – накратко, губи всичките си пари. П. Л. Дирихле (1805 – 1859), който посещава Кьонигсберг, се обръща към А. фон Хумболдт с молба да издейства финансова подкрепа от крал Фридрих-Вилхелм IV за пребиваването и лечението на Якоби в Италия. Ходатайството е успешно и е получен необходимият грант. Престоят в Италия е ползотворен, но впоследствие, предвид сравнително тежкия климат в Кьонигсберг, Якоби преминава на работа, т.е. се завръща, през м. юни 1844 г. в Берлинския университет. Той чете курс по аналитична механика през учебната 1847 – 1848 г., в който подлага на критика лагранжевата механика (Ж. Л. Лагранж (1736 – 1813)).

Както всички знаем, 1848 г. е година на антифеодалните революции в Европа, има вълнения и в Берлин. Якоби е политически ангажиран и безуспешно е номиниран за парламентарните избори от името на Конституционния (Либералния) клуб. Това настройва срещу него и монархисти, и републиканци. Последиците от политическите изяви на Якоби са негативни. Пруските власти спират добавката към заплатата, позволяваща му да живее в скъпия град Берлин, и се налага семейството му да се премести в малкия град Гота. Въпреки поканата да отиде на работа във Виенския университет, той, а и пруските власти, правят компромис – Якоби остава да чете лекции след 1849 г. в Берлинския университет, но поради финансови причини семейството му остава да живее в Гота. В началото на февруари 1851 г. се заразява от инфлуенца, а след това и от вариола (едра шарка), което води до преждевременната му смърт на 18.02.1851 г.

Още приживе Карл Густав Якоби се радва на голямо и заслужено международно признание. Член е на Берлинската академия на науките (1827), на Парижката академия на науките (1832), на Лондонското кралско дружество (1832), почетен член е на Руската императорска академия на науките (1832). Заедно с Н. Х. Абел е носител на наградата на Парижката академия на науките за постиженията им в теорията на елиптичните функции. Както беше казано по-горе, в няколко точки ще резюмирам някои от неговите най-забележителни резултати.

1. Матрица на Якоби $\mathcal{J} = (a_{ik})$ – квадратна матрица с реални елементи, за която $a_{ik} = 0$ при $|i - k| > 1$. Приети са означенията $a_i = a_{ii}$, $b_i = a_{ii+1}$, $c_i = a_{i+1i}$.

Има редица интересни свойства. Например, всеки минор на $\mathcal{J}$ е произведение на някои главни минори на $\mathcal{J}$ с някои нейни елементи. Ако $b_i c_i > 0$ за $i = 1, \ldots, n-1$, собствените стойности на $\mathcal{J}$ са реални и различни. Има връзка с работите му по вариационно смятане.

2. Метод на Якоби, предложен през 1834 г., за привеждане на квадратична форма в каноничен вид с помощта на триъгълно преобразуване на неизвестните. Якоби предлага също така метода на простите итерации за решаване на линейната алгебрична система $Ax = b$, където тя предварително се записва във вида $x = Bx + g$.

3. Полиноми на Якоби P_n, въведени от него в „J. Reine und angew. Math.“ (Crelle's Journal) във връзка с решението на хипергеометричното уравнение на Гаус. Общоприета е за тях формулата на Родриг, съгласно която

$$P_n(x;\alpha,\beta) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left(1-x^2\right)^n\right],$$
$$\alpha > -1, \beta > -1, x \in [-1,1].$$

Те са ортогонални в интервала $[-1,1]$ с теглова функция $h = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$. Полиномът $P_n(x;\alpha,\beta)$ удовлетворява линейно ОДУ от II ред с коефициент пред втората производна $\left(1-x^2\right)$. Има добре развита теория на редовете на Фурие по полиномите на Якоби. Трудностите се дължат на факта, че в краищата на интервала 1 (-1) редицата на ортонормираните полиноми на Якоби расте като $n^{\alpha+\frac{1}{2}}$ $\left(n^{\beta+\frac{1}{2}}\right)$. При естествени ограничения върху функцията $f(x)$, нейният ред на Фурие – Якоби е равномерно сходящ в $[-1,1]$. При $\alpha = \beta = 0$ полиномите на Якоби съвпадат с полиномите на Лежандър.

4. Интегралната трансформация на Якоби се задава с формулата

$$\mathcal{J}(F(x)) = f^{(\alpha,\beta)}(n) = \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx.$$

При известни условия е налице формула за обръщането на $\mathcal{J}$. При $\alpha = \beta = 0$ $\mathcal{J}$ съвпада с трансформацията на Лежандър. $\mathcal{J}$ се използва при решаването на някои специални класове от израждащи се линейни ОДУ от II ред.

5. Добре известен е от механиката вариационният принцип на Якоби за стационарното действие, който е установен от него за холономни консервативни системи. Намирането на траекториите на движение на холономна консервативна система се свежда до геометричната задача за намиране в Риманово пространство с подходяща метрика dS^2 на екстремалите на някаква вариационна задача. По-точно, функционалът действие има минимум върху траекториите на движението.

6. Символ на Якоби и приложения в алгебрата. Трябва предварително да напомним някои дефиниции и резултати от теория на числата. И така, нека p е нечетно просто число, а m е цяло, взаимно просто с p, т.е. $(m,p) = 1$. Символът на Лежандър $\left(\frac{m}{p}\right)$ се дефинира така:

$$\left(\frac{m}{p}\right) = \begin{cases} 1, & x^2 \equiv m \,(\mathrm{mod}\, p) \\ -1, & x^2 \not\equiv m \,(\mathrm{mod}\, p) \end{cases}$$

Нека сега $p \neq q$ са нечетни прости числа, т.е. $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ имат смисъл. Гаус доказа

знаменития закон за реципрочност на квадратичните остатъци, съгласно който

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Да предположим, че $P > 1$ е нечетно, а цялото число a е взаимно просто с P, т.е. $(a, P) = 1$. Разлагаме $P = p_1 \dots p_r$ на прости множители p_j (канонично разлагане), като някои от тях могат да съвпадат.

Якоби въвежда през 1837 г. символа $\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\dots\left(\frac{a}{p_r}\right)$ и установява, че той има свойства, аналогични на символа на Лежандър, като и за него е валиден законът за реципрочност на квадратичните остатъци. Тук $P, Q > 1$ са нечетни, $(P, Q) = 1$.

7. Скобка на Якоби (известна още като скобка на Майер): $[F, Q]$. Диференциален израз, съдържащ в билинейна форма първите производни на $F(x, u, p)$, $G(x, u, p)$, където $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$. Лесно се вижда, че $[F, G] = -[G, F]$ и е валидно следното тъждество на Якоби: $[F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0$.

Ако F, G не зависят от u, скобката на Якоби съвпада със скобката на Поасон. И тази дефиниция я има в Crelle.

8. През 1842 г. Якоби въвежда в Crelle ОДУ от I ред, което сега носи неговото име:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Axy + By^2 + ax + by + c}{Ax^2 + Bxy + \alpha x + \beta y + \gamma}.$$

Горното уравнение е интегруемо в явен вид, защото се свежда до хомогенно ОДУ от I ред.

Има сравнително прост начин за решаване на уравнението на Якоби чрез редуцирането му към 3×3 система от ОДУ с постоянни коефициенти. Тогава решението се записва в параметричен вид.

И така, записваме ОДУ на Якоби във вида

$$(a_2x + b_2y + c_2)\,dx - (a_1x + b_1y + c_1)\,dy + (a_3x + b_3y + c_3)\,(-ydx + xdy) = 0,$$

където $\tilde{l}_j = a_jx + b_jy + c_j$, $j = 1, 2, 3$ са линейни полиноми от първа степен с реални коефициенти. Нарочно не прецизираме изискванията върху тях. Обичайната хомогенна смяна, известна от аналитичната геометрия $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, $x_3 \neq 0$, води до: $dx = \frac{x_3dx_1 - x_1dx_3}{x_3^2}$, $dy = \frac{x_3dx_2 - x_2dx_3}{x_3^2}$; $\frac{y}{x} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) = d\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \Rightarrow xdy - ydx = \frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_3^2}$.

След заместване в изходното уравнение заключаваме, че:

$$l_2(z)\,(x_3dx_1 - x_1dx_3) - l_1(z)\,(x_3dx_2 - x_2dx_3) + l_3(z)\,(-x_2dx_1 + x_1dx_2) = 0,$$

където линейните форми в $\mathbb{R}^3$ са: $l_j(z) = a_jx_1 + b_jx_2 + c_jx_3$, защото $z = (x_1, x_2, x_3)$, $A_j = (a_j, b_j, c_j)$, т.е. $l_j(z) = \langle A_j, z\rangle$.

Диференциалното уравнение относно x_1, x_2, x_3 се записва в детерминантен вид:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ l_1(z) & l_2(z) & l_3(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Знаем, че ако разгледаме 3×3 системата ОДУ с постоянни коефициенти в $\mathbb{R}^3$: $\dot{z}(t) = Az$, където $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, а $Z = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, то $\dot{x}_j = l_j(z) = \langle A_j, z \rangle$, $j = 1, 2, 3$ е решение на предишното уравнение. Общото решение на линейната система се дава от $z(t) = e^{At} \cdot C$, $C \in \mathbb{R}^3$, $C = \text{const}$.

Уравнението на Якоби притежава решенията $x = \dfrac{x_1(t)}{x_3(t)}$, $y = \dfrac{x_2(t)}{x_3(t)}$, които са записани в параметричен вид. Ако от първото уравнение изразим в някакъв интервал $t = \varphi(x)$, то $y = \dfrac{x_2(\varphi(x))}{x_3(\varphi(x))}$. Тук $t \in \Delta_1 \subset \mathbb{R}^1$, $x \in \Delta_2 \subset \mathbb{R}^1$ и $\dfrac{d}{dt}\dfrac{x_1(t)}{x_3(t)} \neq 0$ в Δ_1. Разбира се, $x_3(t) \neq 0$ в Δ_1.

Пример: $\tilde{l}_1 = y + 1$, $\tilde{l}_2 = x + 1$, $\tilde{l}_3 = x + y$, т.е. $l_1 = x_2 + x_3$, $l_2 = x_1 + x_3$, $l_3 = x_1 + x_2$. Тогава имаме система ОДУ 3×3:

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 \end{array} \right. .$$

Както знаем от курса по ОДУ, общото ѝ решение е:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ x_2 = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ x_3 = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t} \end{array} \right. ,$$

където C_1, C_2, C_3 са произволни константи. Значи в параметричен вид

$$x = \frac{C_1 e^{3t} + C_2}{C_1 e^{3t} - (C_2 + C_3)},\ y = \frac{C_1 e^{3t} + C_3}{C_1 e^{3t} - (C_2 + C_3)},\ C_1 e^{3t} \neq C_2 + C_3.$$

От първото уравнение формално намираме $e^{3t} = \dfrac{(C_2 + C_3)x + C_2}{C_1(x - 1)} > 0$. Оттук вземаме e^{3t} и го заместваме във второто уравнение, откъдето следва, че y е дробно-линейна функция на x в някакъв интервал на изменение на x.

9. Добре известна е функционалната детерминанта на Якоби $\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ на диференцируемите функции $\varphi_j(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Понякога я наричат Якобиан и модулът ѝ играе важна роля при смяната на променливите в кратните интеграли. Според историци на математиката тази детерминанта се появява за пръв път в статия на Коши през 1815 г. Якоби пише голям мемоар през 1841 г., посветен на Якобиана, и изследва функционалната (не)зависимост на функциите, която води до (не)анулиране на Якобиана.

Ще пристъпя сега към фундаментални резултати на Якоби от теорията на елиптичните функции (1829 г. и след това – отпечатани в Crelle). Тук спадат дефинициите на тета функция, на елиптичните функции на Якоби и приложенията им в механиката. Уравненията на движението на махалото, на пумпала на Ойлер, на симетричния пумпал на Лагранж в гравитационно поле и Кеплеровия проблем са интегруеми в термините на (посредством) якобиевите елиптични функции.

10. Якоби дефинира 4 тета функции $\theta_0, \ldots, \theta_3$, но ще запишем тук формулата само за една от тях, а именно $\theta_3(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(m^2\tau+2mv)\pi i}$, където τ е параметър и $\operatorname{Im}\tau > 0$ обезпечава сходимостта на реда. Всички θ функции удовлетворяват ЧДУ $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 4\pi i\dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}$.

Означенията на Якоби за елиптичните функции не се използват в наши дни. Те са заменени с по-удобните означения на Гудерман от 1838 г. И така, това са $x = \operatorname{sn} w$, $\sqrt{1-x^2} = \operatorname{cn} w$, $\sqrt{1-k^2x^2} = \operatorname{dn} w$, $0 \le k \le 1$, където $w = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$. Произнасят се синус амплитуда, косинус амплитуда и делта амплитуда. Интегралът в дясната страна носи името елиптичен интеграл от I род в нормална форма на Лежандър. Неговото обръщане (т.е. неговата обратна функция) има вида $x = \operatorname{sn} w$.Това е изходният пункт в теорията на Якоби.

И така, $w = \operatorname{sn}^{-1} x$, $w = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sn} w} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$. Якоби дефинира $\operatorname{sn} w$ в комплексна област чрез $\theta_0, \ldots, \theta_3$. Знаменит резултат на Якоби от онова време е следната теорема.

Ако една еднозначна аналитична функция е многопериодична, то тя има най-много 2 периода, чието частно не може да бъде реално число.

Елиптичните функции на Якоби са 2-периодични, имат безбройно много нули и полюси и теорията им е добре развита. Очевидно $\dfrac{dx}{dw} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \Rightarrow \dfrac{d\operatorname{sn} w}{dw} = \operatorname{cn} w \cdot \operatorname{dn} w$. Тъждествата $\operatorname{sn}^2 w + \operatorname{cn}^2 w = 1$, $\operatorname{dn}^2 w + k^2 \operatorname{sn}^2 w = 1$ водят до равенствата $\dfrac{d}{dw}\operatorname{cn} w = -\operatorname{sn} w \cdot \operatorname{dn} w$, $\dfrac{d}{dw}\operatorname{dn} w = -k^2 \operatorname{sn} w \cdot \operatorname{cn} w$. Очевидно $\left(\dfrac{d}{dw}\operatorname{sn} w\right)^2 = (1-\operatorname{sn}^2 w)(1-k^2\operatorname{sn}^2 w)$, $\left(\dfrac{d}{dw}\operatorname{cn} w\right)^2 = (1-\operatorname{cn}^2 w)(k'^2 + k^2\operatorname{cn}^2 w)$, $\left(\dfrac{d}{dw}\operatorname{dn} w\right)^2 = (1-\operatorname{dn}^2 w)(\operatorname{dn}^2 w - k'^2)$, $k'^2 = 1-k^2$. Функцията $\operatorname{cn} w$ в $\mathbb{C}^1$ е с периоди $4K$ и $2iK'$, $K, K' \in \mathbb{R}^1\backslash 0$.

Якоби дефинира и така наречената Z функция

$$Z(w) = \frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}\sin\frac{\pi w}{K}}{1-2h^{2n-1}\cos\frac{\pi w}{K}+h^{4n-2}},$$

където $h = e^{i\pi\tau}$, $\theta_0(w+2K) = \theta_0(w)$, $\operatorname{sn}(u+4K) = \operatorname{sn} u$, което му позволява да намери събирателна формула за $\operatorname{sn}(u+v)$.

11. Ще кажа няколко думи за знаменитата теория на Хамилтън – Якоби, която е имала широко приложение в механиката през XIX в., а и досега се използва в математическата физика и в теорията на псевдодиференциалните оператори. Тя дава интересна връзка между хамилтоновите системи ОДУ в $\mathbb{R}^{2n}$ и нелинейните частни диференциални уравнения от I ред, но с $n+1$ независими променливи. И така, да разгледаме нелинейното ЧДУ

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(x,p) = 0, \tag{1}$$

където $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $p = \nabla_x V$, $H \in C^2$ и съответната му хамилтонова система ОДУ е

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Както знаем, хамилтонианът $H(x, p)$ е пръв интеграл на (2), т.е. $H(x(t), p(t)) \equiv \text{const}$ върху всяка интегрална крива на (2).

Да предположим, че $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и a_{n+1} са реални параметри, запълващи някаква област в $\mathbb{R}^{n+1}$. Ще казваме, че функцията $V = V(t, x, a) + a_{n+1}$ е пълен интеграл на (1), ако $V = V(t, x)$ удовлетворява (1) за всяка стойност на (a, a_{n+1}) и още $\det\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_j}\right) \neq 0$. Якоби доказа, че ако V е пълен интеграл на (1), общото решение на (2) се дава от равенствата

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Означаваме $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Казано малко по-грубо, решенията x_i, p_i, получени от (3), зависят от (t, a, b), т.е. от $2n$ произволни константи a, b. Якоби предлага така наречения „втори метод на Якоби“ за намиране на пълни интеграли. Негов прост илюстриращ пример в това отношение е ЧДУ, описващо в сферични координати (r, θ, φ) движението на планетите в Слънчевата система:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right] = \frac{k^2}{r} - \alpha, \tag{4}$$

където α е произволна реална константа (енергия).

Очевидно (4) не зависи явно от θ, т.е. θ е циклична координата. Той съумява да намери чрез така нареченото разделяне на променливите следния пълен интеграл на (4):

$$V = +\alpha t + \int \sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}\, dr + \int \sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin^2 \varphi}}\, d\varphi + \sqrt{2\gamma}\theta + \text{const}, \quad \gamma > 0, \tag{5}$$

т.е. $V = +\alpha t + W + \text{const}$.

Съгласно теоремата на Якоби (при шестте параметъра α, β, γ, α', β', γ') трябва да разгледаме системата

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \gamma', \text{ т.е.}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha' - t, \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma} = \gamma', \tag{6}$$

т.е. $t - \alpha' = \displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2k^2}{r} - 2\alpha - \dfrac{2\beta}{r^2}}}$ и аналогични изрази намираме за β' и γ'. Интегралите, които се срещат в лявата страна на (6), могат да се изразят чрез елементарни функции (Ойлерови субституции и т.н.). По този начин намираме траекторията на една планета около Слънцето (закон за движение) във вида $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = \theta(t)$, като трите функции зависят от общо 6 параметъра. В Кеплеровия случай елиптични функции не са нужни.

12. Добре известно е условието на Якоби от вариационното смятане. Накратко, в точката на минимум на един функционал $\mathcal{J}$ първата вариация $\delta\mathcal{J}$ е 0, а втората $\delta^2\mathcal{J}$ е по-голяма или равна от 0. В точките на минимум са изпълнени диференциалните уравнения на Ойлер. От втората вариация пък възникват диференциалните уравнения на Якоби и понятието спрегнати точки.

Необходимото условие на Якоби за съществуване на минимум по втора вариация е неособената екстремала $x(t)$, реализираща минимум в $[t_1, t_2]$ да бъде такава, че (t_1, t_2) да не съдържа точки, спрегнати с t_1.

Ще завърша това изложение със следния забележителен според историка на математиката J. M. Cleary (Historia Math., 21, 1994, 377–385) резултат на Якоби от геометрията на пространствените криви (1842).

Сферичното изображение на нормалните направления към гладка затворена пространствена крива разделя единичната сфера на две равнолицеви области.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Математическая энциклопедия, т. 5, 1985, Москва [Mathematical Encyclopedia, vol. 5, 1985, Moscow] (in Russian).

[2] И. Гельфанд, С. Фомин. Вариационное исчисление, Москва, 1961. [I. Gel'fand, S. Fomin. Variational calculus, Moscow, 1961] (in Russian).

