Съюз на математиците в България

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ

Доклади на Четиридесет и деветата пролетна
конференция на Съюза на математиците в България
2020



Union of Bulgarian Mathematicians

MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS

Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

Докладите се издават със съдействието на
Института по математика и информатика при БАН

ЧЕТИРИДЕСЕТ И ДЕВЕТА ПРОЛЕТНА КОНФЕРЕНЦИЯ НА СЪЮЗА НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
2020 г.

ПОСВЕЩАВА СЕ НА СВЕТЛАТА ПАМЕТ НА НАШИЯ УЧИТЕЛ И КОЛЕГА АКАДЕМИК БЛАГОВЕСТ СЕНДОВ

Програмен комитет:

Председател:
проф. дмн Емил Колев (ИМИ–БАН)

Заместник-председател:
доц. д-р Иван Георгиев (ИИКТ и ИМИ–БАН)

Секретари:
доц. д-р Станислав Харизанов (ИИКТ и ИМИ–БАН)
доц. д-р Десислава Панева-Маринова (ИМИ–БАН)
гл.ас. д-р Филип Петров (ФМИ–СУ)

Членове:
акад. Благовест Сендов (БАН)
акад. Петър Кендеров (ИМИ–БАН)
акад. Веселин Дренски (ИМИ–БАН)
чл.-кор. дмн Олег Мушкаров (ИМИ–БАН)
чл.-кор. дмн Светозар Маргенов (ИИКТ–БАН)
чл.-кор. дмн Николай Николов (ИМИ–БАН)
проф. дмн Петър Бойваленков (ИМИ–БАН)
проф. дмн Иван Ланджев (НБУ)
проф. дмн Румен Даскалов (ТУ–Габрово)
проф. дмн Стефка Буюклиева (ВТУ)
проф. д-р Борислав Юруков (ЮЗУ)
проф. д-р Иван Тонов (ФМИ–СУ)
проф. д-р Красимир Манев (НБУ)
проф. д-р Румен Янков (ИМех–БАН)
проф. д-р Тони Чехларова (ИМИ–БАН)
доц. д-р Първан Първанов (ФМИ–СУ)
доц. д-р Мая Стоянова (ФМИ–СУ)
Силвия Кънчева – държавен експерт в МОН
Маня Манева – главен експерт в МОН

Технически секретар:
Албена Василева

Организационен комитет:

Председател:
Павлин Петков

Членове:
д-р Севдалина Георгиева
д-р Елена Колева
Евгения Михайлова
Елеонора Павлова
Албена Василева
Иванка Стоянова

Редакционна колегия на поредицата:
акад. Петър Кендеров – главен редактор
чл.-кор. дмн Олег Мушкаров
чл.-кор. дмн Николай Николов
проф. дмн Петър Бойваленков
проф. дмн Иван Ланджев
Албена Василева – секретар

Гост-редактор на тома:
доц. д-р Евгения Сендова

Предпечатна подготовка:
Татяна Пархоменко

© Съюз на математиците в България, 2020

FORTY-NINTH SPRING CONFERENCE OF THE UNION OF BULGARIAN MATHEMATICIANS

2020

DEDICATED TO THE MEMORY OF OUR TEACHER AND COLLEAGUE ACADEMICIAN BLAGOVEST SENDOV

Program committee:

Chair:
Prof. D.Sc. Emil Kolev (IMI–BAS)

Vice-Chair:
Assoc. Prof. Ivan Georgiev, Ph.D.
(IICT and IMI–BAS)

Secretaries:
Assoc. Prof. Stanislav Harizanov, Ph.D.
(IICT and IMI–BAS)
Assoc. Prof. Desislava Paneva-Marinova, Ph.D.
(IMI–BAS)
Chief Assist. Prof. Philip Petrov, Ph.D. (FMI–SU)

Members:
Acad. Blagovest Sendov (BAS)
Acad. Petar Kenderov (IMI–BAS)
Acad. Vesselin Drensky (IMI–BAS)
Corr. Member Oleg Mushkarov, D.Sc. (IMI–BAS)
Corr. Member Svetozar Margenov, D.Sc.
(IICT–BAS)
Corr. Member Nikolai Nikolov, D.Sc. (IMI–BAS)
Prof. Peter Boyvalenkov, D.Sc. (IMI–BAS)
Prof. Ivan Landzhev, D.Sc. (NBU)
Prof. Rumen Daskalov, D.Sc. (TU–Gabrovo)
Prof. Stefka Bouyuklieva, D.Sc. (UVT)
Prof. Borislav Yurukov, Ph.D. (SWU)
Prof. Ivan Tonov, Ph.D (FMI–SU)
Prof. Krassimir Manev, Ph.D. (NBU)
Prof. Roumen Iankov, Ph.D. (IMech–BAS)
Prof. Toni Chehlarova, Ph.D. (IMI–BAS)
Assoc. Prof. Parvan Parvanov, Ph.D. (FMI–SU)
Assoc. Prof. Maya Stoyanova, Ph.D. (FMI–SU)
Silvia Kancheva – state expert (MES)
Manya Maneva – chief expert (MES)

Technical secretary:
Albena Vassileva

Organizing committee:

Chair:
Pavlin Petkov

Members:
Sevdalina Georgieva, Ph.D.
Elena Koleva, Ph.D.
Evgeniya Mihaylova
Eleonora Pavlova
Albena Vassileva
Ivanka Stoyanova

Editorial board of the series:

Acad. Petar Kenderov – editor-in-chief
Corr. Member Oleg Mushkarov, D.Sc. (IMI–BAS)
Corr. Member Nikolai Nikolov, D.Sc. (IMI–BAS)
Prof. Peter Boyvalenkov, D.Sc. (IMI–BAS)
Prof. Ivan Landzhev, D.Sc. (NBU)
Albena Vassileva – secretary

Guest editor of the volume:
Assoc. Prof. Evgenia Sendova, Ph.D.

Layout editor:
Tatiana Parkhomenko

© Union of Bulgarian Mathematicians, 2020

П Р Е Д Г О В О Р

Динамиката на времето, в което живеем, ни поставя пред неочаквани трудности и предизвикателства. За съжаление тази година, поради разпространението на вируса COVID-19, Пролетната конференция на СМБ няма да се проведе така, както бе предвидено. Това безспорно ще наруши ритъма на Съюза, но в същото време ще даде възможност за осмисляне на неговата роля в постигане на целите и решаване на задачите, които стоят пред математическата колегия.

Както всяка друга година, подготовката за Пролетната конференция на СМБ протече при стандартния *дневен ред*: избор на секция домакин и място за провеждане, заседания на Програмния комитет, подготовка на тома с докладите, обсъждане на предизвикателствата пред Съюза и необходимите промени в неговите дейности. Колегите, с които имах удоволствието да работя в Програмния комитет, се отнесоха изключително отговорно към работата си и благодарение на проведените заседания и дискусии работата по тома на конференцията беше завършена навреме.

Настоящата конференция е посветена на паметта на акад. Благовест Сендов, който ни напусна на 19 януари 2020 г. В статията на Петър Кендеров и Андрей Андреев е представена неговата роля на *български учен, прозорлив и успешен ръководител и реформатор, радетел за развитие на образованието, общественик, държавник, родолюбец.*

На 7 февруари 2020 г. се сбогувахме с друг уважаван член на математическата колегия, доц. Чавдар Лозанов, в памет на когото Иван Тонов е написал кратка, но съдържателна статия за приносите му към математическата наука и образованието, както и за дейността му като Председател на УС на СМБ.

Структурата на тома следва познатата схема: юбилейни доклади, доклади по покана, доклади по секции, представяне на образователни проекти, квалификационни курсове за учители.

Предвиждаше се да се проведе и традиционната Ученическа секция на Ученическия институт по математика и информатика, на която да бъдат представени проекти на ученици по математика, информатика и информационни технологии.

Трите доклада по покана са: *A Diophantine transport problem from 2016 and its possible solution from 1903* (автори Силвия Бумова, Веселин Дренски, Боян Костадинов), *Mathematical Methods in Automatic Speech Recognition* (автор Стоян Михов) и *Българска платформа за състезателна информатика* (автори Емил Келеведжиев, Тодор Брънзов, Петър Петров, Марин Шаламанов). Докладите по секции се отличават с разнообразна тематика и автори от различни градове на България.

Юбилейните доклади са посветени на: 20 години от създаването на УчИМИ; живота и работата на известния индийски математик Рамануджан; годишнини на бележити членове на СМБ.

Както всяка година, бяха предвидени дискусии по важни за математическото образование проблеми: *ДЗИ по информатика и по информационни технологии – какви компетентности и с какви средства ще оценяваме* (модератор Силвия Кънчева) и *Учебни програми, планове и изпити по математика в основното и средното образование* (модератор Павлин Петков).

За професионалната квалификация на учителите са предвидени три курса, два от които с получаване на кредит: „Анализ на данни и графичното им представяне

чрез компютър“, от екип от ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“ в състав проф. Марусия Славчова-Божкова, гл. ас. Деница Григорова, гл. ас. Емил Каменов, и „Създаване и използване на електронни ресурси в обучението по математика“ от гл. ас. Стефка Караколева от Русенския университет „Ангел Кънчев“. Третият курс, разработен от проф. Тони Чехларова от ИМИ-БАН, ще запознае слушателите в рамките на два часа с „Изучаване на стереометрия с динамични конструкции“.

През миналата година стартира програма *Образование с наука*. Инициирана от МОН, програмата има за цел да вдъхнови повече ученици да се занимават с наука и да имат по-задълбочени познания по математика, техника и природни науки. Тя си поставя за цел да подобри информираността и достъпа на учениците, учителите и работещите в сферата на образованието до институтите и музеите на БАН. Въвеждането на иновативни практики и методи в обучението е от първостепенна важност и предоставя възможност на българските учени, работещи в Академията, да споделят своя опит и да предизвикат у учениците интерес към науката. По програмата са одобрени 26 проекта на обща стойност 500 000 лв., чрез които институтите и музеите на БАН разработват образователни програми и дейности за учениците. В тома ще намерите подробна информация за различните дейности по програмата *Образование с наука*.

Подготовката на научната програма на конференцията не би била възможна без активното участие на Програмния комитет. Изказвам благодарност на неговите членове, на секретарите на секциите доц. д-р Десислава Панева-Маринова, доц. д-р Станислав Харизанов и гл. ас. д-р Филип Петров. Благодаря на Албена Василева и Татяна Пархоменко, на гост-редактора на тома доц. д-р Евгения Сендова и на Ани Търсанкова за положения огромен труд за подготовка на тома с материалите. Традиционно от името на Програмния комитет благодаря на Югозападния университет „Неофит Рилски“ в лицето на неговия ректор проф. д-р Борислав Юруков за отпечатването на тома.

София, 23 март 2020 г.

проф. дмн Емил Колев,
Председател на Програмния комитет
на 49. пролетна конференция на СМБ

IN MEMORIAM

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

АКАДЕМИК БЛАГОВЕСТ СЕНДОВ (1932 – 2020)

Петър Кендеров, Андрей Андреев



На 19 януари 2020 г. България бе сполетяна от огромна загуба. Завинаги си отиде от този свят академик Благовест Христов Сендов – световно известен български учен, талантлив математик, прозорлив и успешен ръководител и реформатор, радетел за развитие на образованието, общественик, държавник и родолюбец. Загубата е болезнена не само заради неочакваната смърт на акад. Сендов, който буквално до последните си дни водеше успешна изследователска дейност, споделяше въодушевлението си от очертаващите се нови научни постижения и участваше активно в академичния и обществения живот. Боли и от това, че българската математика и информатика, науката в България, цялото българско общество завинаги бяха лишени от многостранната експертност, от авторитета и неизтощимата енергия на една многопластова и сложна личност. Личност с ярко и незабравимо присъствие в

цялата палитра от дейности, с които акад. Сендов участваше в живота на българската наука и българското общество. С неговата смърт добрите нрави в обществено-политическия живот на страната губят един от стожерите си. Онази част от българското общество, за която на първо място стои просперитетът на България, загуби един от най-ярките си представители и поддръжници.

Благовест Сендов е роден на 8 февруари 1932 г. в гр. Асеновград, в заможно многодетно семейство – трима братя и две сестри, от които Благовест е вторият по възраст. Баща му, Христо Сендов, е преуспяващ търговец, а майка му, Марушка Сендова, е възпитаник на Американския колеж в Самоков. Има 2 дъщери (Марушка и Ана) от първата си съпруга, Лилия Сендова, и един син (Благовест) от втората съпруга, Анна Сендова.

Още преди да тръгне на училище, той е наясно с аритметичните действия и не случайно първата в живота му „официална“ работа е на 12 години – във фирмата на баща си. Отговорник е на приемателен пункт с 40 души работници. На това място се е изисквало боравене с числа, а това е негово любимо занимание.

На 17 години през 1949 г. завършва с отличие Асеновградската гимназия, но за да стане студент по математика в Софийския университет, му се налага да преодолее политически пречки – властите в Асеновград не го пускат да следва поради буржоазния му произход. Пречките са преодолени с находчивост и много труд. Напуска родния си град, работи около три години в отдел *Чистота* на Благоевски райсъвет в София и получава софийско жителство. Това му дава възможност да постъпи през есента на 1952 г. във Физико-математическия факултет на Софийския университет, специалност математика – производствен профил. Завършва висше образование предсрочно и с отличен успех през 1956 г. Още като студент публикува първите си научни резултати. Въпреки острата нужда от преподаватели в университета и въпреки че е издържал конкурсен изпит за аспирант (докторант по съвременната терминология), той е изпратен на работа като гимназиален учител по математика в Бобошево (време, за което си спомня с най-добри чувства). Причината е политическа. Децата, родени и възпитани преди 9 септември 1944 г. в заможни семейства, носят клеймо „неблагонадеждни“ и са държани настрана от преподавателска дейност в университета. Но неговият талант и лични качества са вече забелязани от най-изтъкнатите представители на математическата колегия по онова време. През 1958 г. по инициатива на проф. Благовест Долапчиев (на когото Сендов е бил аспирант), е образувана подписка, подкрепена от професори от Софийския университет, между които Никола Обрешков, Любомир Илиев, Любомир Чакалов. Те изпращат писмо до ръководителите на държавата с предложение Благовест Сендов да бъде назначен за асистент в университета. Така от 1958 година Софийският университет се сдобива с талантлив математик, който в бъдеще:

- ще създаде световно известна школа по Теория на апроксимациите;
- ще бъде избран за Декан на Факултета по математика на СУ (1970–1973);
- ще бъде избран за Ректор на СУ (1973–1979);
- ще бъде избран за Председател на БАН (1988–1991);
- ще провежда дълбоки реформи в областта на образованието и науката;

- ще е активен и нестандартен представител на политическия елит – Председател на Народното събрание (1995–1997), Посланик в Япония (2004–2009);
- ще представя България в редица влиятелни международни обществени и научни организации и в много от тях също ще се озове на отговорни ръководни позиции.

В основата на яркото присъствие на Сендов в научния и обществения живот, на неговите изяви и успехи са изключителните му лични качества. В научен план нещата са ясни – Благовест Сендов е просто твърде талантлив математик. Талантът му обаче е съчетан и с уникална способност:

- да улавя бързо и точно тенденциите в развитието на света;
- бързо да се добира до същността и сърцевината на проблемите;
- да предлага (и успешно да прилага) практически реализуеми решения, които въздействат върху решавания проблем в дългосрочен план.

За разлика от други талантливи математици, които предпочитат спокойните води на класическата наука, Благовест Сендов не се страхува да се озове във водовъртежа на бурно развиващите се нови клонове на науката. Противопоставянето на двете световни политически системи по онова време, Изток – Запад, е изкарало на преден план предимствата на информатиката за ускоряване на развитието на икономиката и науката. Държавното ръководство у нас е започнало да осъзнава необходимостта от подготовка на кадри в областта на информатиката, която в България се ражда и развива в лоното на математиката. Вдъхновител на тези промени е акад. Любомир Илиев, който по онова време е директор на Института по математика към БАН и ръководител на катедрата по Висш анализ във Факултета по математика на СУ. Тъкмо той издига и прилага принципа: „Новите дейности – с нови хора“. Новият човек е Благовест Сендов. Обновителните процеси обхващат цялата математическа колегия в БАН и Софийския университет и дават възможност на много млади хора да изявят качествата си. С особена сила това важи за Благовест Сендов, който постепенно от участник в процеса се превръща в основен двигател и инициатор на промените. Реформаторските усилия са всекидневие в дейността на Сендов и като учен, и като ръководител. Необходимо е много повече място и време, за да бъдат описани, анализирани и оценени всичките му инициативи. Споменаваме тук накратко само четири, като всяка една от тях, сама по себе си, е достатъчна, за да предизвика уважение към личността му и да ни накара да се гордеем, че България е отгледала такава личност. Повече подробности могат да се намерят в статията по случай 80-годишния юбилей на акад. Благовест Сендов[1].

Нов модел за висше образование по математика и механика в България. През 1970 г., когато Сендов е декан на Факултета по математика и механика на СУ, влиза в действие „Нов модел за висше образование по математика и механика“, който съществено се отличава от всичко, практикувано в България до онзи момент. Новото образование е „степенувано и профилирано“. Степените са наречени „Блок А“, „Блок В“ и „Блок С“. След успешно завършване на „Блок А“,

[1] *П. Кендеров, А. Андреев, С. Димова, С. Марков*, Академик Благовест Сендов на 80 години, Доклади на 41. пролетна конференция на Съюза на математиците в България, Боровец, 9–12 април, 2012, 7–22.

където обучението продължава 3,5–4 години, се получава диплома за завършено висше образование. След „Блок B“ (с продължителност 1,5–2 години) дипломата е за „магистър“, а след „Блок C“ (3 години) и успешна защита на дисертация се дава научната степен „Кандидат на науките“. По-късно последната е преименувана в „Образователна и научна степен доктор“. Лесно е, дори само по тези формални белези, да се разпознае приликата между този *Модел на образование* и действащата днес у нас система за висше образование, описвана с ключовите думи „бакалавър – магистър – доктор“ и „Болонски процес“. Нека веднага напомним, че поради ширещото се по нашите географски ширини късогледство, в края на 80-те години на миналия век този прогресивен модел на образование е изоставен и висшето ни образование по математика се връща към корените си от преди 1970 година. А днешната система, която има англосаксонски произход, е наложена с големи усилия и огромни средства в континенталната част на Европейския съюз, включително и в България, едва в края на 90-те години на миналия век, т.е. повече от 25 години след като е започнало използването ѝ в България.

Проблемна група по образованието (ПГО). В края на август 1979 година, със заповед на Министерството на народната просвета, на малък колектив, оглавяван от Благовест Сендов, е възложено написването на „експериментален буквар и математика за 1. клас“. В колектива са имената на изтъкнати дейци на българската култура и наука, поети, езиковеди, психолози, опитни педагози. Колективът разработва и представя учебно помагало от съвършено нов и непривичен за онзи момент тип. В него са заложени и реализирани идеите за образование, при което любопитството и познавателната потребност на детето, а не принудата, са двигатели на образователния процес. Поощрява се въображението и творческото начало. Всичко е насочено към изграждането на навици за самостоятелно учене. Впоследствие, под ръководството на Сендов, между Министерството на народната просвета и БАН е формирана „Проблемна група по образованието“ (ПГО), която да разработи „един от вариантите за реформа на образованието“. Работата продължава повече от 10 години. Групата създава добре структурирана цялостна образователна система с внушителна по обем, замисъл и оригиналност учебна документация, с добре поднесено и интересно учебно съдържание, в което компютърните технологии са естествен елемент, с нови взаимоотношения между учител и ученик, със стимулиране на самостоятелната работа на учениците. Образователният процес се фокусира не върху преподаването на готови знания, а върху усвояването на навици за самостоятелно придобиване (откриване) на необходимата информация и проникване в същността на изучавания материал. Образователната система на ПГО съдържа основните белези на нещо, което днес се нарича *Изследователски подход в образованието* (Inquiry Based Education). Този подход се характеризира с усвояване от страна на обучаемите на изследователско отношение към обкръжаващия свят. Това се постига чрез фокусиране върху решаването на задачи (а не върху запомняне на факти) и активно участие на ученика в учебния процес – със задаване на въпроси, формулиране и проверка на хипотези, изпробване на различни възможности, провеждане на експерименти, работа в екип и т.н. Достоен за съжаление е фактът, че през 1992 г. ПГО е закрита. През последните 15 години Европейският съюз инвестира десетки милиони евро за разпространението на *Изследователския подход* в европейските училища, включително и в България. Отново се налага да внасяме от-

вън неща, в развитието на които България има международно признат оригинален принос.