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

KOLMOGOROV, STOCHASTICS IN BULGARIA, AND PROBABILISTIC PROBLEMS WITH UNEXPECTED SOLUTIONS*

Jordan M. Stoyanov

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
and Faculty of Mathematical Sciences, Shandong University,
Jinan, China
e-mail: stoyanovj@gmail.com

In this talk, I am going to share with the readers my memories of personal meetings with Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987), the content of our conversations, and the fruitful consequences. The reader is familiar with, or could read, the timely prepared recent comprehensive paper [34], presented by N.M. Yanev at the 52nd Spring Conference of the UBM. Included here are several new details about Andrey Nikolaevich and the great influence of the Moscow Probability School on the development of Stochastics in Bulgaria. I have used *MathSciNet* and introduced the 'Kolmogorov number', a 'collaboration distance' between a mathematician and Kolmogorov, with a focus on Bulgarian stochasticians. I am writing about Kolmogorov's approach to doing mathematics in general and the role of counterexamples. Discussed are two specific probabilistic problems which, according to him, are with most unusual solutions, 'Skitovich-Darmois theorem' and 'Plackett problem'. Several related short stories and not well-known facts are presented.
Keywords: A. N. Kolmogorov, Stochastics, Probability theory, Kolmogorov number, Normal distribution, Skitovich-Darmois Theorem, Mean sample range, Plackett problem.

КОЛМОГОРОВ, СТОХАСТИКА В БЪЛГАРИЯ, И ВЕРОЯТНОСТНИ ЗАДАЧИ С НЕОЧАКВАНИ РЕШЕНИЯ

Йордан М. Стоянов

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mail: stoyanovj@gmail.com

*2020 Mathematics Subject Classification: 01A70, 01A60, 60E05, 62E10.

В този доклад ще споделя с читателите мои спомени за лични срещи с Андрей Николаевич Колмогоров (1903 – 1987), съдържанието на наши разговори и последвали резултати. Читателят е запознат, или може да прочете, навременно подготвения и изчерпателен доклад [34]. Тук съм включил редица нови факти за А.Н. и голямото влияние на Московската Вероятностна школа върху развитието на стохастиката в България. Използвах MathSciNet и дефинирах т. нар. число на Колмогоров, съавторско разстояние на математик и Колмогоров, с акцент върху български стохастици. Разказвам за подхода на Колмогоров в математиката и за ролята на контрапримерите. Обсъждам две конкретни вероятностни задачи, които според него са с доста неочаквани решения, Теоремата на Скитович–Дармоа и Задачата на Плакет. Включени са също редица кратки случки по темата и не така добре известни факти.
Ключови думи: А. Н. Колмогоров, Стохастика, Теория на вероятностите, Число на Колмогоров, Нормално разпределение, Теорема на Скитович–Дармоа, Среден размах на извадка, Проблем на Плакет

Mathematics is a synthesis of the two ideals making meaningful human life, the ideal of truth and the ideal of beauty.

A. N. Kolmogorov

Introduction. There were at least five remarkable occasions in the year 2023 related to the great mathematician Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987):

• 120th anniversary of his birth;

• 100th anniversary of the publication of his first paper [10] with a sensational result showing by a counterexample that not always a continuous function has a convergent Fourier series. According to the well-known British mathematician W. K. Hayman (1926–2020), *This result brought him an instant fame*!

• 90th anniversary of the publication of the fundamental book:

Kolmogoroff, A.N. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Julius Springer, Berlin, 1933.

• 60th anniversary of the opening of the 'Kolmogorov's School-Internat', 18th Physics-Mathematics School at Moscow State University (abbr.: MSU).

• 70th anniversary of Skitovich-Darmois Theorem. [Topic much appreciated by A.N. Kolmogorov.]

Academic events. The 120th anniversary of the birth of Andrey Nikolaevich Kolmogorov (abbr.: ANK) was properly and deservingly celebrated at many scientific institutions worldwide. Among them were special meetings organized by MSU and the Russian Academy of Sciences (abbr.: RAS).

The Principal Seminar in Probability Theory at MSU, chaired by A.N. Shiryaev, dedicated to ANK a series of online talks in the spring of 2023. I was glad to prepare and deliver one of the talks, 5 April 2023, see [31]. This prestigious seminar was initiated and founded by ANK in 1955 and chaired by him until 1967. The next chairman was B.V. Gnedenko (1911–1996) with A.N. Shiryaev succeeding the chairmanship until now. That seminar and its participants played a central role in establishing what is called 'Moscow Probability School'.

Two related events in Bulgaria should be listed here: the talk by N.M. Yanev [34] given at the 52th Spring Conference of the UBM, 10 April 2023, and my talk [32] given at the National Seminar in Stochastics (IMI–BAS), 26 April 2023; see also the Colloquium talk [30].

Comment. Besides MSU and RAS, two more abbreviations were used above: UBM for 'Union of Bulgarian Mathematicians' and IMI–BAS for 'Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences'. In what follows we also use FMI-SU for 'Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University' and TPA for the journal 'Theory of Probability and Its Applications'.

ANK's public recognition. Over the last 70 years, the main building of MSU is located on the hill 'Vorobyevy Gory', and is seen from almost any point in the city. On 15 October 2015, the city Mayor, Mr. S. Sobyanin, announced at a ceremony that the name ***Kolmororov Street*** is given to a small and nice street, only for pedestrians, just in a front of Lomonosov's monument, with the main building of MSU seen behind. In Moscow, this is the only street named after Kolmogorov, and notice, there is no number.

1968: First meeting with ANK. In the autumn of 1968, I met ANK for the first time. It happened in the 18th Physics-Mathematics School affiliated with MSU. This is the famous 'Kolmogorov school-internat', founded in 1963 by three academicians, A.N. Kolmogorov, I.G. Petrovskii and I.K. Kikoin.

As a student at MSU, I was lucky to be located in one group consisting of 23 students who had just entered the university directly from the 18-th school. Among them were A. K. Zvonkin[1] and S. V. Matveev.[2] Being already university students, they started 'working as teachers' at their former school. I was curious and they invited me to join them and attend their two-hour lesson. When going to the classroom, we accidentally met ANK, so I was introduced to him, followed by a brief conversation. He promptly asked me if I wished to tell something interesting to the students. My reply was, 'Yes, will try, I have in mind a few topics'. And I did. After that, I put in order my notes on one of the topics and prepared a paper for the Bulgarian magazine 'Matematika', see [26].

1969: Kolmogorov's visit to Bulgaria. It is known that ANK attended an International Conference on Problems of Education, Varna, Bulgaria, in the summer of 1969. He gave an invited talk in the section 'Education in Mathematics'. Unfortunately, I was unable to find any specific information and details about his talk. According to N.M. Yanev, our late colleague I. Ganchev (1935–2012) accompanied ANK during a trip in Bulgaria to visit several historical and cultural places. In the sources [17] and [18], dedicated to I. Ganchev and based on his archive, there was nothing said about ANK.

1972: Meeting with ANK in Budapest. In September 1972, together with A. Obretenov (1930–1997), we attended the European Meeting of Statisticians, Budapest, Hungary. Among the well-known participants was AHK. To recall, he was speaking German and French, and of course, his native Russian, but not English (with no problem to read any text in English). Thus, seeing me to walk and talk with ANK, I was asked by a group of PhD students from Harvard to help them communicate with ANK, which I did. Here are, briefly recorded or remembered, some questions (**Q**) and answers (**A**) during the conversations:

[1] Professor Emeritus, University of Bordeaux, France.

[2] Academician, Chelyabinsk State University.

Q1. *How do you usually proceed for discovering and proving a new result?*

A1. *Based on what I already know in a specific area, I arrive at a possible new statement. Either I prove it within a few days, or give a counterexample!*

Q2. *Would you tell us about results in Probability which you have found most unexpected, surprising?*

A2. *There are many. Besides being useful, this kind of problems and solutions bring attractiveness to our science. Among them are 'Skitovich–Darmois theorem' and 'Plackett problem'.*

Q3. *Is there a case of somebody finding an error in your publications?*

A3. *Yes, it happened once. A closer look at the case led to introducing a new notion followed by an interesting and correct development!*

I was amazed by the way ANK answered Q1. I did not miss the chance to share with him details about my 'hobby' to collect counterexamples in Probability and stochastic processes. At that time, my collection was still tiny, but there were already good and impressive items. I was brave to mention that one of them was the Chung's counterexample related to the error, which ANK had in mind in his answer A3 above. The statement that the convolution of two unimodal densities is unimodal, as given originally in the book [5], turned to be incorrect. Later, all was settled.

He strongly encouraged me to continue my work and advised that when having a rich and relatively comprehensive collection, to find a good way to make that treasure available to all probabilists and statisticians worldwide.

1973: First Vilnius Conference. That was the beginning of a long and continuing series of most prestigious international events in Probability and Statistics attended widely by hundreds of scientists from all over the world. Like many others, I benefited from taking part in that and three subsequent conferences. In the photo below, ANK is delivering the opening lecture, 'Randomness and Complexity'.

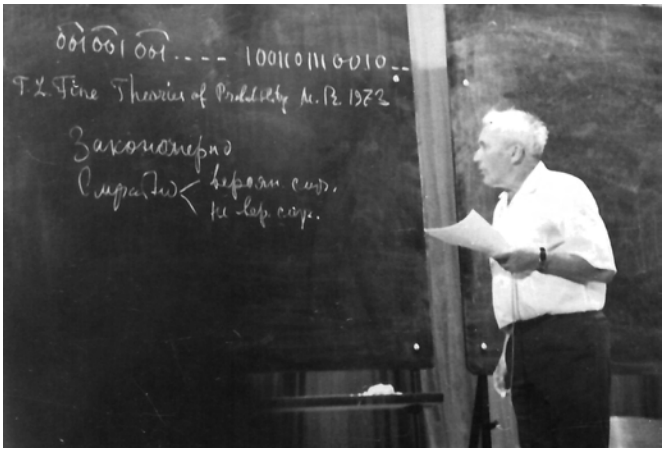


Fig. 1. A. N. Kolmogorov, Vilnius 1973

1973: ANK's special lecture. In the 'Ceremonial Hall' of the MSU, ANK delivered a special lecture, *Recent Advances in Spectral Analysis of Stationary Processes*. The announcement was distributed among all universities and institutions in Moscow and

beyond a month in advance. Our group of PhD students of A.N. Shiryaev got a strong advice to prepare ourselves on the topic and take seats on time. There was an audience of more than 500 people, from the whole country, the hall was full. The presentation was impressive. ANK answered several relevant questions. Then, he was asked an unusual question, namely, 'It is well-known that Mathematics in our country is at the highest level. Is this a consequence of the fact that mathematics and politics have nothing in common?' The answer was, 'Not related to the talk, nothing to comment.'

1981: Vilnius Conference, last personal meeting with ANK. Below is a photo taken by A. Lyasoff (Boston) during my last conversations with ANK. In fact, I 'reported' to him on the good progress, which I had made over the last years, and mentioned about the useful comments and suggestions made in person by A.N. Shiryaev, B.V. Gnedenko and D.G. Kendall during the European Meeting of Statisticians, Varna, September 1979. Since some steps were already done, I decided to tell ANK about receiving an invitation from 'John Wiley & Sons' to publish my future book 'Counterexamples in Probability'. He politely wished me 'good luck', by adding, 'if first in English, think of a Russian edition'. My active work continued with frequent discussions with colleagues and friends at conferences and when traveling within Europe. I was in correspondence with leading mathematicians, thus receiving valuable suggestions. Encouragements were expressed in letters to me from J.B. Doob, K.L. Chung and K. Itô. Essential, timely suggestions were coming from friends and 'members' of the Moscow Probability School.



Fig. 2. A. N. Kolmogorov and J. Stoyanov, Vilnius 1981

1982: Bulgarian translation of the ANK's book *Foundations of Probability Theory* was published as a part of the collection [11]. It was my pleasure to be the translator. A copy was sent to ANK, no idea where it is. In a few years, after the ANK's death, I arranged a gift-copy to reach A.N. Shiryaev. The copy is in the archive of ANK in the House-Museum of Alexandrov and Kolmogorov in Komarovka.

1983: A paper on the 80th birthday of ANK. The Bulgarian magazine 'Matematika' invited me to write the paper, what I did; see [26].

20 October 1987. The agency TASS announced: 'Today is a sad day for our nation and science. The greatly respected and worldwide recognized mathematician, Academician Andrey Nikolaevich Kolmogorov, passed away ...'

1987: The Book *Counterexamples in Probability*, 1st edition. It was 01 December 1987 when I received from the publisher, John Wiley & Sons, my author's copies. Gift-copies were given to the Libraries of IMI–BAS, FMI–SU and the Bulgarian National Library 'St.St. Cyril and Methodius'. I was planning to write a proper dedication and sign an autograph in a copy of my book and hand it personally to ANK during a visit to Moscow in 1988. The circumstances changed. The best I could do was to donate the copy to the Library of the Statistical Laboratory, MSU, whose founder and Director was ANK. Ironically, a year later it was found that the copy of my book was stolen! However, somebody's reaction was, 'Be happy, nobody steels bad books!'

ANK's *Will.* According to the Will, the House in Komarovka was inherited by A.N. Shiryaev. This included both the ANK's part and the P.S. Alexandrov's part. For the latter there had been a requirement for the future owner to support financially three PhD students in Topology, Mech-Math, MSU. All has been done accordingly! Moreover, A.N. Shiryaev used his royalty from Springer to completely renovate the whole property. Now, officially, it is ***House-Museum of Alexandrov and Kolmogorov***. The archives of the two great scientists are there, the place is marked as 'protected by the authorities'. I have been there twice, the feeling was unusual, the memories forever!

Kolmogorov's influence on Mathematics. Well-known is the role of Kolmogorov as the founder of, and a great contributor to, fundamental scientific schools within mathematics and its numerous applications. Knowing well the state of arts in several areas of mathematics and based on his own discoverings, ANK initiated new research themes which quickly became popular directions for further development.

The books [4] and [12], and the articles [15], [21], [22] contain a lot of details about the extraordinary life and work of ANK.

Perhaps one of the ANK's greatest and widely recognized achievements is the axiomatization and building up the foundation of Probability theory as a branch of Modern mathematics. Around 1930 he published a series of papers, each containing a new and significant result. Amazingly, each result was finding its natural place as a stone laid in the foundation of the future palace of Probability theory. Remarkably, these results were invented/discovered at the right time and were placed in the right location within the theory. However, the culmination was reached by the appearance of his *Grundbegriffe*. Notice, he wrote the book in German. In 1936 the book was translated into Russian, in 1956 into English. There is a 2nd Russian edition of 1974. There are editions in other languages, including in Bulgarian, see [11].

2003: Conference *Kolmogorov and Contemporary Mathematics.* That was among the greatest scientific events in the area of Mathematics in 2003. More than 1200 participants from 41 countries attended the event. Most of the ANK's direct academic pupils, also grand and great-grand pupils, came from all over the world. The scientific program was intensive. There were a large number of highest level presentations, most of them related to topics originated in works by ANK and further developed into modern scientific directions. Full information is contained in a carefully prepared booklet [7].

2016: Complete Bibliography of ANK. The book [1], of size 160 pp., was the first attempt to collect and put together the bibliographic data of all works by ANK: books, monographs and textbooks, papers in scientific journals, encyclopedic articles, prefaces to translated books, articles in periodicals and newspapers, biographies of other scientists. Included is also a List of publications dedicated to ANK. The material was compiled and edited by three ANK's academic pupils and collaborators. A new updated edition was published recently, in 2023.

Here is a remarkable detail: Mentioned in the Bibliography are 897 book titles. These are titles of books written or co-authored by ANK, titles of books edited by him, titles of books for which he had written the Preface, titles of books on which ANK had written reviews. It is not easy to imagine how such a gigantic amount of work has been completed by one person only.

ANK's Selected works. There are three volumes of his selected works (author's choice), with detailed comments by his academic pupils, all being top specialists in their specific areas. The volumes are published in Russian, and later translated into English. It is amazing to read the ANK's original papers, written compactly, telling clearly what is given, what we are looking for, and what we are proving under specified conditions. As mentioned at the beginning of my report, it was taking a couple of days to ANK to complete the proof of a possible statement. And, there are articles in which the main goal is to construct counterexamples to 'possible' statements. Obviously, for ANK to prove a statement, or give a counterexample, are equally valuable for the development of any area of mathematics.

A special issue of *Annals of Probability*, vol. **17**, no. 3 (1989), is dedicated to the memory of Kolmogorov. This great initiative came from A.N. Shiryaev who wrote a comprehensive paper of 79 printed pages, see [21].

Another great gesture of respect to ANK was made by the well-known British mathematical statistician D.G. Kendall (1918–2007) who organized a tribute to Kolmogorov's memory, a special issue of *Bulletin of LMS* **22**:1 (1990); see [15].

Kolmogorov as a person. Among everything said, written and published about ANK, the best is to refer to A.N. Shiryaev, [22]:

Everything about Kolmogorov was unusual.

From what I have seen and witnessed over the years, ANK was a quiet person, kind and attentive to anyone wishing to talk with him. He was a 'good listener' at seminar talks and when speaking with somebody. Catching easily what is the point, he was politely making comments or expressing his opinion, sometimes correctly telling that one needs a closer look at the topic.

Everybody knew about the deep knowledge and interest of ANK in areas such as history, poetry, music and arts. Thus, if you wished to talk with him, it was better for you to be well-prepared, just in case. Once, during a general conversation, ANK turned to me with a question about the ancient history of the Balkans. I was glad to reply adequately by mentioning a few relevant facts about the Thracians and their treasures.

Over several decades, being a world recognized authority in Mathematics, ANK was receiving gift copies of published books from scientists from all over the world, always with dedication and autograph. ANK was reading the books and giving advice of which book was good to be translated, and for which it was better to wait for the 2nd improved

edition. All books were available in the Library of Mech-Math, MSU, or in the Library of the Statistical Laboratory. Hundreds of people benefited a lot by the opportunity to read new books and learn what other scientists were working on.

For ANK to do mathematics was both strictly individual work and collective activity. The progress, however, comes by sharing knowledge and keeping mutual respect within the professional community.

From friends who were very close to ANK, I learned that if there was an occasion to celebrate, ANK preferred it done in a quiet way, without big noise and artificial speeches. Still, on the occasion of his 50th, 60th, 70th and 80th birthday, there were articles written by his colleagues and published usually in the journals TPA and Uspehi Matematicheskih Nauk. Interestingly, these jubilee articles, resemble in their style the typical compact style of ANK's writings.

As I mentioned before, ANK established in 1955 and chaired the Principal Seminar of the Department of Probability theory, Mech-Math, MSU. The organization was remarkable: for many years it is the same day, the same hours, and even the same room. Usually the starting time was 16:00, thus giving chance to many colleagues working at other institutions to come to MSU and attend the seminar. In fact, that was a city seminar involving scientists from Moscow with participants coming even from far away. The seminar program was prepared reasonably in advance and widely distributed. After ANK's death, the chairmanship was taken by B.V. Gnedenko and then by A.N. Shiryaev. The Kolmogorov's spirit and atmosphere of that seminar, and of other seminars, has been kept for the decades to come.

It is well-known, that ANK had been awarded, many times, nationally and internationally, at the highest level. Full details are given in the paper [22]. Among the foreign awards are the prestigious 'Wolf Prize' and 'Balzan Prize'. In those and other cases, ANK's decision and advice was to use all money, around hundred thousands for each, to buy books for the Library and make subscription to journals. For some journals a pre-subscription was made for a period of 10 years to come. All books and journals are available in the Libraries.

ANK: Great supervisor of PhD students. The system ***MGP*** (Mathematics Genealogy Project) shows 82 names (with no info for a few) of PhD students who had been supervised by him and defended their dissertations for PhD degree, and some for Doctor of Sciences degree. Only three of his PhDs were foreigners. It is proper, however, to mention the name[3] of N. Dmitriev, of Bulgarian origin, who was a PhD student of ANK and defended his dissertation most likely in 1948, see [35]. Referring again to MGP we see that ANK is among the top 25 supervisors. Moreover, the pair ANK and A.N. Shiryaev, is a unique pair in the top 100 of MGP!

ANK: Bulgarian academic grand-pupils. Bulgarian PhD students have been supervised by the following ANK 'academic pupils':

B.V. Gnedenko, B.A. Sevastyanov, A.N. Shiryaev, V.M. Zolotarev,

L.N. Bolshev, V.A. Uspensky.

Let me list the names of the ANK's Bulgarian academic grand-pupils:

Boyan Dimitrov, Penka Mayster, Nikolay Yanev, Jordan Stoyanov, Hristo Pavlov, Atanas Geshev, Dimitar Khadzhiev, Milan Petkov, Svetlozar Rachev, Elisaveta Pancheva,

[3]Thanks to N. Yanev for bringing my attention to this remarkable case.

Georgi Gargov, Vladimir Sotirov, Rossitza Dodunekova, Stoyan Poryazov, Rumyana Lukanova.

Comment. I have to add the names of other Bulgarian stochasticians with doctoral degrees, *Dimitar Vandev, Plamen Mateev, Mitko Dimitrov* and *Doncho Donchev*, supervised, respectively, by *A. Vershik, M. Malyutov, A. Solovyev* and *A. Yushkevich*.

ANK: Academic great-grand-pupils worldwide. It is not easy to count them, but there is a very large number of ANK's academic grand pupils and academic great-grand pupils. It is curious to tell that besides those in Bulgaria, ANK had, via Bulgaria, academic great-grand pupils in countries such as Mexico, Saudi Arabia, Brazil, Northern Macedonia, USA, Australia, New Zealand, Vietnam, Brazil, and possibly others.

ANK: Chairman of the Scientific Council at MSU. In the beginning of the 70s last century, ANK was the chairman of the scientific council at Mech-Math, MSU, for defense of dissertations and rewarding young scientists with PhD degree ('candidate of science', 'doctor') and Doctor of Sciences. Thus, ANK was the person signing the final Council decision for the doctoral degrees of five Bulgarian stochasticians.

Bulgarian Academic Rewards for ANK's academic pupils. Two ANK's academic pupils have been deservingly rewarded with honors by BAS and IMI for their essential contribution to the development of Stochastics in Bulgaria. They are B.A. Sevastyanov and A.N. Shiryaev.

Bulgarians publishing papers in TPA. The journal TPA was founded by ANK in January 1956. SIAM Society organized its translation from Russian into English for distributing it in the USA and elsewhere.

Here is another historical fact: Twelve Bulgarian probabilists have published papers in TPA. In a random order, they are: Tz. Ignatov, P. Mateev, G. Yamukov, N. Yanev, P. Mayster, D. Khadzhiev, S. Rachev, E. Pancheva, P. Jordanova, B. Penkov, P. Kopanov, J. Stoyanov.

'Kolmogorov number' for Bulgarian stochasticians. For any mathematician one can define a non negative integer number, denoted here by K, named 'Kolmogorov number', which is easy to find from MathSciNet. The number K can be considered as the 'collaboration distance' of a mathematician from AHK.

First, introduce the notations $\mathcal{S}_0$ and $\mathcal{S}_n$ for $n \in \bar{\mathbb{N}} = \{1, 2, \ldots, \infty\}$ for the sets (groups) of mathematicians. Thus, we deal with a finite number of sets each with a finite number of members (elements). We may think of a finite graph where each mathematician is a 'node', and if two mathematicians, X and Y, are co-authors, they are connected by an 'edge'. Every mathematician belongs to one of these sets depending on his/her Kolmogorov number. Roughly speaking, K is the number of 'edges' connecting X and ANK. The sets $\mathcal{S}_n$ can be defined inductively.

K = 0. It is clear that ANK is the only member of the set $\mathcal{S}_0$. Any other X belongs to exactly one of the sets $\mathcal{S}_n, n \in \bar{\mathbb{N}}$: $\mathrm{X} \in \mathcal{S}_n$ if and only if X has its $\mathrm{K} = n$. Notice, if all works of X are single-authored, then X belongs to the set $\mathcal{S}_\infty$.

K = 1. For $n = 1$, the set $\mathcal{S}_1$ includes all direct co-authors of ANK, so $\mathrm{X} \in \mathcal{S}_1$ means that X has $\mathrm{K} = 1$, there is one 'edge' connecting X and ANK. In this group there is one Bulgarian: N. Dmitriev, see [35].

K = 2. How is the set $\mathcal{S}_2$ built up? Suppose that X and Y are co-authors such that $\mathrm{X} \in \mathcal{S}_1$. If $\mathrm{Y} \notin \mathcal{S}_1$, then Y has $\mathrm{K} = 2$, hence $\mathrm{Y} \in \mathcal{S}_2$. In this case there is one

mathematician, it is X, the 'node' between Y and ANK, and there are 2 consecutive 'edges' connecting Y with ANK. For clarity, after Y we write in brackets the name of X. There are no Bulgarian stochasticians in the group $\mathcal{S}_2$.[4]

K = 3. We easily extend the idea used for the set $\mathcal{S}_2$. Namely, if X and Y are co-authors such that X $\in \mathcal{S}_2$ and Y is not in any of the sets $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$, then Y $\in \mathcal{S}_3$. Equivalently, Y has K = 3, there will be 2 'nodes' (mathematicians) and 3 consecutive 'edges' connecting Y with ANK. After Y we can write the 2 specific names.

Now one can describe inductively any set $\mathcal{S}_n$ for $n > 3$. Indeed, if X and Y are co-authors such that X $\in \mathcal{S}_{n-1}$ and Y is not in any of the sets $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_{n-1}$, then Y $\in \mathcal{S}_n$. Equivalently, Y has K = n, there are $n-1$ 'nodes' (mathematicians) and n consecutive 'edges' connecting Y with ANK.

Bulgarian stochasticians with K = 3:[5] A. Obretenov (Galambos-Rényi), B. Penkov (Sendov-Nikolskii), B. Dimitrov (Klebanov-Linnik), J. Stoyanov (Liptser-Shiryaev), R. Dodunekova (Khasminskii-Sinai), S. Rachev (Zolotarev-Sinai), D. Donchev (Yushkevich-Dynkin).

Bulgarian stochasticians with K = 4: N. M. Yanev (Vatutin-Zolotarev-Sinai), M. Tanushev (J Stoyanov-Liptser-Shiryaev), M. Savov (Doney-Ibragimov-Fadeev), A. Geshev (Kostadinov-Zabreiko-Fadeev), P. Kopanov (J. Stoyanov-Liptser-Shiryaev), E. Stoimenova (Balakrishnan-Kotz-Ostrovskii), L. Boneva (Kendall-Lorenz-Kantorovich), E. Pancheva (Balkema-Embrechts-Shiryaev), Tz. Ignatov (Rachev-Zolotarev-Sinai), L. Mutafchiev (Jaworski-Götze-Prokhorov), M. Bojkova (Bruss-Yor-Vershik), V. Kaishev (Krug-Tsypkin-Voronov), D. Vandev (Obretenov-Galambos-Rényi), L. Minkova (Omey-Korolev-Gnedenko), O. Enchev (= A. Lyasoff) (Stroock-Bresis-Arnold), S. Penev (Roszczynski-Vanderbei-Dynkin), N. Neykov (Cizek-Spokoiny-Shiryaev), G. Yanev (Nevzorov-Ibragimov-Fadeev), V. Stefanov (Manca-Korolyuk-Gnedenko), V. Stoimenova (Yakovlev-Gordon-Gorin), N.I. Nikolov (Kateri-Sturmfels-Gelfand), S. Stoev (Taqqu-Y. Meyer-Arnold), D. Vladeva (J. Stoyanov-Liptser-Shiryaev), Ch. Pirinsky (J. Stoyanov-Liptser-Shiryaev), Tz. Zaevski (Kyurkchiev-Andreev-Nikolskii), E. Petkova (Vannuci-Pfeiffer-Freidlin), R. Robeva (Pitt-Shepp-Shiryaev).

While the value of the Kolmogorov number for an individual can be considered just for curiosity, much more interesting and valuable is to see the large number of well-known co-authors of Bulgarian stochasticians. This is a clear indication of the strong relationships between Bulgarian stochasticians and colleagues worldwide.

Stochastics in Bulgaria. The paper [25] is a a good source of information about the status and development of stochastics in Bulgaria for a long period, from the end of 19th century to the end of 2014.

[4] However, with K = 2 are the following Bulgarian mathematicians, not from the area of Stochastics: Bl. Sendov (Nikolskii), V. Drensky (Ershov), P. Kenderov (Archangelskii), P. Popivanov (Egorov), B. Bojanov (Nikolskii), L. Stoyanov (Smirnov), P. Petrushev (Nikolskii), A. Andreev (Nikolskii), D. Bainov (Mitropolskii).

[5] Any Bulgarian mathematician not from Stochastics, who is a co-author of somebody with K = 2, see their names above, will have K = 3. Here are: L. Iliev, J. Revalski, S. Troyanski, K. Ivanov, O. Mushkarov, R. Lazarov, V. Petkov, V. Popov, S. Markov, N. M Nikolov, G. Nikolov, N. Ribarska, M. Konstantinov , N. Kyurkchiev, I. Kortezov. Some colleagues have K = 3 in a different way, e.g., S. Dodunekov (Bassalygo-Sinai), N. Popivanov (Moiseev-Oleinik), N. Kutev (P Lions-Arnold), L. Katzarkov (Itenberg-Viro).

In this talk, I would like to share with the audience my personal observations and details about my involvement and work in the years after 1970. That was the year when I graduated from MSU and joined the Mathematical Institute of BAS. Being well-familiar with the traditions, observed and experienced at MSU, and keeping that as my personal philosophy, I was well-'equipped' to collaborate with other colleagues and we started implementing novelties and good academic practices. As a result of our collective work, a visible progress was achieved by Bulgarian stochasticians. The following positive aspects have to be mentioned:

(a) *Staff.* A good number of new staff were appointed at both BAS and SU, people who got their university education and/or doctoral degrees mainly at MSU, and also at other institutions.

(b) *Research.* Gradually, the research output was increasing in the number of papers, reports at seminars and conferences, and publications in top professional journals. The range of topics covered in those papers was quite wide: Markov chains and processes, Queuing theory, Survival analysis, Characterization of distributions, Brownian motion, Diffusion processes, Stochastic calculus and SDEs, Branching processes, Discrete distributions, Martingales, Limit theorems, Statistical inference, Stochastic models in Biology. In more recent times, we see successful work in Stochastic financial models, Lévy processes, and others.

(c) *Publications.* A large number of first class papers by Bulgarian stochasticians were published in leading international journals. Besides in Bulgarian, books on modern stochastics appeared in English language by top international publishers.

(d) *Courses at SU.* New modern courses and programs were established for the students at FMI-SU. For nearly 25 years, staff from both BAS and SU were taking actively part in the education at SU, including supervision of Master and Doctoral students. Several books at good international level were published. Unfortunately, the involvement of staff at BAS in SU business became negligible.

(e) *Events.* We organized a series of International Summer Schools in Probability and Statistics, Workshops in Data Analysis, European Meeting of Statisticians, First World Congress in Branching Processes, and twice, Sections in SDEs during conferences in differential equations. Several other national seminars and meetings were held.

(f) *Seminars.* In the autumn of 1970 we organized the 'General Seminar in Probability and Statistics', by fixing that talks would be given on every Wednesday, at 15:00. The chairman was B. Penkov for a few months and then A. Obretenov for many years to come. I delivered two talks, and was appointed as a Seminar Secretary for 10 years, until 1980, being succeeded by S. Rachev. We managed to consolidate almost all Bulgarian stochasticians. Around 180 seminar talks were given by staff members at BAS and SU, colleagues from other institutions, and foreign visitors. It was a great time of dedicated individual and collective work. I was collecting real paper copies of all announcements. A folder containing that invaluable treasure was given in person to a known colleaguessa with the words, 'this is unique, please, preserve it for the history'. It is sad to report today that the folder has not be found. The search continues.

(g) *Dissertations.* Over the years, a large number of mathematicians were attracted to perform studies in Stochastics and its applications. They earned their scientific degrees, thus joining the Stochastics guild in Bulgaria.

(h) *Visits.* Bulgarian stochasticians were finding good positions at prestigious univer-

sities abroad. Impressive is the list of leading foreign stochasticians who were quests of BAS or SU. The international cooperation went up.

Comment. A separate article could and should be written on any of the above items. The paper [34] is a useful source about ANK and covers developments in Branching processes, in general, and in Bulgaria. I am appealing to other colleagues also to share appropriately their own experience and memories.

It deserves to tell good words about the modern trend of the courses at SU. A. Obretenov was teaching Probability theory based on Kolmogorov's axiomatics. Following the advice by ANK, given in Budapest, the textbook [10] was prepared and published as the first modern book in Probability in Bulgaria. Another advice by ANK was to have at hands a collection of exercises, from easy to difficult, with solutions or hints. Together with colleagues, after a few years of working on that project, we produced the manual [33], a rich collection of diverse exercises, used for university courses at all stages. The material was class-tested proving to be more than useful. Perhaps in the 70s-80s of the last century, [33] was one of the best available collections of the sort not only nationally but also internationally. We were glad to see that the manual was translated into Polish, there have been two editions: Warsaw, PWN, 1982 and 1992. The 2nd Bulgarian edition of 1985, containing already 777 exercises, was translated into English. That edition of 1989 was dedicated to the 100th anniversary of the foundation of SU. There is a 3rd Bulgarian edition of 2012, still in use at SU and other universities.

In the academic year 1973/1974, I started teaching regularly a special modern course in 'Stochastic processes'. As a result, after giving the course for a few years, I prepared and published the book [28]. The book was used for many years, in Bulgaria and other countries. It proves useful and fresh even today.

In the 70s and 80s, for more than 10 years, I was conducting a 'Circle in Analysis, Probability, Combinatorics', attended usually by 10 good students at FMI-SU. It was a work for pleasure, not for marks. It was a great satisfaction to see that most of the attendees grew up and became professional mathematicians.

Additionally to our institutional duties, there was a system for staff at BAS and SU to travel to other cities of the country and give lectures on selected mathematical problems addressed to school students and their teachers. That was also part of the students' training for national and international competitions in mathematics, such as the National Olympiad and the IMO. I was among the not too many colleagues who wrote and published popular papers in the area of Probability and Combinatorics in the magazine 'Matematika', in Bulgarian. All that 'public/society activity' was and is quite useful in general, but also for attracting young boys and girls to study mathematics.

Let me tell more about my book 'Counterexamples', see [29] for details of all three editions in English and two editions in Russian. I was satisfied to learn from foreign colleagues that the book became a useful and irreplaceable supplementary source for young researchers, university teachers of undergraduate and graduate courses, including for training of PhD students. Based entirely on the book, special courses/seminars have been organized at Yale University, MSU, Technische Universität Dresden. I have given a large number of talks on the topic.

I met with interest a series of questions from colleagues during my trips and visits worldwide. I was asked, e.g., how the idea was born, how I managed to complete such an

enormous amount of work over so many years, how I was allowed to deal with a Western publisher, how the book was met in Bulgaria and abroad, what kind of reviews appeared, did I become a millionaire, etc.

To answer the above and other related questions, I found it appropriate to include details in the present talk. Let me add a few words more.

First, 'Counterexamples in Probability' is a volume in the most prestigious series, 'Probability and Mathematical Statistics' of the Publisher 'John Wiley & Sons'. For 'Wiley' successful is a book receiving 5–6 reviews. Surprisingly to me, there were 24 reviews on the 1st edition of my book. This was and still is an absolute record for a book by 'Wiley'. Some reviewers explicitly wrote that, for good reasons, the book is a great achievement, it was listed among the most useful sources in Stochastics, and it was predicted that the book will 'live' at least half a century. Below is a picture of the covers of some editions of the book.[6]



Fig. 3. Covers of the editions 1987, 1997, 2012, 2013

Second, for this book, the 1st edition, I received an award by the Union of Scientific Workers in Bulgaria. Later, the book was explicitly mentioned in the citations on two occasions, when I became 'Elected Member of the International Statistical Institute' and 'Fellow of the Institute of Mathematical Statistics'.

Third, what I said above, confirms that the book 'Counterexamples in Probability' is considered as a contribution to Stochastics in general, hence to Stochastics in Bulgaria. Notice, the two leading Bulgarian institutions, BAS and SU, are listed as my affiliation in all five editions of the book.

In conclusion, a lot has been done in the area of Stochastics in Bulgaria over the last half a century. The research was transformed from traditional classical topics to most modern topics from Contemporary stochastics.

Probabilistic problems with unusual solutions. The terms 'unusual', 'non-standard', 'unexpected', 'surprising', or 'strange but true', are used to name something which does not correspond to what we believe we know, it may even contradict our intuition. However, in general, the human knowledge is not unlimited and as for our intuition, it is frequently wrong.

[6]There are five illustrations by A.T. Fomenko (MSU) used in the text of all editions. One of them is used for the cover of the 1st and the 2nd 'Wiley' editions, another one, for the MCCME edition.

I have mention above about ANK's indication of two problems with unexpected solutions, see his answer A2. I will give details below and describe some real and relevant stories.

Characterization of the normal distribution. Because of the Central Limit Theorem, the importance of this distribution for both theory and applications is out of doubt. Hence, one of the important questions is: How to characterize the normal distribution? Equivalently, how to find a property, preferably easy to check, which is true only for the normal distribution?

One of the first results was found by G. Polya and S.N. Bernstein: If X and Y are independent random variables with the same unknown distribution function, say F, and the variables $X+Y$ and $X-Y$ are independent, then necessarily F is normal. The converse is clearly also true. Thus, by using two symbols, $\mathcal{N}$ for the normal distribution, and $\perp\!\!\!\perp$ for the property 'independence', we can write:

Given are $X \sim F$, $Y \sim F$ with $X \perp\!\!\!\perp Y$. Then $X+Y \perp\!\!\!\perp X-Y \iff F \in \mathcal{N}$.

There are several and diverse extensions of this result. Here is a remarkable case and a few related stories. Suppose $X_1, \dots, X_n, \dots$, are independent random variables with values in $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ and arbitrary distributions, and $a_1, \dots, a_n, \dots$ and $b_1, \dots, b_n, \dots$, are real numbers. Consider two linear forms:

$$L_n^{(a)} := a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \quad \text{and} \quad L_n^{(b)} := b_1 X_1 + \cdots + b_n X_n. \tag{1}$$

Since both forms are functions of the same variables, we may think that they are dependent, or, that 'it is unlikely' for $L_n^{(a)}$ and $L_2^{(b)}$ to be independent. Contrary to our intuition, there is a unique and remarkable case, when such a property, independence, holds!

Skitovich–Darmois Theorem. *With the above notations, we have:*

Claim 1. $L_n^{(a)} \perp\!\!\!\perp L_n^{(b)} \implies$ *all* X_j *with* $a_j b_j \neq 0$ *are* $\mathcal{N}$.

Claim 2. *If all* X_j *with* $a_j b_j \neq 0$ *are* $\mathcal{N}$ *and* $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0 \implies L_n^{(a)} \perp\!\!\!\perp L_n^{(b)}$.