Проектно финансиране в науката. Проектното финансиране от Фонда за научни изследвания и по линия на Европейските програми за развитие на науката днес се приема като нещо съвсем естествено. Това обаче съвсем не е така през далечната 1986 година, когато Държавния комитет за наука въвежда финансирането на научни разработки на конкурсен принцип. Инициативата идва от Благовест Сендов, който по това време е председател на комитета, а процедурата следва модела на Националния научен фонд на САЩ. Този начин на финансиране не замества, а върви паралелно с институционалното финансиране на научните организации. За пръв път голям брой учени започват самостоятелно да управляват научни проекти и финансови средства, да купуват апаратура и литература, да пътуват и да участват в конференции в чужбина. Така демократизацията в сферата на науката изпреварва с няколко години демократизацията на българското общество, която започва през 1989 г. Опитът, придобит в управлението на проектите и работата по тях, се оказва много полезен за българската научна общност, когато се отварят възможностите за разработка на проекти в рамките на многобройните европейски програми, където финансирането е също на проектен принцип.

Включване на България в международното научно и културно сътрудничество. Реформаторските и лидерските качества на Сендов успешно съдействат за преодоляването на изолацията на България от международния научен и културен живот. И тези качества са признати и оценени в чужбина. Като ректор на Софийския университет Сендов участва активно в дейността на Международната асоциация на университетите (IAU) и се издига до президент на тази организация. Мандатът му на президент е толкова успешен и впечатляващ, че е избран за пожизнен Почетен президент. Изключително успешно е и участието му в друга престижна и влиятелна организация – Международната федерация по обработка на информацията (IFIP), в която той реализира успешен президентски мандат. Участвал е и в ръководството на Международния съвет на научните съюзи (ICSU), както и в ръководството на Световния съвет на мира.

Благовест Сендов – живот, отдаден на математиката, информатиката и не само... Обикновено е прието да се казва след смъртта на даден човек, че ни е напуснал. В случая с акад. Сендов едва ли това е подходящо. Няма как да се приеме като нормално, че ни е напуснало „нещо“, което Сендов е изграждал в продължение на 60 години. Това нещо е било около нас, с него редица математици са свързали творческите стимули в живота си. Идеите и резултатите на Сендов в Теорията на апроксимациите, Числените методи, Математическия анализ и други клонове на математиката и информатиката не само са увличали и стимулирали голям брой талантливи български математици, но и немалко чуждестранни учени, които са се трудили върху проблеми, поставени от него. В потвърждение на казаното е и фактът, че от 1959 г. до сегашната 2020 г., стотици статии са публикувани върху “хипотезата на Сендов“ и усилията за доказването ѝ продължават. Подробностите за тази хипотеза са по-долу.

Благовест Сендов е до голяма степен универсална личност в математиката заради блестящите резултати в различни нейни клонове като Числени методи, Нули на полиноми, Интервален анализ, Математическо образование, Математическа био-

логия и др. Все пак голямата му любов е Теорията на апроксимациите. И въпреки, че любовта едва ли се поддава на рационално обяснение, то в случая съществуват факти, които поне минимално могат да хвърлят светлина върху нея. Участвайки активно като студент в известния семинар по функционален анализ на проф. Ярослав Тагамлицки през 50-те години на миналия век, където подробно са изучавани работите на световноизвестния в Теорията на апроксимациите академик С. Н. Бернщайн, все още активен математик по това време, Сендов в 4. курс пише под ръководството на проф. Тагамлицки първата си курсова работа. И тъй като е завършил следването си за 4 вместо за 5 години, тази курсова работа е и неговата дипломна работа. Тя е и първата му научна статия, представена за публикуване от Бернщайн – *"On a class of regular-monotone functions", Dokl. AN SSSR, 110, № 1 (1956), 27–30.* Сендов е на 24 години.

Сендов и българският принос в Теорията на апроксимациите. Без преувеличение може да се каже, че ако се говори за български принос в Теорията на апроксимациите, името на Сендов е първото, което трябва да се спомене. Не, че не е имало и има талантливи и известни други български учени в тази област. Българската математика не е останала встрани от бурното развитие на Теорията на апроксимациите в първата половина на миналия век и в лицето на академиците Никола Обрешков и Любомир Чакалов оставя забележими следи. Като студент по математика през 50-те години на миналия век Благовест Сендов изпитва директно влиянието им, както и това на други изявени личности в българската математика като Я. Тагамлицки, Л. Илиев, К. Попов и др. Той е техен студент, а те, освен че са блестящи учени, са преди всичко личности.

Теорията на апроксимациите, като част от Математическия анализ, има дълготодишна история, може би започвайки с основополагащите резултати на Карл Вайерщрас и на Пафнутий Чебишов. По-точно, Вайерщрас доказва, че всяка непрекъсната функция в краен интервала $[a, b]$ може да бъде приближена с алгебричен полином в равномерната метрика с произволна точност, а теоремата на Чебишов за алтернанса характеризира напълно полинома на най-добро равномерно приближение. С развитието на изчислителната техника тези идеи се превръщат в мощен и удобен изчислителен инструмент.

Повратен момент в живота на Сендов е специализацията му в катедрата по изчислителна математика на Механо–математическия факултет на Московския държавен университет от есента на 1960 до пролетта на 1961 г. Попадайки под влиянието на идеите на А. Колмогоров, дейността на семинарите на С. М. Николски, С. Б. Стечкин, Д. Е. Меншов и др., където се поставят нови проблеми в теорията на апроксимациите, Бл. Сендов се оказва потопен в една среда, събрала немалка част от цвета на световната математическа мисъл. Докладвайки върху проблем, свързан с ε-ентропията и ε-капацитета в класа на непрекъснатите функции, той стига до извода, че предложеното от него ново разстояние е естествена метрика в пространството на ограничените функции. Лично А. Колмогоров му обръща внимание, че това разстояние в теорията на множествата е въведено от Felix Hausdorff в книгата му „Grundzüge der Mengenlehre", издадена през 1914 г., и измерва близостта на две подмножества на дадено метрично пространство. По-точно, ако X и Y са две непразни подмножества на метричното пространство M с метрика d, то хаусдорфовото

разстояние $r(X,Y)$ между множествата X и Y се дефинира с

$$r\left(X,Y\right)=\inf_{\varepsilon>0}\left\{X\subseteq Y_{\varepsilon}\ ,\ Y\subseteq X_{\varepsilon}\right\},$$

където

$$X_{\varepsilon}=\bigcup_{x\in X}\left\{z\in M;d(z,x)\leq\varepsilon\right\}.$$

С използването на хаусдорфовото разстояние се поставят основите на самостоятелен клон в теорията на апроксимациите – българският клон.

Официално Сендов няма научен ръководител на докторската си дисертация, защитена в България през 1964 г., но очевидно неин вдъхновител е А. Колмогоров, който още в Москва помага на Сендов да публикува няколко статии в тази област. Един от основните и красиви резултати от докторската му дисертация е, че в интервала $[-1,1]$ функциите

$$s\left(x\right)=\begin{cases}1,\ x\geq0,\\0,\ x<0,\end{cases}\qquad\delta\left(x\right)=\begin{cases}1,\ x=0,\\0,\ x\neq0,\end{cases}$$

(а и всяка ограничена функция) могат да бъдат приближени в хаусдорфова метрика с алгебричен полином от степен n с точност $\text{const}\,\dfrac{\log\ n}{n}$ и че тази оценка не може да бъде подобрена. За силата на тези резултати говори поканата към Сендов да ги представи в руското списание „Успехи Математических Наук“ през 1969 г.

През 1973 г. в *Journal of Approximation Theory*, **9** (1973), Бл. Сендов заедно с първия си ученик, Васил Попов, (може би най-талантливият измежду многобройните му ученици) доказва следната теорема:

Съществува абсолютна константа C, такава че за всяка ограничена функция f в интервала $[a,b]$ и всяко $\alpha>0$, най-доброто хаусдорфово приближение $r_n([a,b],\alpha;f)$ на f с полиноми от степен n в интервала $[a,b]$ с параметър α удовлетворява неравенството

$$r_n\left([a,b],\alpha;f\right)\leq C\omega\left(f;n^{-1}\right)\frac{\ln\ \left(e+\alpha.n.\omega\left(f;n^{-1}\right)\right)}{1+\alpha.n.\omega\left(f;n^{-1}\right)},$$

където $\omega\left(f;n^{-1}\right)$ е класическият модул на непрекъснатост на функцията f.

Това е силен резултат сам по себе си, но е забележителен и защото обобщава един от основните резултати в Теорията на апроксимациите при $\alpha\to0$, а именно знаменитата теорема на Jackson от 1911 г. за скоростта на приближаване на непрекъснати функции с полиноми.

Базов източник на информация за приближенията на функции в хаусдорфова метрика е монографията на Бл. Сендов *“Hausdorff approximations”, Kluver Acad. Publ., 1990.*

В резултат на изследванията върху хаусдорфовите приближения Бл. Сендов и учениците му въвеждат нова характеристика на функциите, така наречения τ-модул (усреднен модул на гладкост)

$$\tau_k\left(f;\delta\right)=\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b(\omega_k(f,x;\delta))^p dx\right\}^{\frac{1}{p}},\quad p\geq1\ ,$$

където

$$\omega_k(f,x;\delta)=\sup\left\{\left|\Delta_h^k f(t)\right|:t,t+kh\in\left[x-\frac{k\delta}{2},x+\frac{k\delta}{2}\right]\cap[a,b]\right\}.$$

Модулът намира естествено приложение при оценката на скоростта на сходимост на линейните положителни оператори, използващи дискретни стойности (от такъв тип е класическият оператор на Бернщайн,

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)x^k(1-x)^{n-k},$$

важен инструмент в теоретичен и практически аспект, особено приложенията му в компютърната графика), както и при оценки на грешката в числените методи за диференциални уравнения.

Резултатите, свързани с τ-модулите, са изложени в монографията „Усреднени модули на гладкост“, БАН, 1983 г., написана съвместно с В. Попов и издадена 5 години по-късно от издателствата *МИР, Москва* и *John Wiley&Sons, New York*.

В редица математически модели се налага да се работи с *на части непрекъснати функции*[2]. Интересът на Бл. Сендов към такива функции без съмнение е възникнал при изследванията му в областта на хаусдорфовите приближения, където важна роля играят т. нар. *хаусдорфово непрекъснати функции*, частен случай на които са интервалните функции. Една такава е функцията „скок“, известна още като функция на Хевисайд. Тя е една от първите, атакувана от Сендов при намирането на скоростта на приближаването ѝ с полиноми в хаусдорфова метрика. В следващите няколко години той се занимава активно с интервален анализ, стремейки се да предефинира основни понятия от класическия анализ в термините на интервалния, като въвежда т. нар. S-граница и S-производна на интервална функция. В серия от статии през 1977/80 г. Сендов изгражда основите на интервалния анализ. Тези изследвания бяха продължени у нас от негови ученици и последователи (С. Марков, Н. Димитрова, Р. Ангелов и др.). Въвеждането на алгебрични операции с хаусдорфово непрекъснати функции направи удобно и полезно тяхното приложение в числените пресмятания, например, компютърни пресмятания с неточни данни.