Besides the original proofs in [2] and [23], available in the literature are several different proofs, see [6], [8], [9], [20]. One of the ideas is to use the multiplicative property of the characteristic function of sums of independent random variables and arrive at a differential equation whose solution exactly corresponds to the normal distribution.

1953: Story 1: It happened 70 years ago, two papers appeared, Darmois [3] and Skitovich [23], proving the same result. Working under the supervision of Yu.V. Linnik, Skitovich completed his work in 1952, to meet first a skepticism from Linnik, who showed the work to ANK. ANK found that the result was amazingly unusual and suggested, 'check again'. In about 3 months, all was confirmed to be correct. Thus, Skitovich announced his result in 'Doklady', [23], and the full text in 'Izvestiya', [24]. The common name used for decades is Darmois-Skitovich or Skitovich-Darmois Theorem.

However, Skitovich–Darmois Theorem became a center around which a lot of research was performed. One of the great scientists, ***C.R. Rao***[7] (India, USA), who was both a

[7] C.R. Rao was born on 10 September 1920 and died in August 2023 just three weeks before his 103th birthday.

Mathematician and a Statistician, made his own contribution, by publishing papers on that topic, including one in 'Sankhya', see [20].

1970: Story 2. In September 1970, C.R. Rao visited the Mathematical Institute, BAS, Sofia, for a few days. In the ancient building, in Latinka Str., he delivered a talk on Skitovich–Darmois Theorem (by chalk on a small black board). Being a good speaker, Rao provided convincing arguments. During the questions/comments time, I asked him the following question:

The linear forms $L_n^{(a)}$ and $L_n^{(b)}$ in (1) depend on n, a fixed number. What will happen if instead of n we take random Markov times?

Recall, Markov times (also called stopping times) are positive (X_j)-adapted integer-valued random variables. Rao commented, 'No idea, it looks more complicated'. He made a record in his Notebook.

1971: Story 3. In 1971, ***Yu. V. Linnik*** visited Sofia as a guest of the BAS. He delivered a public talk on 'Random Walks'. Then the discussion switched to Skitovich-Darmois Theorem. I told him about C.R. Rao and my question. Linnik's reaction was, 'Looks interesting'. I am keeping a piece of a paper with my brief notes. Somehow, I have forgotten the story, it is time to refresh it.

1973: Story 4. The following fundamental book was published:

A. M. Kagan, Yu. V. Linnik, C. R. Rao. *Characterization Problems of Mathematical Statistics.* New York, John Wiley & Sons, 1973. (Russian, Moscow, Nauka, 1972.)

At the end of the book there is a chapter called 'Unsolved Questions'. Among them is included my question mentioned above, see Problem 4.1 in [8].

Possibly somebody has tried to answer this or a similar question. After nearly 50 years, A. Kagan and L. Klebanov (2021) (Personal communication) have made a progress. They start with an infinite sequence of independent random variables $X_1, X_2, \ldots$, and independent from them all a positive integer-valued random variable τ. Consider two random sums, in each sum the number of terms is τ:

$$\tilde{L}^{(a)} := a_1 X_1 + \cdots + a_\tau X_\tau, \quad \tilde{L}^{(b)} := b_1 X_1 + \cdots + b_\tau X_\tau.$$

Since τ is independent from all X_j, then τ is a Markov time.

Statement. *Suppose that the random variables X_j are all normally distributed and $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$. Then the independence property $\tilde{L}^{(a)} \perp\!\!\!\perp \tilde{L}^{(b)}$ may hold only under two conditions: τ is degenerate, i.e., there is a fixed integer n_0 such that $\mathsf{P}[\tau = n_0] = 1$; and, $\sum_{j=1}^{n_0} a_j b_j \sigma_j^2 = 0$.*

Comment. Tools from characteristic functions are intensively used in the proof. Such a statement is a good step, however, further study is needed.

It seems, the most reasonable formulation of the problem is to consider two independent random times, τ_1 and τ_2, being independent from all variables X_j, and define the random sums

$$\tilde{L}_1 := a_1 X_1 + \cdots + a_{\tau_1} X_{\tau_1}, \quad \tilde{L}_2 := b_1 X_1 + \cdots + b_{\tau_2} X_{\tau_2}.$$

Notice, $\tilde{L}_1$ is a sum of a random number, τ_1, of random variables. Similarly, τ_2 is the number of terms in $\tilde{L}_2$.

As before, of interest are the independence of the sums $\tilde{L}_1$ and $\tilde{L}_2$ and the normality of their terms. As far as I know, no progress is reported, yet!

Plackett problem. This is one of the problems indicated by ANK as having an unusual solution, see question Q2 and its answer A2. To be honest, in 1972, I heard the name 'Plackett' for the first time. Later, I identified the exact Plackett's name and found the paper which ANK had had in mind.

Let me give details. R.L. Plackett (1920–2008) was a well-known British mathematical statistician[8]. He considered the following problem. Suppose that X is a random variable defined on an underlying probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, it takes values in the set of reals $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ and let its distribution function denoted by F, $F(x) = \mathsf{P}[X \le x]$, $x \in \mathbb{R}$, be absolutely continuous, i.e., there is a density, say $f = F'$. It is assumed that the second moment $m_2 := \mathsf{E}[X^2]$ is finite, and let σ^2 be the variance. We have n independent observations, $X_1, \ldots, X_n$, and the corresponding order statistics are $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$. The difference $X_{(n)} - X_{(1)}$ is the sample range and we are interested in the quantity d_n, the expected sample range normalized by the standard deviation:

$$d_n := \frac{\mathsf{E}[X_{(n)} - X_{(1)}]}{\sigma}.$$

Before turning to this general case, let us start with something simpler.

Particular case, $n = 2$. Suppose that X and Y are independent random variables with the same absolutely continuous distribution F on the real line $\mathbb{R}$ with finite second moment: $\mathsf{E}[X^2] < \infty$. Assume for simplicity that X has zero mean and unit variance: $\mathsf{E}[X] = 0,\ \mathsf{E}[X^2] = 1$. We are interested in the quantity

$d_2 = \mathsf{E}[|X - Y|]$.

Questions. (a) What is the maximal value of d_2? (b) For which distribution F is d_2 attaining its maximum?

Answer. We use $\mathcal{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ for the uniform distribution on the interval $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, its density is $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ for $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, otherwise $f(x) = 0$.

Let me write together the answer to both questions, (a) and (b):

$$d_{2,\max} = \max_{F: X \sim F, Y \sim F} \mathsf{E}[|X - Y|] = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \textbf{\textit{if and only if}} \quad F \sim \mathcal{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

General case, any $n \ge 2$**.** All is described as above. In 1947, Plackett [19] suggested the following amazing upper bound for d_n.

Theorem. *Under the above assumptions and notations, for any integer* $n \ge 2$*,*

$$d_n = \frac{\mathsf{E}[X_{(n)} - X_{(1)}]}{\sigma} \ \le\ n \sqrt{\frac{2}{(2n-1)!}\,((2n-2)! - ((n-1)!)^2)}. \tag{2}$$

Remark. The original Plackett's proof in [19] is based on arguments from calculus of variations. A refinement of the proof was suggested by Moriguti [14]. The bound for d_n looks indeed unusual. Notice, the distribution F is arbitrary.

[8] He was the first professor in Mathematical statistics at Newcastle University (UK). When I was working at that university, I met him several times. He was pleased by the story with Kolmogorov and appreciated very much my seminar talk on 'Plackett problem', October 2005.

The most delicate question arising is: Which is F bringing an equality in the inequality (2)? Plackett suggested the answer: $d_{n,\max}$ is attained for a uniform distribution which can be exactly specified in terms of the mean and the variance of $X \sim F$. I am not providing details here, see the paper [13]. This is a challenging topic appropriate for separate special seminar talk.

Concluding comments. Being in our profession for more than 50 years, I have accumulated a unique experience and knowledge. They definitely have been useful in the past, are useful now, perhaps will be useful in the future. Hence, such an info, properly written, is of historical value. 'Who should write it down?' The best is to refer to John E. Elliot, 'If not me, then who? If not now, then when?' By writing this paper, I am completing my professional and institutional duty.

I am grateful to Prof. A. K. Zvonkin (University of Bordeaux), one of the famous Kolmogorov's pupils, for our long-standing friendship and collaboration. Our recent Skype discussions on all topics touched in this talk refreshed well our memories and were more than pleasant and useful.

REFERENCES

[1] A. M. Abramov, V. M. Tikhomirov, A. N. Shiryaev Eds. *A. N. Kolmogorov. Complete Bibliography of Works, and List of Publications Dedicated to Him.* 2nd ed. Moscow, MCCME, 160 pp (In Russian).

[2] G. Darmois. Analyse générale des liaisons stochastiques. *Revue de l'Institut International de Statistique*, **21** (1953), 2–8.

[3] B. Dimitrov, N. Yanev. *Probability and Statistics.* 3rd ed. Sofia, Sofia University "St. Kl. Ohridski", 2007, 385 pp (in Bulgarian).

[4] U. Frisch. *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov.* Cambridge, Cambridge University Press, 2010, 465 pp.

[5] B. V. Gnedenko, A. N. Kolmogorov. *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables.* Moscow-Leningrad, Gostechizdat, 1949, 264 pp (in Russian); English translation: New York, Chelsea, 1956, 244 pp.

[6] I. A. Ibragimov. On the Skitovich-Darmois-Ramachandran theorem. *Theory of Probability and Its Applications,* **57** (2013), 368–374.

[7] International Conference *Kolmogorov and Contemporary Mathematics*, 16–21 June 2003. A.N. Shiryaev, ed. Moscow, Steklov Mathematical Institute, RAS, 2004, 194 pp (in Russian).

[8] A. M. Kagan, Yu. V. Linnik, C. R. Rao. *Characterization Problems of Mathematical Statistics.* New York, John Wiley & Sons, 1973, 625 pp.

[9] A. M. Kagan, A. A. Zinger. A refinement of the Darmois-Skitovich and Heyde theorems. *Lecture Notes in Mathematics,* **1155** (1985), 81–94.

[10] A. N. Kolmogoroff. Une série de Fourier-Lebesgue presque partout. *Fundamenta Mathematica*, **4** (1923), 324–328.

[11] A. N. Kolmogorov. *Foundations of Probability Theory.* (In Bulgarian. Translated by J. Stoyanov). Part 3, pp. 156–244, of the book 'Probability: Bernoulli, Laplace, Kolmogorov'. Compiled and edited by B. Penkov. Sofia, Nauka i Izkustvo, 1982, 259 pp (in Bulgarian).

[12] *Kolmogorov's Legacy in Mathematics*, E. Charpentier, A. Lesne, N.K. Nikolskii, Eds. Berlin, Springer, 2007, 475 pp.

[13] L. Mattner. Extremal problems for probability distributions: a general method and some examples. *Stochastic Inequalities* (IMS Lecture Notes), **22** (1993), 274–283.

[14] S. Moriguti. Extremal properties of extreme value distributions. *Annals of Mathematical Statistics,* **22** (1951), 523–526.
[15] *Obituary: Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987).* A tribute to his memory organized by D.G. Kendall. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **22** (1990), 31-100
[16] A. Obretenov. *Theory of Probability.* Sofia, Nauka i Izkustvo, 1974, 275 pp (in Bulgarian).
[17] F. Petrov, Yu. Ninova. In Memoriam of Professor Ivan Ganchev Donev. *Mathematics and Education in Mathematics,* **52** (2023), 101–123 (in Bulgarian).
[18] F. Petrov. *Our memories of Professor Ivan Ganchev.* Sofia, Sofia University 'St. Kl. Ohridski', 2023, 100 pp (in Bulgarian).
[19] R. L. Plackett. Limit of the ratio of the mean range to the standard deviation. *Biometrika*, **34** (1947), 120–122.
[20] C. R. Rao. On some characterization of the normal law. *Sankhya, A*, **29** (1967), 1–14.
[21] A. N. Shiryaev. Kolmogorov: life and creative activities. *Annals of Probability*, **17** (1989), 866–944.
[22] A. N. Shiryaev. Everything about Kolmogorov was unusual. *Statistical Science*, **6** (1991), 313–318.
[23] V. P. Skitovich. On a property of the normal distribution. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **89** (1953), 217–219.
[24] V. P. Skitovich. Linear forms of independent r.v.s and the normal distribution law. *Izvestiya Akad. Nauk , Series Mathematics*, **18** (1954), 185–200.
[25] M. Slavchova-Bojkova, P. Mateev. Research and education in stochastics at FMI-SU "St. Kl. Ohridski". *Annual of Sofia University 'St. Kl. Ohridski' Faculty of Mathematics and Informatics*, **102** (2015), 5–29.
[26] J. M. Stoyanov. On a minimal divider of a triangle. *Matematika* (1969), no. 5, 16–22 (in Bulgarian).
[27] J. M. Stoyanov. *Stochastic Processes. Theory and Applications.* Series 'Contemporary Mathematics' **13**. Sofia, Nauka i Izkustvo, 1978, 219 pp (in Bulgarian).
[28] J. M. Stoyanov. The 80th birthday of Academician A.N. Kolmogorov. *Matematika* (1983), no. 10, 2–8 (in Bulgarian).
[29] J. M. Stoyanov. *Counterexamples in Probability.* 3rd ed. New York, Dover, 2013, 397 pp. [1st and 2nd eds, John Wiley & Sons, Chichester-New York, 1987 and 1997. Two Russian editions prepared by the author: Moscow, 1st ed, Factorial 1999, 210 pp.; 2nd ed., MCCME 2012, 235 pp.]
[30] J. M. Stoyanov. Counterexamples, paradoxes and surprises in Mathematics. Talk at National Colloquium in Mathematics, UBM and IMI–BAS, Sofia, 16 November 2022.
[31] J. M. Stoyanov. New characterizations for the normal and gamma distributions via independence of linear statistics and using Anosov theorem. Talk given online at the Principal Seminar in Probability, MSU, 05 April 2023.
[32] J. M. Stoyanov. Two problems and their solutions, among the most unexpected, according to Kolmogorov. Talk at the National Seminar in Stochastics (IMI–BAS), 26 April 2023.
[33] J. M. Stoyanov, I. Mirazchiiski, Tz. Ignatov, M. Tanushev. *Exercise Manual in Probability.* 1st ed. Sofia, Nauka i Izkustvo, 1976, 303 pp (in Bulgarian).; 2nd ed. 1985, 303 pp.; 3rd ed. 2012, 374 pp. The 1st and the 2nd ed. were translated into Polish: Warsaw, PWN, 1982 and 1992, 330 pp. There is an English translation of the 2nd BG ed.: Dordrecht, Kluwer, 352 pp. Second Springer printing 2002.
[34] N. M. Yanev. A.N. Kolmogorov–120th anniversary. *Mathematics and Education in Mathematics,* **52** (2023), 25–36 (in Bulgarian).
[35] N. M. Yanev. A Bulgarian genius in Mathematics and Physics. *Mathematics and Education in Mathematics*, **44** (2015), 25–34 (in Bulgarian).

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

120 YEARS FROM THE BIRTHDAY OF PROF. GEORGI BRADISTILOV, CORRESPONDING MEMBER OF BAS

Petar Popivanov

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
e-mail: popivano@math.bas.bg

In 2024 is the 120th anniversary of the well known Bulgarian mathematician G. Bradistilov, specialist in the domain of ordinary differential equations with small parameter and their applications in mechanics (physical and mathematical pendulums). We propose here short biographical notes and his main scientific achievements.

120 ГОДИНИ ОТ РОЖДЕНИЕТО НА ЧЛ.-КОР. ПРОФ. ДМН ГЕОРГИ БРАДИСТИЛОВ (1904 – 1977)

Петър Попиванов

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mail: popivano@math.bas.bg

През 2024 г. се навършват 120 години от рождението на известния български математик Г. Брадистилов, специалист в областта на обикновените диференциални уравнения с малък параметър и техните приложения в механиката (физични и математически махала). Тук предлагаме накратко негови биографични данни и основните му научни постижения.

Професор Г. Брадистилов е роден в Панагюрище на 12.10.1904 г., а почина в София на 18.07.1977 г. Завършва Физикоматематическия факултет на СУ „Св. Климент Охридски“ през 1927 г., специализира в Сорбоната, Париж (1931 – 1932) и в Мюнхенския университет (1937 – 1938), където защитава докторска дисертация по n последователно свързани физични махала при известния немски математик Оскар Перон. По темата на дисертацията се появява статия в авторитетното немско списание Math. Annalen (1938, Band 116, Heft 2, 181–203). Доктор е на математическите науки в София (1958). Доцент по диференциално и интегрално смятане в СУ „Св. Климент Охридски“ (1940 – 1943), един от основателите през 1942 г. на Държавната политехника в София, където е професор от 1943 г., завеждащ катедрата по Приложна математика (1945 – 1953), декан на Строителния факултет (1945 – 1947)



и ректор (1947 – 1948). От 1953 до 1971 г. е ръководител на катедрата по Висша математика, а през периода 1962 – 1966 г. е ректор на Машинно-електротехническия институт в София, който прерасна в Технически университет – София. През 1967 г. беше избран за член-кореспондент на БАН по математика и е първият член-кореспондент в областта на диференциалните уравнения (по-точно, обикновените диференциални уравнения).

Изключително големи са неговите заслуги за поставянето на висшето образование по математика и главно по приложна математика в техническите ВУЗ-ове на здрави основи. Той има публикувани няколко учебника и сборника по висша математика, които възпитаха у поколения български инженери вкус към логическата мотивация, строгост и търсене на инженерно-физични приложения с тяхната техническа реализация.

Чл.-кор. Брадистилов е създател на национална научна школа в областта на нелинейните трептения. Не се наемам да изреждам списък на неговите ученици и съавтори в областта на диференциалните уравнения с малък параметър, но ще спомена само проф. Г. Бояджиев, проф. С. Манолов и проф. Б. Чешанков.

Ето трите главни тематични направления, в които е работил (заедно със своите ученици и партньори) проф. Г. Брадистилов.

I. Периодични и асимптотични решения на системи от нелинейни обикновени диференциални уравнения с малък параметър, описващи различни видове последователно свързани махала. (Методът на малкия параметър в ОДУ е тясно свързан с гения на Поанкаре.)

II. Периодични решения и устойчивост на автономни и неавтономни системи нелинейни диференциални уравнения с малък параметър.

III. Нелинейни колебания и устойчивост на автогенератори и генератори

Ще спомена само статията в Годишника на МЕИ, кн. II, 1955 г.: „Г. Брадистилов. Върху периодични решения на двойно физическо махало около равновесното положение при кратни корени на характеристичното уравнение“, която е от областта I. Тя е продължение на мюнхенската му дисертация, защото в последната случаят на кратни корени не е изследван. Ето и неговият подход тук. Той счита, че корените на характеристичното уравнение на двойното махало ρ_1, ρ_2 са целочислено кратни, т.е. $\rho_2 = k\rho_1$, $k > 1$, k – естествено число и някакъв допълнителен параметър е корен на подходящо кубично уравнение. Тогава, в зависимост от това дали $k = 3$ или $k \neq 3$ и свойствата на полученото кубично уравнение, на ρ_2 съответстват една или 3 фамилии периодични решения.

Допълнително ще добавя, че проф. Брадистилов е съавтор на големия български физикохимик и чуждестранен член на БАН проф. И. Странски (1897 – 1979), учен със световна известност, утвърдил се и дълго работил в Западен Берлин. Става дума за статия из областта на електростатичния потенциал. Пресмятането му играе важна роля при определяне на формата на растене и равновесната форма на така наречения флуоритен кристал. Като учители на проф. Брадистилов в Мюнхен бих посочил не само О. Перон (1880 – 1975), но и К. Каратеодори (1873 – 1950), и двамата дългогодишни професори в Мюнхенския университет. Чл.-кор. Брадистилов е автор на 58 научно-изследователски статии. Докторската дисертация на проф. Брадистилов е предизвикала интерес в Япония сред онези учени, които са работили върху създаването на уреди за измерване на силата на земетресенията. Неговата дейност непосредствено е свързана с Института по математика и информатика на Българската академия на науките (ИМИ – БАН), защото след избирането му за член-кореспондент през 1967 г. той оглави създадената през 1966 г. секция по диференциални уравнения при тогавашния Институт по математика на БАН с изчислителен център. Този пост заемаше до създаването на Единните центрове, т.е. до края на 1971 г. Проф. Брадистилов организира и много години ръководи сериозни научни форуми у нас (семинари и колоквиуми), които имат безспорен принос за развитието и популяризирането на диференциалните уравнения в България. Ще спомена само два от тях: семинар по диференциални уравнения при ЦПМ (към МЕИ – София) и Националния колоквиум по математика към Съюза на математиците в България. Създаден на 15.02.1973 г., Националният колоквиум беше под ръководството на проф. Брадистилов от 1973 г. до смъртта му през 1977 г. Сбирките се провеждаха в 325-а аудитория на ФМИ и за мен винаги е било удоволствие да присъствам на заседанията на Колоквиума, който между другото продължава своята работа и досега (2023 г.), но в Заседателната зала на ИМИ – БАН. Един друг щрих върху обществените задължения, които добросъвестно и неуморно изпълняваше проф. Брадистилов, се дава от работите му като: главен редактор на списание „Теоретична и приложна механика“, член на Съвета на Балканския математически съюз, член на ръководството на Съюза на учените в България.

Имах възможността да работя в секция „Диференциални уравнения“ при ИМ на БАН от 1969 г. насам, а и многократно съм посещавал заседанията на Специализирания научен съвет по математика при ВАК и други научни форуми, ръководени от

или с участието на чл.-кор. Брадистилов през годините 1969 – 1970, 1973 – 1977, така че съм натрупал много лични впечатления за неговата работа, поведение, стил и методи. В своята статия „Научното дело на Георги Брадистилов“, отпечатана в „Математика и математическо образование“, Трудове на 33-а пролетна конференция на СМБ, добре познавалите го и работили с него проф. Г. Бояджиев и проф. Б. Чешанков казват добри, верни и точно характеризиращи го думи, които ще си позволя да цитирам: „Той беше ярка, силна и независима личност, (...) акуратен, пословично дисциплиниран. (...) имаше чувство за мярка, когато настояваше за изпълнението на свои виждания в образованието. Той беше реалист – изискваше най-доброто изпълнение, но не и невъзможното. Тези му качества, допълнени с достойното му поведение, умението да бъде тактичен в трудни моменти, прямотата и рационалното мислене, му спечелиха уважението на многобройните студенти, приятели, познати (...)“.

Ще добавя от себе си. Той беше толерантен, но безкомпромисен към проявите на невъзпитание, евтина фамилиарност и базирано на комплекси за малоценност озлобление и грубост. В края на юни 1975 г. се състоя конференцията КДУ I в Русе, където с много вкус, прецизност и с вътрешен душевен подем той изнесе подробен доклад за дейността и постиженията на българските математици, работещи в областта на обикновените и частните диференциални уравнения и техните приложения. Сложна и деликатна задача, защото обикновените диференциални уравнения се преподават у нас от началото на миналия век, акад. Л. Чакалов (1886 – 1963) защитава дисертация в тази област в Неапол през 1925 г., докато частните диференциални уравнения започнаха да се преподават от средата на 60-те години във Факултета по математика, а първите наши специалисти са защитили дисертации по ЧДУ след 1961 г. Форумът в Русе беше внушителен и за мен той установяваше докъде сме стигнали и какви други направления да потърсим и да започнем да развиваме у нас в близките години. В началото на 70-те години съм го срещал през лятото в Международния дом на учените „Фредерик Жолио-Кюри“ в курорта „Дружба“ (сега носи старото си име „Св. Св. Константин и Елена“). Там се събираше една голяма група от изтъкнати български интелектуалци (главно учени), които създаваха великолепната атмосфера на духовна развлекателност, съхранено през годините остроумие, академичен стил и непосредственост. Ще спомена освен проф. Брадистилов тогавашния председател на Съюза на научните работници в България (сега Съюз на учените в България) акад. Кирил Братанов, акад. Л. Илиев, акад. Р. Цанев (блестящ организатор на бликащи от жизненост тържества), известният български художник В. Стоилов, чл.-кор. П. Гиндев и много, много други. В София съм го срещал в компанията на акад. Л. Кръстанов, чл.-кор. Г. Гълъбов (анатом) и композитора Йосиф Цанков. И при случайни срещи, и по време на годишните отчетни сесии на Единния център по математика и механика съм имал възможността да беседвам с него, да се докосна до неговия богат вътрешен свят, да получа уроци по толерантност, вежливост и тактичност.

Институтът по математика организира погребението му на 20.07.1977 г. и ще споделя тук няколкото думи, които проф. Р. Денчев изказа като заключителен акорд за проф. Георги Брадистилов: „Един добър човек.“ Много, казано с три думи.

Вече 47 години проф. Георги Брадистилов не е между нас. Неговото присъствие в българската математическа наука, и по-специално в приложната математика и

инженерното образование по математика, е непреходно. Това, което можем да почерпим от него, е примерът му на достоен българин и респектът на един достолепен учен, духовен ръководител и учител.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Н. Бояджиев, Б. Ив. Чешанков. Научното дело на Георги Брадистилов. *Математика и математическо образование*, **33** (2004), 9 – 21 [G. N. Boyadzhiev, B. Iv. Cheshankov. Nauchnoto delo na Georgi Bradistilov. *Math. and Education in Math.*, **33** (2004), 9–21] (in Bulgarian).

[2] П. Попиванов. 100 години от рождението на чл. кор. проф. дмн. Георги Брадистилов (1904 – 1977). *Математика и математическо образование*, **33** (2004), 7 – 8 [P. Popivanov. 100 godini ot rozhdenieto na chl. kor. prof. dmn. Georgi Bradistilov (1904–1977). *Math. and Education in Math.*, **33** (2004), 7–8].

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

EIGHTIETH ANNIVERSARY OF PROFESSOR NIKOLAY YANEV

Maroussia Slavtchova-Bojkova

Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University,
Sofia, Bulgaria
e-mail: bojkova@fmi.uni-sofia.bg

This report is dedicated to the 80th anniversary of the famous Bulgarian mathematician and stochastician Professor Dr Sci Nikolay Yanev, with a brief description of his scientific path, his contributions in the field of stochastics and the creation of a school by his followers in the field of branching stochastic processes.

80-ГОДИШЕН ЮБИЛЕЙ НА ПРОФЕСОР НИКОЛАЙ ЯНЕВ

Марусия Славчова-Божкова

Факултет по математика и информатика, Софийски Университет,
София, България
e-mail: bojkova@fmi.uni-sofia.bg

Този доклад е посветен на 80-годишния юбилей на известния български математик и стохастик професор дмн Николай Янев, с кратко описание на научния му път, приносите му в областта на стохастиката и създаването на школа от негови последователи в областта на разклоняващите се стохастични процеси.

Николай Янев е роден на 30.11.1943 г. в гр. Бургас, Царство България. Месторождението е избрано с оглед на по-специални медицински грижи и наблюдение, но фактически веднага е преместен в гр. Поморие, където живее и израства във фамилната къща, построена от прадядо му през 1912 г. Майка му Смарагда Янева е учителка по френски език, а баща му Михаил Янев е адвокат и юрисконсулт. Юношеството на Николай Янев протича изцяло в гр. Поморие, където през 1961 г. завършва гимназия (като през всичките тези години е бил пълен отличник). Занимава се с ветроходство и свири на тромпет, както в духовата музика, така и в ученическа джаз-банда. По това време военната служба е задължителна и той е призован във Военно-Морския Флот, където през 1961 – 1963 г. е рулеви (кормчия) на флагманския кораб „Дръзки“ във военно-морската база на гр. Варна. Има проплавани 60000 морски мили и е получил диплома за рулеви на всички видове



морски съдове и капитанско право за 100 бруто-регистър тона. Освен това е бил ръководител и тромпетист на джазово-естрадна формация от моряци, която е участвала в редица концерти във Варна и Севастопол. През 1964 – 1969 г. Николай Янев е студент в научно-изследователския профил на Математическия факултет на СУ „Св. Кл. Охридски“ (СУ), където завършва тогавашните Блок А и Блок Б, които съответстват на днешните програми „Бакалавър“ и „Магистър“. Специализира „Теория на вероятностите и Математическа статистика“ и се увлича от работите на А. Н. Колмогоров и неговата школа по разклоняващи се стохастични процеси, като защитава и дипломна работа в тази област.

През 1969 г. Николай Янев започва работа по разпределение в секция „Вероятности и Статистика“ към Математическия институт на Българската Академия на науките (БАН). През 1970 – 1971 г. е на 6-месечна специализация в Математическия институт „Стеклов“ към Руската Академия на Науките в Москва под ръководството на проф. Б. А. Севастьянов, един от първите аспиранти на Колмогоров в областта на Теория на вероятностите и математическата статистика (ТВМС).

Да отбележим, че Колмогоров през 1945 г. основава знаменития Семинар по разклоняващи се стохастични процеси в Московския държавен университет „М. В. Ломоносов“ (МДУ), където той и неговите ученици полагат модерните математически основи на тази теория. Сред неговите аспиранти се открояват особено имената на известните по-късно математици Севастьянов, Дмитриев и Яглом. Севастьянов фактически поема от Колмогоров ръководството на семинара и продължава неговата школа по разклоняващи се процеси. Талантливият Николай Дмитриев (от български произход) е привлечен в секретния закрит град Саров и става фактически един от главните създатели на съветската атомна и водородна бомба.

Николай Янев взема дейно участие в работата на Колмогоровския семинар като редовен аспирант в Механико-математическия факултет на МДУ през 1972 – 1975 г. под непосредственото ръководство на Б. А. Севастьянов. През ноември 1975 г. Н. Янев защитава успешно дисертация в областта на разклоняващите се стохастични процеси. В резултат на това се появяват две основополагащи статии в едно от най-престижните списания „Теория вероятностей и её применения“ (основано от А.

Н. Колмогоров). В първата от тях авторът въвежда и изучава нов клас регулируеми разклоняващи се процеси със случайни регулиращи функции, а във втората изследва нов клас статистически оценки с голям брой начални „частици“.

След завръщането си от аспирантура Николай Янев продължава работата си в сектор „Вероятности и Статистика“ към Единния център по математика и механика, който обединява сегашните ИМИ–БАН и ФМИ–СУ. Николай Янев води упражнения и чете лекции пред студентите от Факултета. Той подготвя програмата и реализира първия курс по „Вероятности и Статистика“ в два семестъра за студентите от Блок А. Чете също няколко различни спецкурсове за студентите от Блок Б: Разклоняващи се стохастични процеси, Случайни блуждания, Теория на възстановяването, Математическа статистика. В резултат на тази дейност излизат следните книги в „Издателство на СУ“: „Вероятности и Статистика“ (съвместно с Б. Димитров, 1989, 3 издания), „Ръководство за упражнения по математическа статистика“ (съвместно с М. Танушев, 1989, 2 издания), „Разклоняващи се стохастични процеси“ (съвместно с М. Божкова, 2007, 2 издания). Тези книги продължават и до днес да се ползват активно във ФМИ. Николай Янев е научен ръководител на 8 докторанти, както следва:

- Косто Митов (проф., дмн, Медицински университет, гр. Плевен): „Критични разклоняващи се процеси с имиграция, зависеща от състоянията на процеса“ (1983);
- Ива Цанкова (гл.ас., д-р, СУ): „Математически модели на структурата и организацията на DNA“ (1986);
- Марусия Божкова (проф., дмн, СУ и ИМИ–БАН): „Разклоняващи се миграционни процеси“ (1990);
- Георги Янев (проф., д-р, University of Texas Rio Grande Valley, USA): „Регулируеми разклоняващи се процеси: израждане, размножаване, миграция“ (1991);
- Весела Стоименова (доц., д-р, СУ): „Статистическо оценяване на разклоняващи се стохастични процеси“ (2005);
- Димитър Атанасов (доц., д-р, Нов Български Университет): „Робастни методи за скалиране и точкови оценки“ (2007);
- Георги Митов (д-р, Factset): „Случайно индексирани разклоняващи се процеси и приложението им във финансовата математика“ (2010);
- Нина Даскалова (гл.ас., д-р, СУ): „EM алгоритъм за оценяване на разклоняващи се стохастични процеси“ (2012).

През 1985 г. Николай Янев защитава дисертация на тема „Разклоняващи се стохастични процеси — регулируемост, статистика, приложения“ и получава научното звание „доктор на математическите науки“. Тази дисертация се основава на редица статии публикувани в най-престижните стохастични списания: „Annals of Probability“, „Journal of Applied Probability“, „Advances of Applied Probability“, „Теория вероятностей и её применения“, „Mathematical Biosciences“ (основан от Ричард

Белман). Всъщност това са и първите български работи в тези журнали. Парадоксално е, че той е само научен сътрудник, като не е допускан до хабилитация по политически причини и всъщност е избран за старши научен сътрудник в Народна Република България едва през 1988 г.

Все пак през 1991 г. вече в Република България научен сътрудник Николай Янев е избран за професор в ИМИ–БАН, като продължава да чете лекции във ФМИ–СУ. През периода 1993 – 1999 е избран за директор на ИМИ–БАН, а през 2001 – 2012 е ръководител секция „Вероятности и Статистика“ в ИМИ–БАН. Николай Янев участва активно и в работата на Общото събрание на БАН (четири мандата от създаването му) по реорганизацията и модернизацията на БАН, където е председател на комисията по „Етика и деформации“. Николай Янев е носител на редица награди, сред които и най-високото отличие на БАН – „златен медал Марин Дринов с лента“.

Не е възможно в един кратък доклад като този да се изброят всичките по-важни научни постижения на Николай Янев. Николай Янев има над 150 научни публикации, като основната част от тях са в престижни международни списания с импакт-фактор. Научните му резултати са предимно в областта на ТВМС като основни обекти на изследванията са в Теория на разклоняващи се стохастични процеси, Теория на възстановяването, Регенериращи се процеси и др.

Има една монография в Springer и три глави в две колективни монографии в САЩ, както следва:

- Regenerative Branching Processes, Ch. 3 (37–62) in: Records and Branching processes, Ed. M. Ahsanullah, G. P. Yanev, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2008. (CA: K. V. Mitov)

- Statistical Inference for Branching Processes, Ch.7 (143–168) in: Records and Branching processes, Ed. M. Ahsanullah, G. P. Yanev, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2008.

- Branching Processes with Multiшype Random Control Functions: Subcritical Case, Ch. 11 (363–374) in: Leading Edge Applied Mathematical Modeling Research. Editor: M. P. Alvarez, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2008. (CA: I. M. Del Puerto)

- Transient Processes in Cell Proliferation Kinetics. Lecture Notes in Biomathematics, v. 82, Springer, New York, 1989. (CA: A. Yakovlev)

Все пак ще се опитам да очертая няколко групи от резултати, които дават представа за широко спектърния характер на неговите изследвания. По-конкретно в работите на Николай Янев се въвеждат и изучават редица нови класове разклоняващи се процеси: регулируеми разклоняващи се процеси със случайни регулиращи функции (с дискретно и непрекъснато време), в частност разклоняващи се миграционни процеси; процеси на Белман-Харис с имиграция в нулата; процеси на Севастьянов с хомогенна и нехомогенна имиграция; много-типови разклоняващи се процеси с голям брой начални частици; статистика на разклоняващи се процеси без и с имиграция; многомерни разклоняващи се процеси с нехомогенна имиграция.

Николай Янев има сериозни приложения в областта на стохастичното моделиране в клетъчната биология и раковите изследвания. Последните са съвместно със съответни специалисти от САЩ и са публикувани в реномирани международни списания в областта на Биоматематиката: „Journal of Mathematical Biology“, „Mathematical Biosciences“, JASA (J. Amer. Stat. Ass.), „Mathematical Population Studies“.

Резултатите на Николай Янев получиха, и продължават да получават, световно признание чрез повече от 500 цитирания от изтъкнати специалисти и имат сериозно международно признание, за което говори фактът, че негови теореми с доказателства са публикувани в 16 чуждестранни монографии. Показател за високата оценка на математическото творчество на Николай Янев са и многобройните участия в престижни международни конференции с доклад по покана, сред които трябва да отбележим специално Световния конгрес по Статистика на ISI (International Statistical Institute) през 1992 г. Друг показател са и големият брой посещения като гостпрофесор в реномирани университети за четене на лекции на студенти и аспиранти и за научно-изследователска дейност, например в редица престижни университети в Канада (Монреал, 1990 – 1991), САЩ (Корвалис, Орегон, 1994; Рочестър, Ню Йорк, 2005 – 2009), Франция (Версай, 1997 – 2000), Испания (Бадахоз, Екстремадура, 2001 – 2002).

Николай Янев е създател на българска научна школа със сериозно международно присъствие, доказателство за което е организирането и провеждането на Първи световен конгрес по разклоняващи се процеси през 1993 г. в гр. Варна. Освен това под негово ръководство са организирани 10 международни конференции по „Вероятности и Статистика“ в България. Една представа за българските постижения в областта на разклоняващите се процеси дава следната обзорна статия, където са представени 206 български работи, от които 174 са на Николай Янев и негови аспиранти и дипломанти:

K. V. Mitov, N. M. Yanev. Branching Stochastic Processes: Regulation, Regeneration, Estimation, Applications. Pliska Studia Mathematica Bulgarica, 19 (2009), 5 – 58.

Към настоящия момент продукцията на Николай Янев и ученици надхвърля 220 работи. Да отбележим, че от бившите аспиранти на Николай Янев сега трима са професори, двама са доценти и двама – доктори на математическите науки.

Николай Янев има сериозно международно признание и е бил председател и член жури за защита на дисертации или промоция за професор в Испания, Франция, САЩ и Швеция. Освен това, той има редица съвместни публикации в известни списания с учени от Канада, САЩ, Русия, Франция и Испания.

Николай Янев има сериозен принос в създаването и развитието на испанската школа по разклоняващи се процеси, както и за развитието на научните връзки между Университета на Екстремадура от испанска страна и СУ и БАН от наша страна. Отчитайки неговия международен принос и специалните му заслуги към Испания, през 2018 г. му бе присъдена почетната титла „Doctor Honoris Causa“ на Университета на Екстремадура, тържествената церемония по инагурацията на която се състоя през април 2019 в Бадахос, Испания.

По инициатива на ФМИ, Академичният съвет на СУ „Св. Кл. Охридски“ на 29 януари 2020 г. присъжда на Николай Янев почетното звание „Doctor Honoris Causa“, като самата официална инагурация се състоя в аулата на СУ на 13 октомври 2021.

Николай Янев е изборен член на International Statistical Institute (ISI), като е





изнасял доклади на два световни конгреса, от които единият е бил по покана. Бил е председател на Българското Статистическо Дружество. Участва активно в Съюза на математиците в България, като е бил организатор на 40-та юбилейна конференция и е изнасял пленарни и други доклади.