Сендов – съмнение и интуиция в математиката. Да се съмнява човек е естествено, но в математиката съмнението, че даден резултат не е това, което трябва да бъде, понякога е удивително плодотворно. В този смисъл интуицията на Бл. Сендов тласка творческите му търсения в две направления:

- първо направление – да предлага нови клонове в теорията на апроксимациите, които съществено я обогатяват и същевременно се оказват привлекателни за редица математици;
- второ направление – да подлага на съмнение резултати, които на пръв поглед са неподобряеми и са били приети от математическата общност като завършен резултат.

Към първата група, освен хаусдорфовите приближения, спадат и въведените през 1971 г. от Сендов „параметрични приближения“. Той доказва, че параметричното приближение на фукцията $|x|$ на интервала $[-1,1]$ е от порядъка $(3+2\sqrt{2})^{-n}$. Та-

[2]бел. ред. наричани още *частично непрекъснати функции*

зи оценка подобрява на порядък знаменития резултат на американския математик Donald J. Newman от 1979 г. за рационалното приближение на $|x|$, а именно оценката $e^{-c\sqrt{n}}$. И двата подхода, на Сендов и на Newman, използват като апарат за приближаване два полинома от степен n.

Като типичен представител на втората група научни резултати са тези, получени в резултат на изследванията на Бл. Сендов и учениците му върху константата на Whitney. През 1957 г. американският математик Whitney доказва, че за всяко цяло $n > 0$ съществува константа W_n, такава че за всяка ограничена функция $f : [a, b] \to R$ съществува алгебричен полином P_{n-1} от степен $n - 1$, за който е изпълнено

$$\|f - P_{n-1}(f)\| \leq W_n \omega_n \left(f; \frac{b-a}{n} \right),$$

където $\omega_n (f; \delta)$ е n-тият модул на непрекъснатост на функцията f. Преди около 60 години първата оценка е $W_n \sim n^n$ и въпреки, че W_n участва в оценката на грешката във важни за практиката числени методи, в математическите среди се е считало, че порядъкът не е по-малък от C^n. През 1982 г. Бл. Сендов изказва хипотезата, че $W_n = 1$. По думите на Ю. В. Крякин (Mat. Sb., 1994, Volume 185, Number 3, 25-40) – *По това време хипотезата на Сендов изглеждаше достатъчно смела – съществуващите оценки за константата бяха при големи* $\boldsymbol{n}$ *достатъчно груби.* Тази характеристика на математическото чувство и интуиция на Сендов не се нуждае от коментар. Долната таблица е показателна за историята и борбата с константата на Whitney, как и от кого във времето е подобрявана.

година	учен	W_n
1961	Brudnyi	$C.n^{2n}$
1985	Иванов, Такев	$C.n.\ln n$
1985	Бинев	$C.n$
1985	Сендов	C
1986	Сендов	6
1989	Kryakin	3
1995	Kryakin	2

Сендов – как понякога и от грешна политика се получава нещо положително... След дипломирането си през 1956 г. Сендов полага успешно изпитите за аспирант и едновременно с това преподава половин семестър като асистент по математика. Но унгарските събития през 1956 г. сплотяват „здравите сили“ в управляващата комунистическа партия и за „враговете на народа“ настъпва нелесно време. Очевидно, политиката на управляващите е грешна. Както беше споменато по-горе, Сендов е принуден да напусне университета и той става учител по математика в Бобошево и Елин Пелин. През 1958 г. акад. Обрешков, най-авторитетният академик по математика по това време, народен представител, макар и безпартиен, поддържан от колегите си, взима Сендов като асистент в катедрата по алгебра, на която е ръководител. В отговор, Сендов се чувства длъжен да се впише в тематиката на катедрата по алгебра. И така, през 1959 г. Бл. Сендов, като асистент на академик Н. Обрешков, изказва пред него една хипотеза, която става известна през следващите 60 години като „Хипотезата на Сендов“. Тази хипотеза изследва взаимното

разположение на корените на алгебричен полином и корените на производната му. Хипотезата гласи, че за полинома $P(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$, чиито корени $r_1, \ldots, r_n$ са в единичния кръг $|z| \leq 1$, всеки от n-те корена на P е на разстояние не повече от 1 от някой корен на производната на полинома. От класическата теорема на Gauss-Lucas, която е естествено обобщение на добре известната теорема на Rolle от 1691 г., следва, че всички корени на P' са в единичния кръг, но хипотезата на Сендов очевидно прецизира разположението на корените на полинома и производната му[3]. За интереса към хипотезата говори фактът, че досега са публикувани над 150 статии по този въпрос, включително и от редица български математици. Въпреки, че хипотезата е „почти“ доказана, този математически проблем, който изпъква с простата си формулировка, заради която може би е и така привлекателен, остава недоказан. През последните 5–6 години Сендов продължи да работи активно върху проблема за взаимното разположение на нулите на даден полином и производната му. Подробности могат да се видят в Приложението (на английски език) от Христо Сендов към настоящата статия, в което авторът споделя най-значимите резултати от съавторството си с Благовест Сендов.

Благовест Сендов – приноси в биоматематиката. В периода 1965–1976 година Благовест Сендов разработва активно математически модели, описващи редица биологични процеси. Той работи в тясно сътрудничество с известния специалист по молекулярна биология акад. Румен Цанев. В 10 публикации двамата учени изследват механизма на деление, диференциация и карциногенеза на клетки в многоклетъчни организми. Резултатите от тези 10 публикации са публикувани в *J. Theoret. Biol., New York*, през 1966, 1968, 1969, 1971 г., а през 1975 г. са докладвани на семинара на Петровски по Диференциални уравнения и Математически проблеми на физиката в Московския държавен университет и са публикувани на следващата година в престижното списание *Успехи Математических Наук*. Създадените математически модели се базират на съвременните постижения на биохимията на клетката по онова време и някои хипотези, които двамата учени си поставят за цел да проверят. Основният математически апарат на модела е система нелинейни диференциални уравнения с прекъснати коефициенти, но главната особеност е, че броят на уравненията зависи от времето. Изследването на такъв тип системи диференциални уравнения е било възможно само с помощта на компютър и в този смисъл компютърните умения на проф. Сендов са били изключително важни за успеха на изследванията (по това време се използва компютърът Минск-2 в Института по математика на БАН). Изучаването на устойчивостта на системата по отношение на броя на уравненията е ключовият елемент, обясняващ зараждането и развитието на раковите клетки.

Резултатите от съвместната работа на Сендов и Цанев са ярко доказателство за предимствата, които математиката предоставя като апарат за описание на процесите в другите науки, когато проблемите са атакувани от ерудирани учени, от различни области.

[3] Динамичен аплет, демонстриращ разположението на нулите на полинома и неговата производна при различни стойности на n, е разработен от Bruce Torrence (2011) в рамките на Wolfram Demonstrations Project: “Sendov’s Conjecture” `http://demonstrations.wolfram.com/SendovsConjecture/` 21.02.2020 г. (бел. ред.)

Благовест Сендов и изчислителната математика в България. Когато става дума за изчислителната математика в България, то веднага асоциациите водят до името Бл. Сендов, защото за повечето хора, той "откри" бащата на съвременния компютър Джон Атанасов за българската общественост и популяризирайки приносите му в международен план, постави името на този американски учен с български произход до имената на Блез Паскал, Готфрид Лайбниц, Чарлз Бабедж и Джон фон Нойман. Дали на него за пръв път в България е минала мисълта, че светът навлиза в компютърната ера (а там изчислителната математика има привилегировано положение) или този, който ясно си е давал сметка за това, академик Любомир Илиев, търсейки специалист, способен да изгради този клон на математиката у нас, се е спрял на Сендов. Той едва е постъпил като асистент в катедрата по Алгебра през 1958 г., но това не пречи на Л. Илиев да предложи на Сендов да чете през учебната 1959/60 г., първата двугодишна специализация по Изчислителна математика към ръководената от него Катедра по висш анализ във Физико-математическия факултет на СУ. Очевидно акад. Л. Илиев е преценил добре и е направил удачен избор. Сендов се съгласява, подготвя и чете курс по Числени методи. Пак по предложение на Л. Илиев, Сендов е изпратен на стаж през 1960/61 г. в катедрата по Изчислителна математика в Мехмата на МГУ и по негови думи животът му коренно се е обърнал след този стаж. По това време в Мехмата на МГУ Сендов посещава лекциите по Числени методи на Березин и Жидков, семинара на Н. Бахвалов по Квадратурни формули и други известни специалисти по изчислителна математика, а посещава и курс по програмиране. В Москва Бл. Сендов програмира на руския компютър „Сетунь", който използва троична бройна система. След завръщането си в България той чете през летния семестър на 1961/62 г. лекции по програмиране. Без преувеличение може да се каже, че от слушателите на изброените курсове по-късно се формират бъдещите специалисти по изчислителна математика и информатика в България. Те са от първите кадри в създадения през 1961 г. Изчислителен център към Математическия институт на БАН, в отделилия се от него Централен институт по изчислителна техника (ЦИИТ), в създадения по-късно КЦИИТ на БАН, във ведомствените и в регионалните изчислителни центрове в България.

През 1962/63 г. Сендов участва активно като отговорник за софтуера в построяването на първия български компютър "Витоша", показан през 1963 г. на изложба в Москва.

По-късно животът на Сендов е тясно свързан с всичко, което има отношение към изчислителната математика у нас:

- 1963 г. – в ИМ с ИЦ е създадена секция Числени методи с ръководител Бл. Сендов, а ИЦ се превръща в изчислително звено на цялата Академия с наличието от есента на 1964 г. на компютъра „Минск-2";
- 1968/69 г. – в Математическия факултет е създадена Катедра по изчислителна математика с ръководител Бл. Сендов и специализацията Изчислителна математика вече се ръководи от тази катедра;
- 1970 г. – Любомир Илиев и Благовест Сендов създават Единния център за наука и подготовка на кадри по математика и механика (ЕЦНПКММ, по-късно ЕЦММ). Бл. Сендов е първият ръководител на сектор „Изследване на операциите" (от 1970 до 1978);

- 1973 г. – Сендов е ръководител на сектор „Математическо моделиране“, обединил секциите „Числени методи“ на ИМ с ИЦ и Катедрата по изчислителна математика на Факултета по математика.