Накрая си заслужава да отбележим, че Николай Янев е известен като Captain Nick „най-добрият математик сред сърфистите и най-добрият сърфист сред математиците“, тъй като той е спечелил трето място на световно първенство за ветерани, а първите двама не са били математици.

И така, през своя 80-годишен житейски път Н. Янев е успял да премине достойно през три различни политически системи — Царство България, НРБ (комунизъм) и РБ (демокрация).

В момента Николай Янев е „Професор Емеритус“ на ИМИ–БАН, почетен гражданин на Поморие и председател на уиндсърф-клуб „Поморие“, където продължава да се занимава активно с този атрактивен спорт като последното му увлечение е foil-windsurfing. И, разбира се, продължават изследванията му в областта на разклоняващите се стохастични процеси и техните приложения, най-често съвместно с някои от неговите бивши аспиранти, а също и с колеги от чужбина.

Нека да пожелаем на проф. Янев живот и здраве, разклоняващи се успехи в науката и спорта, попътни ветрове, щастливо плаване и седем фута под кила!

БЛАГОДАРИМ ТИ, УЧИТЕЛЮ!

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

MY LIFE PATH IN MATHEMATICS

Boyan Dimitrov, 80
e-mail: bdimitro@kettering.edu

ПЪТЯТ МИ ЖИТЕЙСКИ В МАТЕМАТИКАТА

Боян Недялков Димитров, на 80 г.
e-mail: bdimitro@kettering.edu

Накратко: Тук разказвам за някои събития от живота си, с основен акцент върху математическото си развитие, без да премълчавам и някои политически моменти на тогавашното съвремие. Дано да е и интересно, и полезно.

1. Детство и юношество. В биографиите си някога пишехме: „произхождам от бедно семейство“ (средно или заможно не се препоръчваше). Моят баща, с един от своите 3 братя и 2 сестри на баба ни Цепка (всички я наричахме „мама“), беше бакалин. Продаваха пирони, кабърчета, боички, моливи, тетрадки, ... Били богати и им взеха парите да строят теснолинейката („дековилката“) Оряхово – Червен бряг. Дадоха им някакви облигации (нещо като марки, дето баща ми гледаше всеки месец) и нищо. После, към 1947 – 1948 година им затвориха бакалницата, дадоха им да разораят пасбищата край селото и ги направиха земледелци. При това ги нарекоха кулаци („Хей кулак, ти си стар народен враг“ – имаше такава песен тогава). Другите братя и сестрите не станаха кулаци.

А майка ни беше шивачка, домакиня, готвачка, градинарка. От нея съм научил много неща, които мога и сега.

Още не ходех на училище, а големите деца на улицата се забавляваха с мен. Даваха ми задачи от събиране, изваждане, умножение, деление от 1 до 100 (цели числа) и се чудеха, че ги смятам точно и „наум“. Може би баща ми, с неговите „Рибка и половина – лев и половина, 4 рибки колко струват?“ да ме е научил на нещо.

А в училището определено ми вървеше. Не за друго, ами защото брат ми Драгомир беше една година преди мене там. И щом си появяваха неговите учебници, аз ги изчитах за седмица – две. После изчитах всички книги в селското читалище. И знаех доста. И мен взеха да ме знаят. Домашните си пишех щом се върна от училище. И хайде на улицата за игра с децата. От 1-во до 4-то отделение ни учеше

една учителка, Недкова. Не знам защо обичаше да идва често в къщи, но ми беше драго. В прогимназията учителка по математика ни беше Иванка Мамулска. Помня как след лятото ни даде да съберем $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. И като пръв по математика ме викна да напиша решението. Аз бодро написах $=\frac{2}{5}$. Тя като ми зашлеви една двойка, и ми я държа до края на годината. Колкото и да опитвах да докажа, че знам всичко, така и не ми даде да се проявя. Е, накрая ми писа 6 за годината, но и ми даде прекрасен урок. Не мога да го забравя.

Още един забавен случай: учителят ни по физика, Фарадей му викаха всички ученици, ни разказваше за таблицата на Менделеев и колко тежи 1 молекула от всеки елемент. И аз го попитах в класа, дали може с един висящ кантар да се премери 1 молекула на хелия. Той ми рече да остана след класа и ще ми обясни. Когато класът се изнесе, тоя ме сви в едно кьоше, хвана ме за сколуфете, дърпа ги и ме рита, докато разбрах, че в клас такива шеги не бива да се правят.

След прогимназията гледах да се уча в някое училище „на пълна държавна издръжка“. Имаше такива по онова време. Харесваше ми Агрономското в Павликени. Не ме взеха „поради незадоволителен успех“, макар да бях най-добрия ученик в селото. А други съученици приеха. Явно партийците на село са си гледали добре работата. Та записах гимназията в Оряхово. И близо, и евтино. Ходиш си всяка неделя пеша през полето до там и обратно в къщи на село. По средите баща ти носи храна, осигурява ти хляб с купони срещу брашно. Няма пари за ученическия стол, но какво толкова?

Обаче ми провървя на учители: Георги Гуляшки и жена му дойдоха „по разпределение“, млади, красиви, сърцати! Обичам ги до ден днешен. Георги водеше и кръжок по философия. Упражнявахме се там и по красноречие и остроумие. Освен това участвах и в училищния хор. Даскал Стоянов беше също сърцат, огън отвсякъде. Учеше ни на патриотични песни. Помня „Родино мила, теб привет“, дето бе използвана по-късно за сегашния ни химн.

А Гуляшки на класните и контролните по математика ме гонеше на 5-ата минута, за да не предавам решенията си на другите в класа. Пращаше ме на олимпиади и други състезания. И като се дипломирах, беше първият да ми каже, че вместо да ходя в казармата, мога да кандидатствам „Математика“ в Софийския университет.

Не беше единственият. Окръжният училищен инспектор Недялков също ми изпрати телеграма. Знаел ме от олимпиадите. Макар да бях пръв и единствен пълен отличник на випуска в гимназията, не получих полагаемия ми се златен медал. Сещайте се защо. Син на кулак. А кметът не ми подписа разрешение да отида на изпита за университета.

Тогава ми помогна случайността: мой братовчед се беше оженил за племенницата на партийния секретар на селото, Кръстю Нинов. А той беше и бивш директор на селското училище през всичките ми 7 години там, и добре знаеше кой съм. Баща ми отиде при него. Те, заедно с общинския секретар Костов написаха проста бумага, че мога да кандидатствам в университета. И кандидатствах. Благодаря на всички, изброени дотук!

2. Студентски години. Така, след като минах „с вазелин“ през селското сито, някъде в средата на август 1961-ва отидох да се пробвам на приемен изпит. Казват,

били сме над 400 момчета. Изпитът бил писмен, после устен. Помня, на писмения имаше една геометрична задача. Реших я, като приложих „Хероновата формула“. Сега не мога да си я спомня. След 3 дни викат на устен, който е минал през писмения. Изпитаха ни професорите Ярослав Тагамлицки и Алипи Матеев. Падна ми се Алипи. Даде ми едно уравнение от 4-та степен, като се взрях, видях, че става биквадратно след малки трансформации. И получих $x = 2$. Минах изпита и си заминах на село да се готвя за войниклъка. След време получих телеграма, че съм приет и след 3 дни да ходя да се запиша. Ама аз отидох 3 дни по-късно. Казаха ми, че като 7-ми в списъка, ще ме запишат, и така станах студент по математика във Физико-математическия факултет на СУ, в който се включваше даже Химическият.

Не сме били първите приети с Министерско постановление за развитие на математиката. По-после разбрах, че предната година така били приети Петър Кендеров, Стоян Недев, Генчо Скордев, Петър Петров, Радостин Иванов, Цветан Игнатов, Тодор Боянов,... Срещнахме ги чак на бригадата в Кремиковци следващото лято. По-късно те станаха групата „Кьошетата“. Ние пък станахме „Чуците“, но затова – по-късно.

Два месеца след квартири по баби и приятели, тогавашният зам.-ректор Петко Константинов ме посели в 5-а читалня в студентските общежития, блок 1, точно над тогавашния стадион Академик. Бяхме 13 души на кушетки, с по 1 шкафче за неща. От най-различни факултети – ГГФ, физика, ... По съседство имаше студенти от Африка, Виетнам, Китай... Беше страхотно. От моите имаше петима. Имаше и обща „читалня“ за работа, точно срещу портиера. Там ходехме да учим, обикновено нощем. Сутрин хващахме тролей 4 за няколко спирки. Като стигнем до парка, тичахме по пътеката покрай телевизионната кула, та до ФМФ.



Кадър от 6-та читалня. Тук сме с Агоп Хачикян и надничаме да видим с какво ни е изненадал Райчо в тази делва. А до нея е дамаджаната с домашното от баща ми.

Професорите ни бяха оригинални, остроумни, весели. Помня академик Обрешков – чете ми Висша алгебра и Теория на числата. На лекциите повтаряше, например „... и получаваме едно ура... ура... уравнение“. Почина през 1963 г. Упражнения ни водеха доц. Дуйчев, асистент беше Иван Байчев. Светла им памет.

Професор Тагамлицки (Таги) беше истинска атракция. И от други факултети и институти идваха заради това на лекциите му. Едни от неговите шедьоври: „Сега ще ви дам едно грешно доказателство. А вие открийте къде е грешката.“ и става Коста Динчев и я казва. Таги го хвали, и пита как се казва. Което отговаря Коста Динчев. „А, Костадинчо“. И нататък „Костадинчо да каже.“ А на един изпит една колежка се моли да я пусне. Тя щяла да навакса материала и за следващия курс по ДИС (диференциално и интегрално смятане) ще го знае. „Какъв материал ще ваксате, другарке?“. Говореше някак, като че ли се задъхваше. И неговите асистенти тогава, Иван Проданов, Димитър Скордев и Димитър Добрев го копираха в своите упражнения. Димитричка Шопова не го е имитирала. Даже самият Таги ми е водил упражнения и кръжоци. Просто се радваше да работи с млади хора. Изпитите с него бяха от сутрин до вечер за цялата група. По обед „Идете да обядвате, и елате да продължим“. И завършваше с един безкраен ред, или с интеграл. Ако не се справиш – яви се пак. Светъл да е звездният им път, какъвто им беше земният.

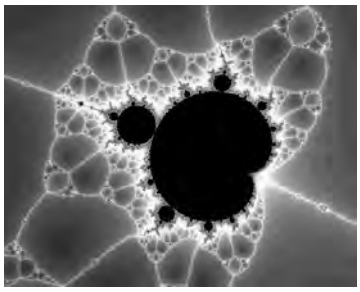


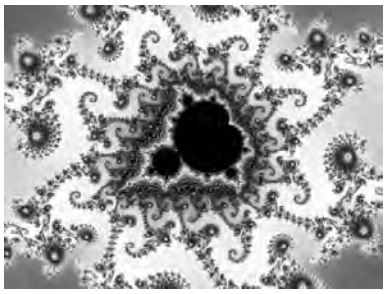
Тук сме с Атанас Атанасов. Таги често (май нарочно) ни объркваше. Като ме срещне по коридорите на ФМФ, ме спира и ме пита: „Вие сте Атанас Атанасов, нали?“ А Наско беше най-способният студент в курса.

Запомняща се личност беше и Алипи Матеев. Започваше и завършваше лекциите си с някой анекдот или весела история. Ходех и на негови спец-курсове, например „Външни форми“ на Анри Картан, и на други негови. Провеждаше ги в кабинета си. И академик Благовест Долапчиев помня като зам.-ректор на университета. Водеше класа по механика в Ректората. Идваше една жена от ФМФ да му трие

дъската. Набутваше ни в кабинета си във ФМФ. Имаше въпросник за изпитите, но той посочваше с пръст един от седящите и казваше какъв въпрос да развие. Любим му беше „Закон на Бер“. Това обясняваше защо на реките в северното полукълбо десният бряг е по-висок от левия, а в южното левият е по-висок от десния. Нещо свързано с масата на водата, посоката на течението и гравитацията плюс движението на Земята. Както бяхме гъсто насядали известна е фразата му: „Не се мести, не се мести, Закон на Бер“.

Академик Илиев ни четеше Комплексен анализ, а Татяна Аргирова водеше упражненията. Конформните изображения са се запечатали в паметта ми. Доставяха ми наслаждение като източник на въображение. 30 години по-късно научих как френският математик Беноа Манделброт ги е използвал да създаде своите красиви изображения и пространства, които днес възхищават света. Де да знам тогава каква огромна роля ще има доста по-късно академик Илиев в моя професионален живот.





Но най-запомнящ се за студентите от онези времена ще да е академик Боян Петканчин. Основоположник на българската стенография. Той си носеше записките в едни малки тефтерчета, пишеше по дъските много подробни неща. А всичкото ни обучение във ФМФ беше ГЕОМЕТРИЯ: аналитична, проективна, дескриптивна, Монжова, диференциална, основи на геометрията. Нищо чудно, че след 3-ти курс ми се искаше да специализирам геометрия. Харесваше ми, но не стана така. И то защо? Ами защото най-непонятна ми беше Теория на вероятностите. И много исках да науча какво става там.

Та да се върна към горното. За втори курс вече се бяхме разбрали с колегите от випуска да се заселим заедно. Петко Константинов ни връчи 6-а читалня. Там 10 момчета направихме групата на „Чуците“. И дойде ей така: рак – раци, внук – внуци, звук – звуци, чук – чуци. И до ден днешен живите от нас сме все заедно, и все „чуци“. Бяхме задружни, и до днес сме така. Според изявите ни си раздадохме министерски постове. Например, Агоп Хачикян беше министър на туризма (някъде по чукарите), Иван Габровски – на дисциплината (върл левскар – гасим лампата и лягаме да спим), Райчо Лазаров – на глада (ядяхме салата, нарязана в чекмедже), Коста Динчев – на културата (класическа музика, опера, театри, концерти) и т.н. Райчо и Георги Генов продължиха след 3-ти курс съответно в Полша и Москва. Но летните ваканции прекарвахме „на колиба“ в Приморско, на пясъка недалече от тогавашния Международен младежки център. Беше славно време! След университета станахме войници за по 4 месеца в Шумен и после 2 месеца по казармите „по разпределение“. Заедно с нас служеха и „кьошетата“. Те бяха в друг взвод, но в същата

рота. Пак се срещнахме с тях като аспиранти в МГУ. Всеки пое професионалния си път оттам.

3. Професионално и семейно развитие. Както споменах, то започна случайно. Избрах вероятности и статистика, за да науча какво е това. Статистика учехме по книга на Крамер – една в библиотеката и не винаги достъпна. Курс по случайни процеси ни водеше Апостол Обретенов. Даде ни да четем една статия на Кокс и Смит за възстановяващи се процеси от 1956-а година. Беше преведена на руски. Впечатляваше ме една теорема на Блекуел, че отношението на времето за протичане на един процес и времето на пребиваване в дадено състояние клони към 1 върху средното на времето на пребиваване. Апостол ни даваше задачи да мислим. Та и така ни даде задача за изучаване времената на престой в надеждностна система от n паралелно свързани компоненти с експоненциални времена на живот и с независими времена на ремонт след отказ. С използване на резултати от Теория на възстановяването постигнахме красив резултат. Беше публикуван 5 години по-късно в Доклади на БАН, Известия на математическия институт (така се казваха тогава научните ни списания: известия, годишници). Но хората ги четяха. На другата година Барлоу и Прошан включиха този резултат във второто издание на монографията си „Математическа теория на надеждността“. 16 години по-късно Ричард Барлоу дойде в България да се запознае с нас. Приятна, вълнуваща и чудесна среща! 8 години по-късно и аз му върнах срещата в Бъркли. Но за това – по-късно. И ми се отвори една страст към писане ... чета някакви лекции, спец-курсове, науча нещо, довършвах, добавях нещо, и го споделям. Пишех грамотно, разбираемо. Работата на даскал Бойчо Иванов в гимназията явно е дала резултат. Доцент Пенков изглежда забеляза това и ми поръчваше разни неща. Поне 2 – 3 литографски записки се пазят някъде в архивите.

През 1968 по конкурс отидох в аспирантура в МГУ. Борис Владимирович Гнеденко (Б.В.) беше се съгласил да ме вземе. На срещата там той ми говори на руски. Мене ме избива на немски. И Б. В. премина на немски (бил гост-професор там, в Германия за 1 семестър). А аз с моя плажен черноморски немски съвсем се обърках. Даде ми един списък с препоръчителни лекции и семинари, които да посещавам (Большев, Золотарев, Севастянов, Климов, Колмогоров, Прохоров, неговия научен семинар по надеждност в сряда). Най-важният беше неговият в събота от 11 до 1 след обед. Там бяха всички негови дипломанти, аспиранти, стажанти, гости ... и ми назначи „писмен изпит“ за вторник. Бяха заедно с Ю. К. Беляев. Дадоха ми 2 въпроса от Гихман и Скороход, и ми казаха да дойда в петък да ме изпитват. Онемях: у нас в България ти дават 30 – 40 въпроса и след време – ела си изтегли 2 – 3 случайни въпроса и отговаряй. Е, издържах си изпита и бях зачислен. И тръгна!

3.1. Научно развитие. На съботния семинар на Б. В. се сприятелихме с Едик Даниелян. Той беше аспирант на Климов. И започнахме съвместна работа. Отворихме собствен семинар за дипломанти и аспиранти, да развиваме вероятностните интерпретации и трансформациите на Лаплас и на „Производящите функции“, и с въвеждане на допълнителна променлива сътворихме купища резултати и публикации. Те излязоха в една монография „Приоритетные системы обслуживания“, и даже в една книга на български. Май че е превеждана и на други езици.



Бащата на Иван Габровски беше ловец. Ходихме „на лов“ с неговата пушка. Не сме убили никакво животно. Но тук с Агоп и Иван разиграваме сцена от „Охотники на привале“ дето един разправя нещо, другият го слуша с увлечение, а третият се почесва със съмнение и насмешка.



Част от чуците – войници. Прави са Агоп, Иван и Райчо; клекнали Коста, Мишо и Наско. Там си отраствахме и мустаци.

Пак там дойде един представител на някакво химическо предприятие, заинтересуван от нашите приоритетни системи на обслужване. При тях имаше краен брой цистерни, в които протича някаква химическа реакция. Като стигне до критично равнище, един компресор трябва да ги поддържа. Ние се заехме с Даниелян и за около половин година решихме задачата. Онези сключиха договор за половин милион тогавашни рубли с катедрата. Няколко старши колеги тогава живееха само от пари по договори и поне за 2 години бяха осигурени. А горкият Б. В. изтърка много служебни прагове да ми отпуснат някаква месечна помощ, и накрая успя. Дадоха ми 60 рубли награда след време.

На лекциите си Б. А. Севастьянов представи един свой резултат от 1956 г. Наричаше се „Преходни явления при случайните процеси“. Става дума, че докато параметрите на даден процес са в определени граници, неговите характеристики имат вероятностни разпределения, които се пресмятат по установени правила. Например, в разклоняващи се процеси са известни класовете докритичен, критичен, надкритичен. А когато някой параметър отива към границата на прехода, то как се променят неговите характеристики? Показа някои примери и правила.

Успях да ги комбинирам с теоремите на преноса на Гнеденко – Фахим за суми от случаен брой процеси на възстановяване, когато този случаен брой клони към безкрайност в смисъла на средното. Това беше съдържанието на моята кандидатска дисертация (1971). Рецензент ми беше А. Д. Соловьов. Той ми каза, че преходни явления трябва да се изучават и в масовото обслужване, когато коефициентът на заетост клони към 1. И ми препоръча да уча Тауберови теореми. Да чета комплексен анализ от книгите на Маркушевич и Евграфов. И така тези мои изследвания и резултати съставиха съдържанието на докторската ми дисертация (1986). И това вече самостоятелно, в България. Когато бях готов, занесох дисертацията си при Б. В. в Москва. Даде я за оценка на Соловьов и Беляев. След тяхното одобрение той ме хвана за ръка и ме заведе в Стекловката при Ю. В. Прохоров и казва: „Ну, наш Боян уже написал докторскую диссертацию“. Тогава Ю. В. каза „А мы давно этого ждем“. И видях как на Б. В. сякаш нещо му олекна. След традиционния чай си тръгнахме.

В МГУ се заобичахме с Елена Шустова. Тя следваше философия, специалност Етика. За сватбата ни на 4-ти септември 1970 г. от България тогава дойде баща ми, на 57, с една разкошна бяла коса и с 2 дамаджани от неговото вино. За да го поселя при себе си, трябваше лично разрешение на тогавашния шеф на КГБ в МГУ, Бармин. Влизаме ние с татко в кабинета, и този всемогъщ Бармин стана и се поклони на баща ми. И стоя прав докато разписа всички документи, изпрати ни до вратата и се ръкува с него. Това беше баща ми.

С Елена дойдохме в България в края на юни 1971 г. Аз – в БАН, а тя екскурзовод за руски туристи по страната. Беше хубава жена. Няколко месеца четеше и новини на руски по петъците. Започна работа като преводач в института по философия на БАН. През 1977 г. на моя рожден ден ми подари дъщеря ни Милена. Година и половина по-късно се разболя от остра форма на левкоза. Три месеца бяхме в хематологията на Александровска болница. Отиде си от този свят на 4 юли 1979 г. на 34 години. Мислех си, че и за мен светът е свършил. Това беше Елена.

И през това време аз пишех и работех като луд. Четях лекции в Следдипломна школа към ВИИ „Карл Маркс“. Издадох няколко книги със записки, и даже „На-

учно управление на запасите“ в „Наука и изкуство“. Четях лекции в Пловдивския университет, в Югозападния университет. Пак там с Елена Каращранова излезе една „Статистика за нематематици“. С Апостол Обретенов написахме „Справочник по масово обслужване“, който беше преведен и на полски език. А по-рано написах и нещо като монография „Вериги на Марков“. Не можех да стоя спокойно без да работя. Почнах и работи по теория и управление на качеството. През 1978 г. започна и Националния семинар по стохастика към СМБ. Как съм се справял – сега не мога да си обясня.

Две години по-късно (след Елена) се събрахме със Стефанка. По-скоро ни събраха Милена и Цветелина, нашите дъщери на почти еднаква възраст. А в 1981 г. се роди синът ни Недялко, а през 1983 се роди и Станко. Живеехме дружно. Навсякъде заедно. Бабите и приятели помагаха. Два пъти вестник „Вечерни новини“ писа за нас статии и показваше снимки. Многодетни интелигенти, нещо рядко срещано там тогава. Славно време! До 2000 година, когато тя си тръгна за Нова Зеландия.



С децата ми Цветка, Недо, Дария-Бояна, Мимка и Станко. От празника ми за 80 години в дома на Недялко миналата година в Торонто, Канада.

Когато се събрахме, понеже Стефанка беше от нашата черга, ѝ дадох да се занимава с гаранционни срокове. Някога, на съботните си семинари в МГУ, Б. В. беше споменал, че надеждността на техническите изделия трябва да се приложи при определяне на техния гаранционен срок. Ако е кратък, хората няма да го купуват. Ако е дълъг, производителите ще страдат. Така Стефанка съчета икономиката с надеждността в математически модели. Когато беше готова с дисертацията си (дотогава нямаше нищо подобно в литературните източници), тя я занесе на Б. В. А той я поздравил и ѝ казал, че нищо подобно не си спомня да е ставало дума на неговия семинар. Тя защити успешно и до ден днешен се занимава с такива проблеми. Има и няколко успешни докторанти в Нова Зеландия. А през 1993 г. в Сан Франциско се срещнахме с корифеите в тази област Блишке и Мурти. И те не бяха чували за

такъв подход. Та им написахме една глава в техен справочник или монография по гаранции, издадена от Марсел-Докер през 1996.

И тогава възникна въпросът: ами ако не знаеш какво е разпределението на времето на живот на изделието, а имаш непълна информация (например, средно и дисперсия само), то какво? Тогава научихме от Виктор Каштанов за една теорема на Марков – Чебишев, че дробно-линеен функционал достига екстремни стойности само когато разпределението е дискретно. И се появи моята гордост Тран Доан Фу – виетнамски студент, дипломант на Борислав Боянов. Издействах му стипендия от СМБ, благодарение на академик Илиев. За една година това момче доказа, че колкото са ограниченията, толкова са атомите на оптималното дискретно разпределение, за което става дума по-горе. Сега Фу е декан на някакъв факултет в Ханой. Появи се на онлайн честването ми благодарение издирването на Данчо Стоянов.

Попътно се появи друга подобна задача за оптимални чек-пойнти. Когато един процес върви и нещо му се повреди, той трябва да се повтори отначало. Но ако някой е запомнил състоянието в някой предишен момент (чек-пойнт), то процесът може да се рестартира от това запомнено състояние. Запомнянето отнема време. Честите запомняния удължават процеса. Та въпросът е, колко често и през какви интервали да се правят чек-пойнтите. Доста работа има около такива модели. Няколко публикации имаме с покойния Петър Петров (Пешо Кьошето), с Николай Колев, Зохел Халил и една дисертация на Красимир Баросов. И се разбра, че ако времетраенето на процеса е експоненциално, то няма нужда от подобни намеси. И тръгна тогава една поредица от характеризации на експоненциалното разпределение – само Халил и Жан Пиер Дион от Монреал знаят, а и Стефанка също.

Защо Стефанка? Ами защото бяхме написали една работа с Халил и Дион за характеризация на геометричното разпределение, че когато в една точка има отсъствие на последействие (забравя миналото си), това му стига да е геометрично. А Стефанка даде един контрапример. И беше права. Та почнахме да гледаме на тия характеризации с други очи. И се появиха разпределенията с почти липса на последействие (Almost Lack of Memory, ALM distributions), които се повтарят много пъти. Те влязоха и в справочници за вероятностни разпределения и в доста приложения. Ето пример: всяка година се застраховаме за нещо, което може да се случи. Ако стане – получаваме си полагаемото. Ако не се случи, ние пак си правим застраховката. И така нататък. А времето до поява на застрахователното събитие има такова разпределение. Точките на отсъствие на после-действие са моментите на подновяване на застраховките. И могат да се подновяват безкрайно много пъти, нали? Нещо като нашите рождени дни. Ние всеки път си повтаряме пожеланията и очакваме нещо в нас да се получи. Ако имаме безброй много рождени дни, до идването на това дето си пожелаваме разпределението ще е ALM. В актюерските математики това може да се използва доста добре. Заедно с Хосе Гарридо го показахме с няколко публикации.

През 2004 на една конференция в Санкт Петербург един учен от Украйна на име Култовер разказа, че всички живи същества на Земята имат продължителност на живота си с разпределение на Гомперц, само че с различни стойности на параметрите. Това ме впечатли и се замислих как да сравнявам живота между индивидите от различни видове организми. И като го комбинирах с някои смислови интерпретации на нещата от надеждността, стигнах до извода, че всичко е резултат на натрупания

през живота им стрес. В надеждността това се нарича кумулативен фейлор (failor) стрес, интеграл на функцията интензивност на отказите от началото на живота до определен момент. Когато двата натрупани стреса се изравнят, значи индивидите от двете групи са на еднаква възраст. Така можете да сравнявате възрастите на кучета и човеци, на мухи еднодневки и китове, и какво ли още не. В крайна сметка това приключва с таблица за приравняване на квантилите на 2 разпределения при еднакви вероятности. Тук има доста възможности за полезни практически приложения в биологията, а ако щете и в археологията. Но още ме впечатли, че различните органи на човека (мозък, сърце, черен дроб, жлези) имат различни времена на живот. Мозъкът например има средно време на живот 180 години. Значи, ако се работи върху удължаването на времената на живот на отделни органи, човек може да живее доста по-дълго! С един мой дипломант (Джордж Хайрапетян от Кеттеринг) и с колегата Петър Станчев направихме едно хипотетично сравнение и с таблици показахме какво може да стане. А лично аз практикувам тибетски упражнения и използвам народна медицина, които намаляват натрупани стресове в моя организъм. И тук има много хляб. Стига някой да желае да се занимава!

По едно време Колев ме покани да се занимаваме с изучаване на форми на зависимост между случайни величини посредством т.нар. копола. Известно е, че ако една случайна величина X има функция на разпределение $F(x) = P(X \leq x)$, тогава друга случайна величина, дефинирана с уравнението $Y = F(X)$, има функция на разпределение в интервала $[0, 1]$. И ако някоя си случайна величина T има функция на разпределение $G(t) = P(T \leq t)$, то обратната трансформация $G^{-1}(Y) = V$ ще има същото разпределение като X. Така всички непрекъснати вероятностни разпределения се оказват свързани чрез права и обратна трансформации.

По подобен начин една теорема на Склар показва, че нещо подобно се случва и при многомерните разпределения. Една обратна трансформация превежда многомерното разпределение в единичен куб, като запазва всички зависимости между координационните компоненти. А после една права трансформация може да ги преобразува в други случайни величини с друго разпределение и със запазени зависимости между компонентите. Така една зависимост между група случайни величини може да се пренася в друга група с други взаимоотношения.

Така се събуди у мен интерес към зависимостите. Реших да започна от корените. Открих, че в учебника на Обрешков от 1963 г. след независимост между случайни събития той въвежда и мерки за зависимост между събитията. Ако $P(AB)$ не е равно на $P(A)P(B)$, то A и B са зависими. Разликата $P(AB) - P(A)P(B)$ се нарича връзка. Тя показва дали е положителна или отрицателна. Но не измерва силата на връзката. И Обрешков въвежда т. нар. регресионни коефициенти. Ако въведете индикаторите I_A, I_B на събитията като случайни величини и направите линейна регресия между тях, то коефициентите на регресията ще измерват степента на връзка между двете събития. Те са числа между -1 и 1. Ето дефинициите и някои свойства:

Регресионен коефициент $r_B(A)$ на събитието A спрямо друго събитие B се нарича разликата между условните вероятности за събитието A да се случи, когато събитието B се е случило и условната вероятност на A да се случи, когато допълнителното събитие $\overline{B}$ се случи.

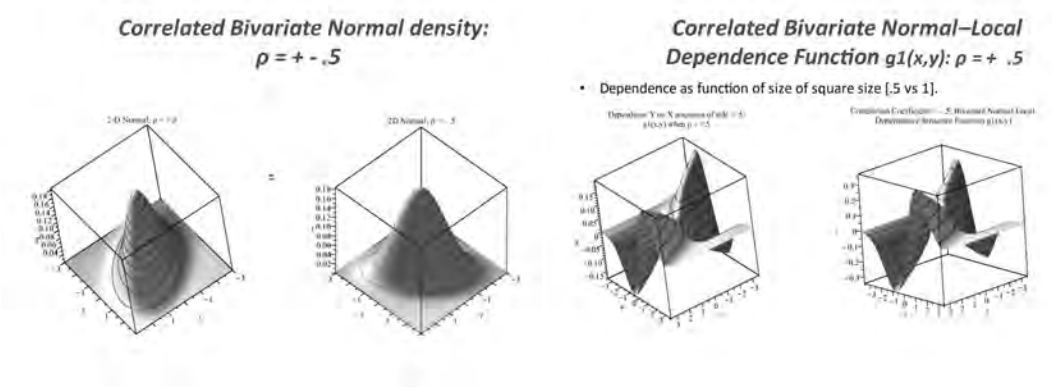
$$r_B(A) = P(A|B) - p(A|\overline{B}).$$

Регресионен коефициент $r_A(B)$ се дефинира аналогично. От свойствата им ще отбележа само факта, че

$$-1 \le r_B(A) \le 1; \quad -1 \le r_A(B) \le 1.$$

Двете мерки за зависимост са асиметрични, но имат еднакъв знак. За пример, доколкото ние зависим от правителствата си, мярката за степента на зависимост не е същата, както те зависят от нас. Например, когато $r_B(A)$ е по-малко от $r_A(B)$, събитието A е по-слабо с влиянието си върху събитието B. Възможно е да се подредят редица от събития според степента си на влияние върху друго събитие, според абсолютната отдалеченост на регресионните им коефициенти от нулата. Регресионният коефициент е равен на нула само когато двете събития са независими. Повече подробности има в една моя работа в Списание по информатика „Сердика“ (B. Dimitrov, (2014) Dependence structure of some bivariate distributions, Serdica J. Computing, vol. 8, No 3, 233–254.)

Красотата на тези мерки за зависимост е, че те важат както за числови, така и за нечислови величини. И могат да се пренасят върху случайни величини, защото функциите им на разпределение се дефинират с вероятности. Например, ако X и Y са две случайни величини и наречем $A = \{a \le X \le b\}$ и $B = \{c \le Y \le d\}$, то ще можем да изучаваме локалната зависимост между X и Y в правоъгълничето $[a, b] \times [c, d]$. Като му стесним размерите до почти една точка в левия край, ще разберем каква е зависимостта там. Ето един пример за локалната зависимост между 2 нормално разпределени случайни величини и с коефициент на корелация 0,5. Локалната зависимост е изчислена в почти една точка, която се движи в един голям правоъгълник в равнината на променливите координати. Както казват древните гърци при техните геометрични доказателства: просто седни и гледай!



Със Сахиб и с доста други колеги изучавахме локалната зависимост в политически и надеждностни процеси и в някои двумерни разпределения. Но възможностите дотук не са свършени. Ето това е последната текуща област на интереси за мен. Не мисля да свърша с това. Интересува ме и как ще се измерва и зависимостта между 3 събития и как ще се развива нататък. Известен е пример на Бернщайн, при който 3 събития са 2 по 2 независими, а в тройка са зависими.

3.2. Кариерно развитие. Когато се завърнах от аспирантурата в Русия, започнах като научен сътрудник в БАН. През 1976 г. станах доцент в Софийския университет, математическия факултет. През 1978 г. се основа Националния семинар по стохастика към СМБ и бях негов председател. Благодарение на Окръжните секции на СМБ и някои връзки с НТС (Научно-техническия съюз в България), имахме живителна дейност. Издавахме брошурки с доклади. През 1981 г. ме викнаха за член на ВАК (Висшата атестационна комисия) за науките математика, физика и химия). Там беше и Димитър Скордев, вечна му памет. По едно време (1983 г.) се организира и Лаборатория по качеството към ИММ. И там ме сложиха да я ръководя. С Мария Върбанова, Лили Бонева, Николай Колев и колеги от Лабораторията по компютърна статистика с Димитър Вындев свършихме доста работа. Изготвяхме български и международни стандарти по приемателен контрол на качеството заедно с колеги от Центъра по метрология и стандартизация към Министерския съвет. Помня имената на Стоян Вълчков, Мария Сербезова, Иван Запрянов, Хубен Хубенов от там. Имахме добър синхрон и разбирателство в работата.

Когато защитих докторската си дисертация и станах професор, на 10 ноември 1989 г., в деня на свалянето на Тодор Живков, дойдоха Сендов и Запрянов на заседанието на Факултетния съвет на ФМИ и ме посочиха за Декан на факултета. Генчо Скордев, предишният декан, беше заминал за Германия, и казал, че няма да се връща. Заместник-декани ми станаха Румен Малеев (светла му памет) и Павел Азълов. После настанаха трудни стачни времена. ФМИ уж беше затворен, но службите му, особено Изчислителният център със Стоян Бъчваров, си вършеха работата. Защото ние със стачниците и зам.-деканите си пиехме кафето и конячето в деканския кабинет и се разбирахме добре.

А, забравих да спомена, че пак през 1982 или 1983 г. ме избраха и за партиен секретар на СУ по научните въпроси. Там работих с Исак Паси, Илчо Димитров, Николай Василев и други дисиденти. Разбирахме се добре. Но това ми изяде главата като декан на ФМИ. През декември 1991 г. ме смениха с Мишо Гаврилов (и нему светла памет). Отдъхнах си с облекчение, защото следващия месец тръгнах със семейството си на работа по преподаване и науки в Канада, Монреал. Оттам на работа в САЩ (апропо, Тодор Колев ни подписа продължения на паспортите като български посланик в Отава, за да можем да преминем в САЩ). Канеха ме и да развивам катедра по Изследване на операциите в Мексико, но като видях как е там, тръгнах след Стефанка към Мичиган.

Станах пак професор през 2000 година. Пенсионирах се в 2021 г. През всичкото време си поддържам научни връзки с колеги от професията от цял свят. По тази линия бях по няколко пъти в Бразилия, Австралия, Германия, Мексико; по веднъж в Южна Африка, Китай, Франция, Италия. И навсякъде с новото си семейство (с Диана Чолакова се събрахме през 2003 г. на Хаваите и през декември ни се роди последната ми и очарователна дъщеря Дария-Бояна). А според историята си и връзките, професионалните взаимодействия с колегите си по света, от 3 години съм президент на международната общност Гнеденко Форум `https://www.gnedenko.net`. Събирам Advisory Board всяка сряда, издаваме всяко 3-месечие списанието RTA (Reliability Theory and Applications: `https://www.gnedenko.net/template/template%20RTA_LaTeX.tex`). Напълно на собствен ентусиазъм и разноски. Имаме нужда от



Една от снимките на сбирките на фамилия Димитрови от 2018 г.,
преди „КОВИД-а“.

спонсори и рецензенти на ръкописи, представяни за публикуване в RTA. И даже на български автори го препоръчвам. Заповядайте.

Децата ни, петте, са дружни, разбират се добре и всяка година се събират някъде по света заедно с внуците ми (вече 6) за по една седмица. Наричат го Събиране на семейство Димитрови (Dimitrov's Gathering). И аз съм с тях винаги, защото се обичаме.

И НЕЩО КАТО ЛИТЕРАТУРА ОТ МЕН

Ето на този адрес ще я намерите:

`http://unicat.nalis.bg/Search/Results?lookfor=Димитров+%2BБоян+%2BНедялков&type=AllFields&limit=20&sort=relevance`

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

COMPUTER SCIENCE FOR ALL: THE LEGACY OF MAGDALINA TODOROVA, TEACHER AND RESEARCHER

Atanas Semerdzhiev[1], Dafina Petkova[2], Dimitar Dimitrov[3], Kalin Georgiev[4], Nora Angelova[5], Petar Armyanov[6], Trifon Trifonov[7]

Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University,
Sofia, Bulgaria
e-mails: [1]asemerdzhiev@fmi.uni-sofia.bg, [2]dafinaz@fmi.uni-sofia.bg,
[3]dgdimitrov@fmi.uni-sofia.bg, [4]kalin@fmi.uni-sofia.bg, [5]noraa@fmi.uni-sofia.bg,
[6]parmyanov@fmi.uni-sofia.bg, [7]triffon@fmi.uni-sofia.bg

Magdalina "Magda" Todorova was one of the most esteemed and respected computer science professors at the Faculty of Mathematics and Informatics ("FMI") of Sofia University. A mathematician by education, her passion for informatics started early in her academic career and continued throughout her entire life. Endowed with remarkable memory and aptitude for rigor, she was fascinated by the theoretical aspects of informatics and her research was focused on the formal properties of programming languages: verification, modeling, and refinement of procedural, object-oriented, functional, and logical programs. For over three decades she dedicated her life to FMI, tirelessly inspiring as many of her students as possible to appreciate the beauty of programming and its scientific foundations. Her C++, Scheme, Prolog, and Haskell textbooks have become the de facto standard reading material for generations of students in Informatics and Computer Science at FMI. Always smiling, welcoming, caring, and supportive, she nurtured dozens of her pupils towards teaching and academic careers, fostering an entire generation of researchers and lecturers in computer science. Her service as a vice-Dean and unwavering engagement in the academic community of FMI have left an indelible mark in the faculty's history and traditions, setting an exemplary standard for ethics and commitment for her numerous successors to follow.