От казаното дотук е ясно, че акад. Бл. Сендов е един от основоположниците на изчислителната математика в България във всичките нейни клонове – научна и административна организация, подбор и обучение на кадри, популяризиране на изчислителната математика. Участва активно в написването на учебни и популярни издания в тази област:

- 1963 г. – „Машини – помощници на човешкия ум“, С., Народна просвета;
- 1966 г. – „Електронни сметачни машини (с описание и инструкция за програмиране на „Минск-2“)“. С., Техника, в съавторство с Д. Богданов, П. Бърнев, В. Василев;
- 1972 г. – „Изчислителна математика – стара и нова“. С., Наука и изкуство;
- 1976 г. – съвместно с В. Попов, учебници по числени методи за студентите от ФМИ на СУ, които излизат през 1976 г. (I част) и 1978 г. (II част). През 1996 г. излиза преработено и допълнено издание на I част.

Бл. Сендов се е стремял постоянно да бъде в крак с новите тенденции в математиката, в частност теорията на апроксимациите и компютърните приложения. Може да се приеме, че изследванията му в последните години в областта на мултирезолюционния анализ, компресията на данни и обработката на образи също са част от съвременните клонове на изчислителната математика, а той има и резултати, които са свързани с класически проблеми на числените методи. Такъв е методът за приближено пресмятане на всички положителни нули на алгебричен полином с реални коефициенти (Изв. ВУЗ, Математика, 1974 г.), базиран на един забравен резултат на Поанкаре, определящ броя на положителните нули чрез броя на вариациите в редицата от коефициентите на един помощен полином.

Сендов – и какво оставя след себе си. Благовест Сендов трябва да е много горд с общественото признание, изразяващо се в редица награди –

- 1969 – Димитровска награда (заедно с акад. Р. Цанев);
- 1978, 1982 – ордени „Народна република България“ – първа степен;
- 1992 – орден „Стара планина“ – първа степен;
- 1995 – френския „Орден на академичните палми“;
- 2009 – японския „Орден на изгряващото слънце“;

и други отличия, но не по-малко може да се гордее със създадената от него българска школа в теорията на апроксимациите (не трябва да се пропускат и изчислителната математика, моделирането и други клонове на науката), която се радва на международно признание, както и създаването и грижата за плеяда свои ученици. Доказателствата за това твърдение са следните факти:

- Организирането в България на 13 международни конференции по теория на апроксимациите в периода 1970–2019 г. В тях са участвали почти всички водещи математици в областта от Европа, Азия и Америка;

- Бл. Сендов подготви десетки математици, които са били или в момента са лидери в областта си както у нас, така и в редица университети в Европа и Америка. Негови докторанти са били: Васил Попов, Васил Веселинов, Тодор Боянов, Борислав Боянов, Светослав Марков, Спас Ташев, Георги Илиев, Панайот Василевски, Таня Костова, Христо Джиджев, Милко Такев;
- Неговият първи ученик, съавтор и близък приятел, Васил Попов, беше определен от известния в Теорията на апроксимациите американски математик D. Newman с думите *"a brilliant young Bulgarian mathematician"*, след като В. Попов откри напълно нов подход и намери скоростта на сходимост при приближаване с рационални функции. През 1995 г. в САЩ се учредява награда на името на Васил Попов, която се дава на всеки 3 години на млади учени в областта на апроксимациите. Досега тя е била присъждана на: 1995 – Albert Cohen (Sorbonne Université), 1998 – Arno Kuijlaars (KU Leuven), 2001 – Emmanuel Candes (Stanford), 2004 – Serguei Denissov (Wisconsin-Madison), 2007 – Mauro Maggioni (Duke), 2010 - Joel A. Tropp (Caltech), 2013 – Andriy Bondarenko (National Taras Shevchenko University of Kyiv), 2016 – Jean-Marie Mirebeau (Université Paris Saclay).

Духът на световноизвестния учен акад. Благовест Сендов, уважаван за таланта си и готовността си винаги да помогне на колегите и приятелите си, а често пъти и на непознати хора, има запазено място в храма на Българската наука. В този храм не се влиза с покровителство и протекция, изявеният талант в дадена област на науката е необходимо условие, но достатъчното условие е наличието на човешки добродетели и обществена ангажираност за доброто на България. Става дума за храма на Българската наука, става дума за човеколюбие и съпричастност към хората.

Петър Кендеров
e-mails: kenderovp@cc.bas.bg, vorednek@gmail.com
Андрей Андреев
e-mail: aandreev@math.bas.bg
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България

APPENDIX

A GLANCE AT THE BEST RESULTS OF BLAGOVEST SENDOV AND HRISTO SENDOV

Hristo Sendov

Our collaboration started in the Winter of 2012 and was in the area known as Geometric Theory of Polynomials. In this note, we give a brief overview of some of our dearest results. Let us begin with several definitions. A point $\zeta \in \mathcal{C}$ is called *critical* for the complex polynomial $p(z)$ if $p'(\zeta) = 0$.

Definition 1. A domain Θ_n is called a *Rolle's domain*, if every complex polynomial p of degree n, satisfying $p(i) = p(-i)$, has at least one critical point in it. A Rolle's domain Θ_n^X is *stronger* than the Rolle's domain Θ_n^Y, if $\Theta_n^X \subsetneqq \Theta_n^Y$. A Rolle's domain Θ_n^X is *sharp* if Θ_n^X is minimal with respect to inclusion.

A result asserting that Θ_n is a Rolle's domain is called a *Rolle's Theorem*. There are several known Rolle's Theorems for complex polynomials. The most famous one are the following.

Theorem 2 (Grace-Heawood, 1902–1907)**.** *Let $p(z)$ be a polynomial of degree $n \geq 2$ satisfying $p(i) = p(-i)$. The disk*

$$\Theta_n^{GH} := D[0; \cot(\pi/n)] \tag{1}$$

is a Rolle's domain.

Theorem 3 (Fekete, 1925)**.** *Let $p(z)$ be a polynomial of degree $n \geq 3$, satisfying $p(i) = p(-i)$. The double disk $\Theta_n^F := D[-c; r] \cup D[c; r]$, where*

$$c = \cot(\pi/(n-1)), \quad r = 1/\sin(\pi/(n-1))$$

is a Rolle's domain.

Neither one of the above two domains is stronger than the other when $n \geq 5$. The results in Theorem 2 and 3 have not been improved essentially in almost a hundred years. Our first main result produces a domain that is stronger than both of them.

Theorem 4 (Sendov-Sendov, 2018)**.** *Let $p(z)$ be a polynomial of degree $n \geq 3$, satisfying $p(i) = p(-i)$.*

(a) *If $n = 3$, then $\Theta_3^{GH} = D[0; 1/\sqrt{3}]$ is a sharp Rolle's domain.*

(b) *If $n = 4$, then $\Theta_4^{SS} := D[-1/3; 2/3] \cup D[1/3; 2/3]$ is a sharp Rolle's domain.*

(c) *If $n \geq 5$, then $\Theta_n^{SS} := D[-c; r] \cup D[c; r]$, where*

$$c = \cot(2\pi/n), \quad r = 1/\sin(2\pi/n) \tag{2}$$

is a Rolle's domain.

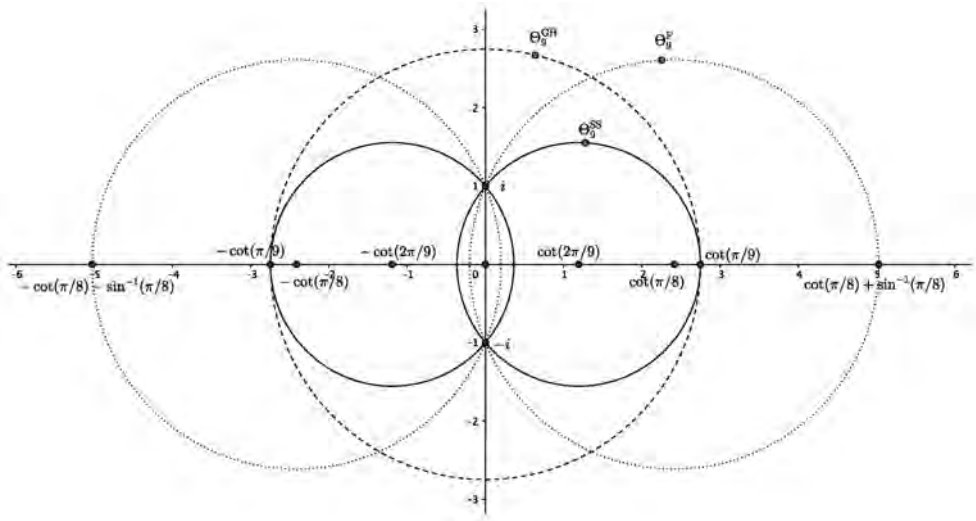


Fig. 1. The Rolle's domains $\Theta_{12}^{GH}, \Theta_{12}^{F}$, and Θ_{12}^{SS}

The novelty, in the case $n = 3$ is the sharpness. When $n = 4$, we not only have $\Theta_4^{SS} \subset \Theta_4^{GH} \subset \Theta_4^{F}$, but also that the domain Θ_4^{SS} is sharp. Finally, when $n \geq 5$, we have $\Theta_n^{SS} \subset \Theta_n^{GH} \cap \Theta_n^{F}$ as illustrated in Figure for the case $n = 9$.

In Figure 1, the Rolle's domain Θ_9^{GH} is the area bounded by the dashed circle; Θ_9^{F} is the area bounded by the two dotted circles; and Θ_9^{SS} is the area bounded by the two solid circles.

It is important to notice that when one substitutes n with 3 or 4 in formula (2) one does not obtain the domains in parts (a) and (b) in Theorem 4. This shows that parts (a), (b), and (c) belong to "different families". Further investigations rectified this deficiency.

Theorem 5 (Sendov-Sendov, 2019)**.** *Let $p(z)$ be a polynomial of degree $n \geq 3$, satisfying $p(i) = p(-i)$. Then, $\Theta_n^* := D[-c'; \rho] \cup D[c'; \rho]$, with*

$$c' := \frac{\cot(\pi/n)\cos(\tau(\kappa_n))}{2\cos^2(\tau(\kappa_n)/2)} \quad \textit{and} \quad \rho := \frac{\cot(\pi/n)}{2\cos^2(\tau(\kappa_n)/2)} \tag{3}$$

is the smallest Rolle's domain made up of two disks that is symmetric with respect to the coordinate axes. In the formula

$$\tau(\kappa_n) := 2\arctan(t_{n-1,1} \cdot \tan(\pi/n)),$$

where $t_{n-1,1}$ is the unique positive zero of the polynomial

$$f_{n-1,1}(t) := (t+1)^{n-1}(t(n+1) - (n-1)) - (t-1)^{n-1}(t(n+1) + (n-1)).$$

The next table lists the first several values of $t_{n-1,1}, c'$, and ρ.

n	$t_{n-1,1}$	c'	ρ
3	$1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$
4	$1/\sqrt{3}$	1/3	2/3
5	$1/\sqrt{\sqrt{5}}$	0.2763932024	0.8506508084

The table shows that $\Theta_3^* = \Theta_3^{GH}$, $\Theta_4^* = \Theta_4^{SS}$, and we know from Theorem 4 that these are sharp Rolle's domains. Moreover, for any $n \geq 5$, we have $\Theta_n^* \subset \Theta_n^{SS}$. Theorem 5 improves on Theorem 4 by placing the three cases of the latter into one family, producing a smaller Rolle's domain, but also stating that one cannot do better using only two disks symmetric with respect to the axes. The trade off is that Theorem 4 is easier to apply.