КОМПЮТЪРНИ НАУКИ ЗА ВСИЧКИ: НАСЛЕДСТВОТО НА МАГДАЛИНА ТОДОРОВА, ПРЕПОДАВАТЕЛ И ИЗСЛЕДОВАТЕЛ

Атанас Семерджиев[1], Дафина Петкова[2], Димитър Димитров[3], Калин Георгиев[4], Нора Ангелова[5], Петър Армянов[6], Трифон Трифонов[7]

Факултет по математика и информатика, Софийски Университет,
София, България
e-mails: [1]asemerdzhiev@fmi.uni-sofia.bg, [2]dafinaz@fmi.uni-sofia.bg,
[3]dgdimitrov@fmi.uni-sofia.bg, [4]kalin@fmi.uni-sofia.bg, [5]noraa@fmi.uni-sofia.bg,
[6]parmyanov@fmi.uni-sofia.bg, [7]triffon@fmi.uni-sofia.bg

Магдалина „Магда“ Тодорова бе един от най-уважаваните и почитани преподаватели във Факултета по математика и информатика („ФМИ“) на Софийския университет. Математик по образование, но изпълнена със страст към информатиката, която се заражда още в началото на академичната ѝ кариера и продължава през целия ѝ живот. Надарена със забележителна памет и прецизност, тя имаше влечение към теоретичните аспекти на информатиката. Нейните изследвания бяха съсредоточени върху формалните свойства на езиците за програмиране: проверка, моделиране и усъвършенстване на процедурни, обектно-ориентирани, функционални и логически програми. Повече от три десетилетия от живота си тя посвети на ФМИ, неуморно вдъхновявайки своите студенти да оценят красотата на програмирането и неговите научни основи. Нейните учебници по C++, Scheme, Prolog и Haskell се превърнаха на практика в стандартно четиво за поколения студенти по информатика и компютърни науки във ФМИ. Винаги усмихната, грижовна и подкрепяща, тя подтикна десетки свои ученици към преподавателска и академична кариера, възпитавайки цяло поколение изследователи и преподаватели по компютърни науки. Нейната работа като заместник-декан и дълбоката ангажираност към академичната общност на ФМИ оставиха трайна следа в историята и традициите на факултета и бяха образец за етика и отдаденост, който многобройните ѝ наследници да следваме.

ДИСКУСИЯ

DISCUSSION

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE AND IT IN VOCATIONAL EDUCATION IN ICT IN BULGARIA

Galina Momcheva

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
e-mail: gmomcheva@math.bas.bg

ДИСКУСИЯ „ПРОФЕСИОНАЛНО ОБРАЗОВАНИЕ И ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА, ИТ, ИНФОРМАТИКА“

Галина Момчева

Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mail: gmomcheva@math.bas.bg

Акценти за работната програма

- ПРОФЕСИОНАЛНО и ПРОФИЛИРАНО образование в България – общи и различни проблеми и техните решения;
- Кариерно ориентиране (ИТ кариери; Кариери с AI; изследователски кариери);
- Актуализация на списъка с професии за Професионалните паралелки в училищата в България;
- Споделяне и представяне на учебни пособия и учебни ресурси (вкл. проекти);
- Добри практики за обучение и преподаване;
- Извънкласни дейности (състезания, проекти, STEAM инициативи);
- Практики и стажове за професията;
- Повишаване на квалификацията за преподаващите (учители, външни експерти);
- Чуждестранен опит;
- Оценка на кариерното развитие на учениците.

КВАЛИФИКАЦИОННИ КУРСОВЕ ЗА УЧИТЕЛИ

PROFESSIONAL DEVELOPMENT COURSES FOR TEACHERS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

PROFESSIONAL DEVELOPMENT COURSE FOR TEACHERS: STATISTICAL DATA ANALYSIS AND COMPUTER VISUALIZATION

Maroussia Slavtchova-Bojkova[1], Denitsa Grigorova[2], Emil Kamenov[3]

Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University,
Sofia, Bulgaria
e-mails: [1]bojkova@fmi.uni-sofia.bg, [2]dgrigorova@fmi.uni-sofia.bg,
[3]kamenov@fmi.uni-sofia.bg

This course is addressed especially to the professional development of math teachers. The course contents is similar to the profiled school program in probability and data analysis. Our efforts are motivated by the deep conviction that statistical reasoning based on data is a compulsory skill for making informed choice. We present statistical methods using real data and simulations. With the help of computer software (*Microsoft Excel 2010*) we introduce the most popular graphical methods for depicting data and emphasize on the interpretation of the results from basic but widespread statistical analyses.

КВАЛИФИКАЦИОНЕН КУРС ЗА УЧИТЕЛИ „СТАТИСТИЧЕСКИ АНАЛИЗ НА ДАННИ И ТЯХНАТА КОМПЮТЪРНА ВИЗУАЛИЗАЦИЯ“

Марусия Славчова-Божкова[1], Деница Григорова[2], Емил Каменов[3]

Факултет по математика и информатика, Софийски университет,
София, България
e-mails: [1]bojkova@fmi.uni-sofia.bg, [2]dgrigorova@fmi.uni-sofia.bg,
[3]kamenov@fmi.uni-sofia.bg

Квалификационният курс „Статистически анализ на данни и тяхната компютърна визуализация“ се предлага за шести път (виж [1]–[5]) по време на пролетната конференция на Съюза на математиците в България (СМБ).

Основната цел на курса е да подпомогне преподаването и усвояването на материала, изучаван в модули 3 и 4 на профила по математика. Ще бъдат разгледани следните теми:

1. Комбинаторни съединения – пермутации, вариации и комбинации (със и без повторение).

2. Дискретни разпределения. Биномно разпределение – схема на Бернули, пресмятане на вероятности, разпознаване на параметрите в реална ситуация, графично представяне, генериране на случайни наблюдения.

3. Непрекъснати разпределения. Нормално разпределение – свойства, графика, намиране на вероятности и Z стойности, стандартизация на случайна величина, генериране на случайни наблюдения, доверителни интервали.

4. Графично представяне на данни (едномерни и двумерни) чрез правоъгълни и кръгови диаграми и хистограми. Извличане на информация от различните видове графики.

5. Описателна статистика.

6. Линейна регресия – метод на най-малките квадрати, определяне на параметрите на модела, остатъци, графично представяне.

Курсът се състои от две части. Първата част е присъствена и се води от квалифицирани преподаватели в областта по вероятности и статистика от Факултета по математика и информатика (ФМИ) на Софийския университет „Св. Климент Охридски“. Обучението ще се проведе по време на 53-тата конференция на СМБ в рамките на 2 дни с продължителност по 4 академични часа.

Втората част, която е дистанционна, има за цел да предостави възможност на курсистите да приложат и покажат придобитите знания. След провеждане на присъствената част ще се формулират проекти за самостоятелна работа, което по предварителна преценка на лекторите ще предполага не по-малко от още 8 часа за подготовка, оформяне и предаване.

За курсистите няма предварителни изисквания за входно ниво.

Тази година на курсистите ще бъдат предоставени материали, разработени от лекторите и достъпни на интернет страницата на ФМИ на адрес: `https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/proekti-i-uchebni-materiali`.

Лекторите ще наблегнат на съчетаването на класическите методи на преподаване на елементи от вероятности и статистика с дигитални средства. За целта ще се използва софтуерната програма *Microsoft Excel 2010* с включен статистически пакет.

Очакваният резултат от участието в курса е подобряване на уменията за работа с данни, а именно: графично представяне на данни от реални изследвания или симулации и обратно, извличане на информация от графично представени данни, прилагане на статистически процедури, коментиране и интерпретиране на резултатите от тях.

ФМИ предлага едноименна краткосрочна специализация, която покрива същото съдържание. За повече информация: `https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/node/8848`. На всички слушатели на курса, които се запишат за такава специализация, подготвят и предадат зададения им проект, ще бъде издадено удостоверение, съгласно изискванията на Наредбата за статута и професионалното развитие на учителите.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Славчова-Божкова, Д. Григорова, Е. Каменов. Квалификационен курс за учители „Анализ на данни и графичното им представяне чрез компютър“. *Математика и математическо образование*, **45** (2016), 299–302.

[2] М. Славчова-Божкова, Д. Григорова, Е. Каменов. Квалификационен курс за учители „Анализ на данни и графичното им представяне чрез компютър“. *Математика и математическо образование*, **46** (2017), 343–345.

[3] М. Славчова-Божкова, Д. Григорова, Е. Каменов. Квалификационен курс за учители „Анализ на данни и графичното им представяне чрез компютър“. *Математика и математическо образование*, **49** (2020), 265–269.

[4] М. Славчова-Божкова, Д. Григорова, Е. Каменов. Квалификационен курс за учители „Статистически анализ на данни и тяхната компютърна визуализация“. *Математика и математическо образование*, **51** (2022), 213–216.

[5] М. Славчова-Божкова, Д. Григорова, Е. Каменов. Квалификационен курс за учители „Статистически анализ на данни и тяхната компютърна визуализация“. *Математика и математическо образование*, **52** (2023), 209–211.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

PROFESSIONAL DEVELOPMENT COURSE FOR TEACHERS: COMPUTER MODELING WITH MUSIC

Galina Momcheva
Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria
e-mail: gmomcheva@math.bas.bg

КВАЛИФИКАЦИОНЕН КУРС ЗА УЧИТЕЛИ „КОМПЮТЪРНО МОДЕЛИРАНЕ С МУЗИКА“

Галина Момчева
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките,
София, България
e-mail: gmomcheva@math.bas.bg

Продължителност. 16 часа (12 Присъствени и 4 Дистанционни)

Цели.
- да разучава като експериментира с различните музикални елементи (ритъм, бас, хармония и мелодия);
- да представи методологията „свирене с падове“ като комбинаторен подход за разучаване на елементите на музиката;
- да кодира музика и ритъм;
- да програмира музика и ритъм;
- да композира музика;
- да представи теми и идеи за STEAM проекти, включващи природни науки, математика и изкуства (освен информатика, ИТ и музика);
- да представи теми и идеи на STEAM за проекти, свързани със здраве и природа;
- да демонстрира примери за сонификация на изображения от Земята и Космоса.

Очаквани резултати.
- да разберат основни понятия от музиката;
- да създадат индивидуални и екипни проекти по тематиката на курса;
- да осъзнаят връзките между науките като понятия, явления, събития и процеси, които са ключова основа за интердисциплинарни връзки и STEAM проекти;

– да дадат обратна връзка от участващите учители в курса за проекта на учебните пособия *Кодиране с музика* и *Програмиране с музика*;
– да изявят желание за участие в подбор на учители за реализиране на обучения в страната и чужбина.

Тематично съдържание на курса и продължителност на отделните теми.

1. Музика и звуци в нас (перкусии с тяло, музика на сърцето, звукови ефекти с глас) и около нас – 1 присъствен час
2. Комбинаторен подход за разучаване на елементите на музиката: „свирене с падове“ – 1 присъствен + 2 дистанционни часа
3. Експерименти с елементите на музиката (ритъм, бас, хармония, мелодия) и музикалните стилове – 1 присъствен час
4. Създаване на лупове. Композиране на музика със звуци от Земята и Космоса – 2 присъствени часа
5. Експерименти със звуци. Симулации и устройства – 2 присъствени часа
6. Кодиране и програмиране на аудио – 2 присъствени + 2 дистанционни часа
7. STEAM проекти (3D моделиране и принтиране на музикални инструменти; Емоции и музика, Изследване на звуци от делфини; Има ли нездравословна музика?; Звуци и вибрации; Звук и светлина; Орнаментика). Подходи за откриване на теми. Насоки за реализация на STEAM проекти – 1 присъствен час
8. Сонификация на изображения от Земята и Космоса – 1 присъствен час

СЪДЪРЖАНИЕ

ПРЕДГОВОР 5

ДОКЛАДИ ПО ПОКАНА

Ася Русева. Афинни блокиращи множества 9

Десислава Иванова. Анализ на големи биомедицински данни в подкрепа на прецизната медицина 18

Красимир Манев, Румяна Караджова. Математика за начинаещи програмисти 25

СЕКЦИЯ А: МАТЕМАТИЧЕСКИ СТРУКТУРИ

Татяна Л. Тодорова. Разпределение на дробните части на $\alpha p^2 + \beta$ по модул 1 за прости числа p, за които $p + 2$ има не повече от два прости делителя 39

Антоанета Цветанова, Стела Железова. Сортиране на данни при конструиране на резолюции на комбинаторни дизайни 57

СЕКЦИЯ Б: МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ И ИНФОРМАТИКА

Ангел Георгиев, Владимир Вълканов. Персонализиран механизъм за качество на данните в хранилища на големи данни, улеснен от проверки за целостта на данните 67

Даниел Дамянов, Атанас Христов, Златко Върбанов. Шаблони за софтуерен дизайн срещу принципите на SOLID и GRASP в реални проекти 76

Анастасия Медведенко, Екатерина Грузова, Светлана Гайворонская, Снежана Бесолова, Милена Добрева, Красимира Иванова. Извличане на мнения и чувства по време на промени: проучване на потребителските възприятия при ребрандирането на международни компании 85

Калина Сотирова-Вълкова. Екосистеми с пространства от данни за културно наследство – опит за концептуализация 92

Цветомира А. Златкова, Весела К. Стоименова. Симулационно изучаване на индивидуалното средно на разклоняващи се миграционни процеси с дискретно време 99

СЕКЦИЯ В: ОБРАЗОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Бориславa Кирилова. Вградено оценяване по време на проблемно-базирано обучение – път към автентичен учебен опит 109

Цветелина Стефанова, Слави Георгиев. Възможности за използване на AI в обучението по математика 117

Добринка Бойкина. Приложение на метода обобщение за съставяне на задачи по геометрия 126

Пламен Гостев. Задача – една, подходи много 135

Цветелина Желязкова, Добринка Бойкина. Относно евристиката „Отделяне на подзадачи“ при решаване на геометрични задачи в 7. клас 141

Борислав Лазаров, Албена Василева. Алгоритмично мислене и образователни цели в две състезателните теми на тридесет и второто издание на турнира „Черноризец Храбър“ 149

Наталия Павлова, Драгомир Марчев. Използване на изкуствен интелект – етични норми и приложение в подготовката на бъдещите учители 154

Павлин Цонев. Примерно точкуване на задачите със свободен отговор от Националното външно оценяване след VII клас през 2023 година, базирано на вероятностно моделиране 161

ЮБИЛЕЙНИ ДОКЛАДИ

Петър Попиванов. 220 години от рождението на Карл Густав Якоб Якоби . 171

Йордан М. Стоянов. Колмогоров, стохастика в България, и вероятностни задачи с неочаквани решения 180

Петър Попиванов. 120 години от рождението на чл.-кор. проф. дмн Георги Брадистилов (1904 – 1977) 198

Марусия Славчова-Божкова. 80-годишен юбилей на професор Николай Янев 203

Боян Недялков Димитров, на 80 г. Пътят ми житейски в математиката ... 209

Атанас Семерджиев, Дафина Петкова, Димитър Димитров, Калин Георгиев, Нора Ангелова, Петър Армянов, Трифон Трифонов. Компютърни науки за всички: наследството на Магдалина Тодорова, преподавател и изследовател 223

ДИСКУСИЯ

Галина Момчева. Професионално образование и обучението по математика, ИТ, информатика 227

КВАЛИФИКАЦИОННИ КУРСОВЕ ЗА УЧИТЕЛИ

Марусия Славчова-Божкова, Деница Григорова, Емил Каменов. Статистически анализ на данни и тяхната компютърна визуализация 231

Галина Момчева. Компютърно моделиране с музика 234

CONTENTS

PREFACE 5

INVITED TALKS

Assia Rousseva. On affine blocking sets 9

Desislava Ivanova. Big biomedical data analytics in support of precision medicine 18

Krassimir Manev, Rumyana Karadjova. Mathematics for beginning programmers 25

SECTION A: MATHEMATICAL STRUCTURES

Tatyana L. Todorova. On the distribution of $\alpha p^2 + \beta$ modulo one for primes p such that $p + 2$ has no more two prime divisors 39

Antoaneta Tsvetanova, Stela Zhelezova. Sorting in construction of resolutions of combinatorial designs 57

SECTION B: MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

Angel Georgiev, Vladimir Valkanov. Custom data quality mechanism in Data Warehouse facilitated by data integrity checks 67

Daniel Damyanov, Atanas Hristov, Zlatko Varbanov. Design patterns over SOLID and GRASP principles in real projects 76

Anastasiia Medvedenko, Ekaterina Gruzova Svetlana Gaivoronskaya, Snezhana Besolova, Milena Dobreva, Krassimira Ivanova. Sentiment analysis and change: a case study of evaluating user perceptions during international companies' rebranding 85

Kalina Sotirova-Valkova. A pilot conceptualisation of the data space ecosystems for cultural heritage 92

Tsvetomira A. Zlatkova, Vessela K. Stoimenova. Simulation study on the offspring mean estimators in discrete time branching processes with migration 99

SECTION C: EDUCATION IN MATHEMATICS AND INFORMATICS

Borislava Kirilova. Embedded assessment throughout the problem-based learning – a path to authentic learning experiences 109

Tsvetelina Stefanova, Slavi Georgiev. Possibilities for using AI in mathematics education 117

Dobrinka Boykina. Application of the method of generalization for creating geometry problems 126

Plamen Gostev. One problem, many solutions 135

Tsvetelina Zhelyazkova, Dobrinka Boykina. The heuristic "Dividing into subproblems" in solving geometric problems in 7-th grade 141

Borislav Lazarov, Albena Vassileva. Computational thinking and educational goals in two competition papers from the thirty-second Chernorizec Hrabar tournament 149

Nataliya Pavlova, Dragomir Marchev. Use of artificial intelligence – ethical norms and implementation in the training of future teachers 154

Pavlin Tsonev. Possible scoring of the constructed-response tasks from the national external assessment after grade VII in 2023, based on item response theory 161

ANNIVERSARIES

Petar Popivanov. 220 years of Carl Gustav Jacobi 171

Jordan M. Stoyanov. Kolmogorov, stochastics in Bulgaria, and probabilistic problems with unexpected solutions 180

Petar Popivanov. 120 years from the birthday of Prof. Georgi Bradistilov, corresponding member of BAS 198

Maroussia Slavtchova-Bojkova. Eightieth anniversary of Professor Nikolay Yanev 203

Boyan Dimitrov, 80. My life path in mathematics 209

Atanas Semerdzhiev, Dafina Petkova, Dimitar Dimitrov, Kalin Georgiev, Nora Angelova, Petar Armyanov, Trifon Trifonov. Computer science for all: the legacy of Magdalina Todorova, teacher and researcher 223

DISCUSSION

Galina Momcheva. Mathematics, computer science and IT in vocational education in ICT in Bulgaria 227

PROFESSIONAL DEVELOPMENT COURSES FOR TEACHERS

Maroussia Slavtchova-Bojkova, Denitsa Grigorova, Emil Kamenov. Statistical data analysis and computer visualization 231

Galina Momcheva. Computer modeling with music 234