The road to Theorems 4 and 5 was long and sinuous. We worked hard for six years to reach them. On the way we started the development of the theory of loci of complex polynomials and as a by-product we obtained the following non-convex analogue of the classical Gauss-Lucas theorem—the first of its kind, so far, to our knowledge.

Theorem 6 (Gauss-Lucas, 1879)**.** *The critical points of a complex polynomial are contained in the convex hull of its zeros.*

For any $\phi \in [0, 2\pi]$, define the sector

$$S(\phi) := \{te^{i\psi} : \psi \in [0, \phi], t \geq 0\}.$$

Let $P_n(\phi)$ be the set of all polynomials of degree n, i.e. $a_n \neq 0$,

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

with coefficients in the sector $S(\phi)$ and zeros not in the interior of $S(\phi)$.

Theorem 7 (Sendov-Sendov, 2020)**.** *If $p(z) \in P_n(\phi)$, then $p'(z) \in P_{n-1}(\phi)$.*

The theorem is trivial when $\phi \in [\pi, 2\pi]$ since then it is a direct consequence of the Gauss-Lucas theorem. For $\phi \in [0, \pi)$ the theorem makes a statement about the location of the critical points in a non-convex domain. Surprisingly, one can show that in fact Theorem 7 is stronger than the Gauss-Lucas theorem, meaning that the latter is a corollary of the former.

In the bibliography, we give a complete list of our publications. The results presented here are from [7], [10], and [12]. The authors are in alphabetical order.

REFERENCES

[1] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Extension of apolarity and Grace theorem. *Math. Balkanica (N.S.)*, **27**, *1–2* (2013), 77–87.

[2] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Loci of complex polynomials, part I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **366**, *10* (2014), 5155–5184.

[3] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Loci of complex polynomials, part II: polar derivatives. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **159**, *2* (2015), 253–273.

[4] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Two Walsh-type theorems for the solutions of multi-affine symmetric polynomials. In: Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis: In Memory of Q. I. Rahman, (Eds N. Govil, R. Mohapatra, M. Qazi, G. Schmeisser) Springer Optim. Appl., vol. **117**, (2017), 145–162.

[5] Bl. Sendov, H. S. Sendov. On the zeros and critical points of polynomials with non-negative coefficients: a non-convex analogue of the Gauss-Lucas theorem. *Constr. Approx.*, **46**, *2* (2017), 305–317.

[6] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Separation of the critical points of a polynomial. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **70**, *5* (2017), 607–610.

[7] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Stronger Rolle's theorem for complex polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **146**, *8* (2018), 3367–3380.

[8] Bl. Sendov, H. S. Sendov, Ch. Wang Polar convexity and critical points of polynomials. *J. Convex Anal.*, **26**, *2* (2019), 635–660.

[9] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Duality between loci of complex polynomials and the zeros of polar derivatives. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **167**, *1* (2019), 65–87.
[10] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Further strengthening of Rolle's theorem for complex polynomials. *Constructive Approximation*, (2019), 16 pp, https://doi.org/10.1007/s00365-019-09483-0.
[11] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Sets in the complex plane mapped into convex ones by Möbius transformations, *J. Convex Anal.*, **27**, *3* (2020), 19 pp.
[12] Bl. Sendov, H. S. Sendov. Sector analogue of the Gauss-Lucas theorem. To appear in *Canad. J. Math.*, (2020), 20 pp, https://doi.org/10.4153/S0008414X19000609

Hristo Sendov
Department of Statistical and Actuarial Sciences
Western University
1151 Richmond Str.
London, ON, N6A 5B7 Canada
e-mail: hssendov@stats.uwo.ca

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

В ПАМЕТ НА ЧАВДАР ЛОЗАНОВ (1946 – 2020)

Иван Тонов



На 7 февруари 2020 г. ни напусна доц. д-р Чавдар Георгиев Лозанов.

Той е роден на 19 май 1946 г. в София. Завършва Английската гимназия през 1965 г. и същата година постъпва в Математическия факултет на Софийския университет. През 1973 г. става аспирант (докторант) в Единния център по математика и механика, където успешно защитава дисертация на тема „Арки в крайни проективни равнини“ и получава степента *кандидат на математическите науки* (доктор). През 1986 г. се хабилитира във ФМИ.

Интересите на доц. Лозанов към геометрията са провокирани от базисните курсове по геометрия на акад. Б. Петканчин, като доц. Лозанов е първият български математик, който проявява интерес към изучаване на крайните проективни равнини. В тази област той постига значителни резултати, обобщавайки работи на Сегре, Хол, Барлоти и др.

През всичките тези години чете основни курсове по геометрия във Факултета, както и в някои други университети в България.

През 1974–1985 г. е преподавател по математика в Националната математическа гимназия и негови ученици са печелили златни и сребърни медали на международни олимпиади. Многократно е член на жури на национални и международни състезания по математика, ръководил е националните отбори по математика за участие в международни олимпиади, автор е на редици задачи, статии, учебници, помагала по математика. През 1993–2001 г. е председател на Управителния съвет на Съюза на математиците в България, като още от 1980 г. несменяемо е член на ръководствата на този съюз. Участва в редица национални и международни научни проекти. През 2005–2008 г. е координатор на международния проект „Мултимедийни технологии в математиката и компютърните науки“.

Доц. Лозанов е ръководител на катедрата по геометрия към ФМИ – СУ 12 години. От 1991 г. до 2011 г. е главен редактор на научно-методическото списание „Обучението по математика и информатика“, преименувано през 1994 г. в „Математика и информатика“. В списанието той полага усилия за създаване на обстановка, благоприятстваща успешната творческа работа на учителите.

Със своята всеотдайност, ерудиция и обществена ангажираност, доц. Лозанов оставя светъл пример на колегите, които са имали шанса да контактуват и да обсъждат с него важни въпроси на образованието и науката.

Иван Тонов
Факултет по математика и информатика
Софийски университет „Св. Кл. Охридски“
бул. „Джеймс Баучър“ № 5
1164, София, България
e-mail: tonov@fmi.uni-sofia.bg

ЮБИЛЕИ

ANNIVERSARIES

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

IT IS NOT ABOUT "BRAIN DRAIN", IT IS ABOUT "BRAIN GAIN" – 20 YEARS HIGH SCHOOL INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

Evgenia Sendova, Albena Vassileva, Emil Kolev

The authors present the 20-year history of the *High School Student Institute of Mathematics and Informatics* (HSSI) by discussing three main events being organized in its frames – the *Winter HSSI Conference*, the *HSSI Section of the Spring Conference of UBM* and the Summer *Research School of HSSI*. A special attention is payed to a "sister-program of HSSI" – the Research Science Institute (RSI), organized jointly by CEE and MIT (US), and the selection procedure according to which two Bulgarian students get the right to attend RSI. The arguments in favor of the title are strengthened by HSSI and RSI alumni who have been achieving a great international recognition for their research in the years and have been mentoring the next generations of HSSI students (both from a distance, and face-to-face – in Bulgaria).

1. Introduction. It is often the case for us, people who have the chance of working with young talents in the field of science, to hear reproaches that we are contributing to the "brain drain". Probably it is our fault – we do not explain clearly enough and often enough that our activities are not about "brain drain" but rather about "brain gain" [1, 2]. Our best argument is that in all our "giftedness-related activities" we help young people not only in their scientific development but also in rising their awareness that to be useful citizens to their country they should give their best wherever they are.

It is with joy and satisfaction that we observe the effect of "brain gain" among several generations of alumni of the *High School Student Institute of Mathematics and Informatics* (HSSI, `http://www.math.bas.bg/hssi/`) whose 20th anniversary we are celebrating this year.

2. HSSI – a brief history. The *High School Student Institute of Mathematics and Informatics* was founded in 2000 by the *Union of Bulgarian Mathematicians* (UBM), *Evrika Foundation,* the *St. Cyril and St. Methodius International Foundation*, and the *Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences* (IMI–BAS) in response to the decision of UNESCO to declare that year as "World Year of Mathematics". In 2005, the *American Foundation for Bulgaria* joined the founders, and since 2011 *America for Bulgaria Foundation* has been the main sponsor of the HSSI activities. The name "Institute" reflects the endeavor to have an organization that functions like a research organization and according to the principles of scientific life [3]. The HSSI has inherited the good traditions of an earlier movement of the technically creative youth in Bulgaria [4] and has implemented a number of activities carried out in the frames

of the international summer program *Research Science Institute* (RSI, cee.org/rsi) organized jointly by two American institutions: the *Center of Excellence in Education* (CEE) and the *Massachusetts Institute of Technology* (MIT). While the RSI program covers all the STEM fields, the HSSI focuses on projects in mathematics, informatics and information technologies (IT) [5–8]. The participants in HSSI are high school students between 8th and 12th grade (mainly from specialized Science and Mathematics Secondary Schools in the country) who have demonstrated their motivation and potential to do scientific research.

An important component of the favorable local conditions is the environment provided by IMI–BAS in terms of technical and human resources. Many researchers at the Institute devote much of their free time to keep the level of extra-curricular work with talented students at a significantly high level. Their work supports and enables HSSI to assist the intellectual and professional growth of the motivated high school students.

Every participant in HSSI works on a long-term project (on a freely chosen topic) in mathematics, informatics and/or IT under the guidance of a teacher or an expert in the respective field. A written presentation of the project is sent to HSSI to be reviewed by professional researchers. The best research projects are accepted for a presentation at the conference sessions of HSSI.

3. The HSSI events. In the course of a one school year, HSSI organizes three main events – two conference sessions and a research summer school. Let us throw a glance on these events and their development through the years.

3.1. The HSSI Winter Conference. Every year (since the year 2000), in January, about 100 people – students, teachers, researchers, members of the Jury and representatives of the mass media get together to mark the first annual event of HSSI– its Winter Conference.

For many students this is the first real obstacle and initial test for achieving their desires and dreams of young researchers. They expect with enthusiasm and impatience to present their work in front of an appreciative larger audience of teachers and peers, and to be judged by a Jury of professional scientists. The topics vary from discussing basic mathematical facts from an individual perspective through interesting topics arising from Olympiad competitions to unsolved scientific problems. The topics are split in two separate streams: mathematics and informatics/IT. Each student has about 15 min (presenting on a big screen, on a white board or on a poster) to convince the jury in the merit of their project and answer the remarks and the specific questions of the reviewers. The presentation skills are essential for persuading the audience in the importance of the topic and the significance of the results achieved by the student. In many instances the authors demonstrate that they have acquired in depth complex mathematics and informatics notions, and have achieved original results and proofs. The discussions after the presentation are an additional option for the Jury to test the knowledge of the students and their ability to answer more difficult questions. At the end of each presentation the author gets advice about possible ways to improve the project and about other interesting problems related to it. Moments of the conferences in the recent years are presented in Fig. 1.

Based on the merits of the paper and presentation, the Jury judges the works and selects the best ones. Their authors get a medal, a *Certificate for excellent performance* as



Fig. 1. Moments from the presentations in the mathematics branch and in the informatics poster session of the Winter conferences in the recent years

well as an invitation to take part in the traditional interview for selecting two Bulgarian participants in the international RSI program, and to attend the *Student Section of the Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians.*

3.2. The HSSI Section of the Spring Conference of UBM. This event of HSSI takes part during the traditional conference of UBM in April, which is unique for Bulgaria since it brings together teachers, scientists, educators and high school students, allowing vast networking opportunities for participants of different background. Similarly to the previous event, the HSSI Section allows high school students to present their research projects in the fields of mathematics, informatics and hardware engineering in front of jury and peers (either on poster, or with a fifteen minute presentation), this time usually with noticeable development of their research presented at the Winter conference. The authors of the best projects from the HSSI Section are invited as a reward to participate for free in a three-week *Summer Research School* (SRS).

As far as the educators and teachers are concerned, the conference is focused on the important aspects of the modern STEM education and the Inquiry Based Learning (IBL) at its highest levels – the *guided inquiry* and the *open inquiry* [9–11].

3.3. The Summer Research School of HSSI. As mentioned above, this 3-week summer school is for high achieving teenagers, with a pronounced interest in the fields of mathematics, informatics and IT. It combines the best practices from leading programs



Fig. 2. At the poster session of the HSSI section of the 48^{th} Spring Conference of UBM



Fig. 3. Presentation of short-term projects and discussions at SRS (in Uzana – the first row, and in Blagoevgrad)

for high school students in the STEM fields (such as RSI) with the unique opportunities of a dynamic small-scale learning environment. The students work with scientific mentors, traditionally stemming from the Bulgarian Academy of Sciences and guests from international research universities in the fields of mathematics and informatics. Each student focuses on a personal research topic, coming from challenging but viable fields such as Combinatorics, Number Theory, Computing, Modeling and others. The program includes lectures on advanced scientific problems and modern technologies, meetings with representatives of the industry and different academic institutions, soft skills training and discussions on important issues such as ethics in science, responsible research and innovation.

During the first two weeks, lectures and practical courses are delivered to the students, the main goal being to extend their knowledge in topics related to their interests and to offer new problems, potentially the core of short-term projects. During the third week the participants present the results of their short-term projects and exchange ideas for further studies (Fig. 3).

To help teachers improve their mentoring skills, a High School Teachers Workshop is organized during the third week of SRS. Participants are the research advisors of the students' projects, presented at the conference HSSI sessions during the school year.

Since 2015 the SRS enjoys an international component. That year three math profes-



Fig. 4. Kaloyan Slavov and Dimitar Jetchev (above) and Christopher Skinner lecturing to the SRS'15 students

sors came from abroad to deliver lectures – **Christopher Skinner** - Princeton University, **Dimitar Jetchev** – Ecole Polytechnique de Laussanne, EPFL, Switzerland, and **Kaloyan Slavov** – Department of Mathematics at ETH Zürich (Fig. 4). Their lectures covered a large spectrum of modern mathematics – from Kakeya sets to cryptography, game theory and the concept of Nash equilibrium. Since 2016 international students from several continents are attending SRS.

3.4. The interview for RSI – entering a community of researchers. It is at the HSSI Winter Conference that a Jury of professionals selects about 15 projects among 60–80 being preliminary reviewed, admitted and presented to a larger audience of stu-



Fig. 5. Demonstrating various talents to the jury – the Interviews for RSI'19 and RSI'20

dents and teachers, and then invites their authors for an interview at IMI–BAS where they answer questions related to both their academic background and general culture. Furthermore, the students have to demonstrate fluency in English, some talents/hobbies in other fields (singing, dancing, poetry, fine arts, sports, music, etc.), and social skills, e.g. to teach a member of the jury to imitate their talent (Fig. 5).

The Jury includes researchers from IMI-BAS, other research institutions, representatives from *St. Cyril and St. Methodius International Foundation*, *America for Bulgaria Foundation*, and very importantly – RSI alumni. In an attempt to convey the atmosphere during the interviews, let us give you an example of a typical conversation between members of the Jury and the students [12]: *Quote a fundamental theorem proved in the last 50 years which is not the Fermat's Great Theorem.* The student being interviewed formulated (with no hesitation) a result presented by two of his HSSI peers, also applying for RSI. Another memorable answer was given to the question: *What is the next line in the monolog "To be, or not to be, that is the question".* The student immediately responded: *The question is not "To be, or not to be", the question is "What to be"...*

The Jury smiled at the ambitions of another participant who expressed his regrets that Grigori Perelman has already turned the Poincaré conjecture into a theorem and thus has solved a problem which was both among *Hilbert problems* and the *Millennium problems* – something that deprived our hero of achieving the same...

Often it is thanks to the questions of the RSI alumni that the candidates realize that to participate in RSI is not only a great honor but a challenge and a responsibility to pass to the rest what they have learned. Finally, the two representatives are chosen based on their overall performance – the work on a project, the presentation skills, the achievements in mathematics and informatics events, the interview, and last, but not least – on the votes of the rest of the candidates (who have to name the most worthy to attend RSI, besides themselves).

As for the rest, they get the confidence of joining a family of researchers (acting not only on the territory of the Academy but also in modern IT startups) (Fig. 6).



Fig. 6. "You are already part of our community!" – concluding words of the President of UBM Prof. DSc Nikolai Nikolov

4. The Research Science Institute (RSI) – an international program with traditions to follow. The RSI was developed by the Center of Excellence in Education, a non-profit educational foundation in McLean, Virginia. The Center was founded by the late Admiral Rickover and Joann DiGennaro in 1983, with the express purpose of nurturing young scholars to careers of excellence and leadership in science, mathematics, and technology. Central to CEE is the principle that talent in science and math fulfills its promise when it is nurtured from an early age. The RSI program lasts six weeks and is attended by approximately 80 high-school students from US and other nations including Australia, Bulgaria, China, France, Germany, Greece, Hungary, India, Israel, Lebanon, Poland, Saudi Arabia, Singapore, South Korea, Sweden, Switzerland, Spain, Turkey, UK. Once selected, the students go to MIT and work on a research project under the guidance of faculty, post-docs, and graduate students at MIT, Harvard, Boston University, and other research institutions from Boston-area. All the students chosen for the RSI have not only acquired a deep interest in mathematics, informatics and natural sciences but have also demonstrated a great potential for doing research in these fields. The Institute begins with four days of formal classes. Professors of mathematics, biology, chemistry and physics give lectures on important aspects of their field and their own research. The students also attend evening lectures delivered by eminent researchers including Nobel Prize winners. The internships that follow the first week classes comprise the main component of the RSI. Students work in their mentors' research laboratories for 5 weeks. At the end of the internship they present a paper on their research and give an oral presentation in front of a Jury of STEM experts and a larger audience at the RSI Symposium.

For this to be an orderly and seamless intellectual process, it is best to characterize the RSI research paper as a *progress report for a continuing research effort*. Especially important in the process of preparation are the milestones – steps of the process. Typical milestones for the written presentation are: writing about a mini-project using the same sample as the one for the final paper; gradually filing the proposed sample starting with the background of the project, the literature studied and the methods used; considering partial cases and possible generalizations; classifying the cases of failure, etc. Possible milestones for the oral presentation are: speaking for 3 min on a freely chosen topic, presenting the introductory part of the project for 5 min, presenting at a *posterless* session (holding only a sheet with the title of your project) (Fig. 7).

All the milestones are accompanied by a feedback from the tutors who work closely with the students – they read and critique the draft papers, provide editorial remarks, suggest avenues of research and areas of additional background reading, give ideas for improvement of the oral presentations, etc. In general, tutors are the psychological oil if the students experience problems and lack of self-confidence.

Here is what **Dr. Mark Saul, Director of RSI for more than 10 years**, shares about the metamorphosis the RSI students undergo during the program:

For most students, participation in RSI is a highlight of their young lives. They get to participate in a working laboratory, sometimes doing significant work, and sometimes even getting published. They are integrated into the life of the laboratory, bonding with the graduate students and other co-workers. They are often invited to dinner or other social occasions, sometimes even overnight retreats. The mental discipline they must command is considerable.



Fig. 7. Life in RSI – math breakfasts with RSI alumni, warming up tutor sessions, *posterless* presentations, mentorship at Media Lab, an "encore" math presentation, reporting back to HSSI

In only 4 or 5 weeks, they are expected to complete a piece of a project, write a short paper, and give a brief talk. They undergo in miniature the research cycle of a productive scientific laboratory.

And they typically rise to the occasion, often surpassing the expectations of mentors

who have not experience RSI before. I myself have worked with some of the world's most gifted students, and these are certainly among them. However rich this intellectual experience may be, ***the most valuable aspect of RSI, the one that will form the students' identities and make the deepest impression, is the social experience****. Students' most valuable asset in the program is each other's company. They learn from each other, unwind with each other, and find intellectual peers that they may never otherwise find. Lifelong relationships are forged, and the name "Rickoid" becomes part of their identity. I frequently meet Rickoids decades after I worked with them, and the first they we talk about is memories of RSI.*

I can give one vignette, one picture of RSI, that I saw over and over. The students arrive on campus, typically, not knowing anyone else. They have been the most important, the most advanced, the most valued student in their home schools. So they are accustomed to being impressive, being admired, being identified as nerds. That first day, at the first social meeting in a lounge, they typically try to play the role of 'impressive nerd'. And quickly find that it won't work, that whatever achievement they talk about has been surpassed by someone else in the room. They are among intellectual peers, often for the first time.

And the identity of 'nerd', often a defense against the social stigma of being 'a brain', quickly falls away. Their rough edges get rubbed off, one against the other, and the personality, the emotional core of their being, shines through. I've seen it year after year. It is as if they are shedding a heavy burden, or removing an iron mask. And the rest of the summer is spent in a community of peers, of young people who understand and support each other on the deepest emotional level. It is this experience that I see as the most valuable in RSI, an experience that will last them their entire lives.

5. Bulgarian performance of HSSI students at RSI and other international forums. The Director of CEE, **Ms. Joann DiGennaro**, expressed her satisfaction with the Bulgarian participants at RSI, as follows:

The national significance of having Bulgarian students at RSI can be measured by the visibility provided by CEE to the international community about the strong academics of Bulgaria. The camaraderie of high ability students from Bulgaria with other tremendously high achieving students from other nations, and ***the fine achievement of your students in U.S. academics, is a source of pride to your nation.***

These words are well justified by the traditional high scientific performance of the Bulgarian RSI students including getting the recognition of the "top five" in all fields for RSI'01, '03, '04, '08, '09, '11, '12, '13, '14, '16, '18 and '19, which means – the best written/oral presentations in their respective fields.

Furthermore, the HSSI students show the strength of the Bulgarian academic school for working with young researchers at many other international forums, e.g. **ISEF**'13, '14, '15, '16, '17, '18, 19; **EUCYS**'14, '16, '17, '18, '19 (Fig. 8). It is worth mentioning that there are asteroids with the names of **Rumen Dangovski** and **Petar Gaydarov** for their achievements at ISEF'14 and ISEF'15, respectively.

Many of the HSSI alumni have publications in professional journals (sometimes in co-authorship with colleagues from BAS); deliver invitational talks at prestigious universities in the world (including at conferences and seminars, organized by IMI–BAS), and most importantly – mentor the next generations of HSSI – both in Bulgaria and from a distance. Let us hear them.



Fig. 8. Preparations and achievements at ISEF/EUSYS

6. What the HSSI alumni share. ***Stanislav Harizanov (RSI 2000, Assoc. Professor at the IICT& IMI–BAS):*** *My participation in RSI 2000 was a turning point in my life. For a first time I faced a problem which I was not expected to solve for four and a half hours. The experience was very different and somehow – more real... The unique atmosphere during the 6 weeks convinced me ultimately that my future is linked to the Academy. I was detached for a long time from the magic of HSSI, but during the last 4–5 years I got back on track and* ***with joy, pride and satisfaction I can boast with a whole soccer team of young, clever and enthusiastic members of HSSI with whom we work successfully*** *on more theoretical as well as on more practical problems.*

Kaloyan Slavov (RSI'01, postdoc in ETH Zurich, Switzerland): *Along with HSSI, I am also celebrating 20 years – since the first time I had the chance to engage in mathematical research. It was back then that I developed my intellectual curiosity for mathematics. I would write down a statement, put a question mark at the end, and ask myself: is this true or false? Then my investigatory spirit kicks in: What would be the reason for this statement to hold? Can I add some assumptions under which I can actually prove it? Are all of these assumptions necessary? Can I relate it to some other, familiar statement? What would this statement imply, if true? These are some of the questions I have been asking myself in the last 20 years. Learning to pose questions to myself was the first step in my training as a mathematical researcher. Giving even a little bit of an answer can be so rewarding that research has become an addiction for me. A good one. Of course, sometimes the questions get hard and one could get discouraged.*

But then I remind myself of my experiences already as a high school student – come on, I was able to answer research questions that I was curious about back then, why not now as well, given my additional training and experience? ***Mathematical research has been the source for my intellectual satisfaction since my first participation at HSSI and until now****. I am grateful to HSSI for the push it gave me so that my professional life can take this most rewarding direction.*

Konstantin Delchev (HSSI'01, Director of an Intel ISEF affiliated fair): *What did HSSI give me? Basically, it taught me how to do research in the fields of mathematics and informatics. The change from the schoolboy mentality, where you have to solve the problems on the blackboard (or else), to the scientist mentality, where you have a problem that you investigate and no one knows what will happen. To a large extent, this is what pushed me towards a scientific career. What is my motivation to work with students?* ***A lot was invested into me, in terms of time and efforts, from people who were capable and experienced scientists in their respective fields****. They had decided to detract time from their own to work with us. After I graduated, I decided I should return the favor and in turn start helping students****. I still feel I have much to learn from the ways I was taught, but the success of my own students indicates that I might be doing some things right, after all...*** *The hardest part of working with students is actually the beginning – the research topic. Too challenging research topic means no results and tons of frustration. A low hanging fruit means no meaningful results and nothing learned. And it is not like you can always figure out the difficulty of an open problem in advance.*

Todor Bilarev (HSSI, RSI'06) *By participating as a student at the summer schools and conferences organized by HSSI, and subsequently RSI, I discovered the beauty of doing research in Mathematics, something that I do ever since. So, definitely, being a part of the Institute as a student shaped my future even as a professional – I recently finished my PhD in Mathematics and continue doing research.* ***Now, as a more experienced mathematician and being back in Bulgaria, I am happy and feel privileged to be around the very talented young generation*** *and to contribute to the success of the Institute by taking part in RSI interviews and hopefully as a mentor in some of the future summer schools.*

Katerina Velcheva (***HSSI and RSI'10, PhD from Stanford****): From my entire experience in doing research, I think that what matters the most is to not give up and to not hope! Sometimes the results come slowly but it is worth pursuing them. There is no greater euphoria than proving something you have been struggling with for months. Sometimes, it is better to leave the problem for a day or two (even for a semester) and go back to it from a new perspective...* ***To be a mentor is an activity in which at the beginning one expects to give only and not to receive anything in return. The truth is that there is no greater reward than seeing the euphoria of your mentees when they learn and discover something new*** *or solve a problem which has taken them a significant amount of time. As someone who has been a passionate competitor in mathematics and informatics as well as author of research projects, I thought that the greatest joy is to solve a challenging problem. While guiding two high school students from my native town, I understood I have been wrong – to witness their happiness after they have achieved reportable results, made me even more proud...*

Todor Markov (RSI'11) *– the HSSI was my first encounter with longer-term,*

bigger projects, instead of small self-contained problems – the kind that actually appear in life. RSI was my introduction into more formal, structured research. ***But it (and later my studying in the US) also allowed me to meet new people, experience a different culture, and see new perspectives towards problem solving, social issues, and everyday life. I always intended to remain in Bulgaria where my family is, and I think it's a good place to live in*** *- sure there are problems, but that's true everywhere.*

Kalina Petrova (HSSI, RSI'12, PhD student in theoretical computer science at ETH Zurich): *HSSI has played a great role in my learning how to write scientific text, how to present my achievements and how to speak in public. The conferences and the summer schools have given me the kind of scientific interest that drives me to explore every unfamiliar concept and to delve into every unconventional idea I get... Working on a real piece of software at RSI definitely had its challenges and it helped me develop my thinking a lot... In my high school years I had the opportunity to (try to) conduct scientific research, both on my own and with the help of others. There are many people that have contributed to the person I am right now.* ***I would like to help other people from my country develop their full potential and make the most of their high school experience****.*

Rumen Dangovski (HSSI, RSI'13, EECS PhD student at MIT): *By attending the Summer Research School (SRS) of the Bulgarian High School Student Institute of Mathematics and Informatics, I learned to actively engage in research with my peers and professors. To ask about others' work, engage in conversation, brainstorm and collaborate are the most useful skills from SRS that I carry with me during my research at graduate level.* ***After graduating from high school, I have been working with students in Bulgaria to find opportunities for collaboration and help them*** *represent Bulgaria's stellar research environment around the world.*

Yani Pehova – (HSSI, a PhD student at the University of Warwick, UK): *With a passion for mathematics, I naturally went to several HSSI summer schools and conferences. Looking back at the work I did and the friends I made, it's safe to say that HSSI cultivated me as a mathematician and raised me as a human being. It did its job pretty well too, what came in was a 15-year-old girl and what came out was a Cambridge offer-holder... Being a supervisor for HSSI has been one of the most rewarding things I have ever done. As a mathematician, I was more or less raised by the conferences and summer schools during which HSSI set me on an academic track and this is something I'm surely grateful for.* ***So as a supervisor, I both got to experience the atmosphere of these conferences one more time, and had the opportunity to express my gratitude towards the people who helped me keep my interest in mathematics alive...***

In her electronic student post *Keep in Touch* from 2014 [13] Yani Pehova made a statement which inspired the title of our paper:

People in Bulgaria say that each year more and more brains are draining out of the country as more European countries are opening their borders, hearts and universities for Bulgarian students. They are mostly correct and obviously disappointed, a bit irritated too, but they often fail to notice that ***very few of us forget where we came from...*** *[...] Some of the best young mathematicians of Bulgaria may be scattered around the world, each one of them doing their own thing and going home only for holidays.* ***But***

no matter where we are, a lot of us find a way to say thank you and stay in touch with the HSSI.

As many of the researcher have experienced, teaching is very valuable to their research. This is also seen from the thoughts of the young researchers and mentors quoted above. By mentoring and guiding the next generations of young minds they also pass the awareness that *approaching the work with genuine interest in research and discovery rather than winning competitions is far more valuable in the long-term* [14].

7. Conclusion. We are aware that *the education is one of the most important applications of science* – words of **Acad. Petar Kenderov**, one of the founders of the Bulgarian school for working with young talents in mathematics and informatics. It is in the same spirit that Stefan Dodunekov (the late President of the Union of the Bulgarian Mathematicians and President of the Bulgarian Academy of Sciences) talked on a previous celebration of HSSI:

Acad. Stefan Dodunekov: *Even if HSSI would be the only thing left after us, as educators, I would be endlessly happy. I feel very proud for having the chance to be able to contribute to the founding of this Institute. Nurturing and stimulating young talents as well as the development of mentoring skills of the mathematics and informatics teachers are extremely important.*

The programs and forums, discussed above, give a new glance towards the relationship of the high school students and science – *not to learn about it, but to do it*!

What happens in HSSI is a genuine example of inquiry based learning where the students are "discovering" the knowledge themselves by searching the existing classical literature and Internet resources, by combining in an original way known facts and, not rarely, obtaining new results about the studied topic. The teachers (mentors in our case) help the students develop the necessary research skills (analytical thinking, formulation of conjectures, experimental check of the conjectures etc.) and guide the overall process of work.

In fact, our duty (as a small part of the people working in gifted education), is to encourage students *to enter the shoes of scientists,* i.e. to learn and work in inquiry-based style at the highest levels.

After quoting so many researchers (young and not so young) we would like to end our reflections with the words of a very gifted non-scientist, Stefan Valdobrev (actor, film composer, singer-songwriter and filmmaker): *A beautiful generation is growing*! This thought is being proved for 20 years now by the young members of HSSI. And everyone who could contribute to this growing should feel privileged. Happy anniversary, HSSI!

Acknowledgments. We would like to express our gratitude to the *Union of Bulgarian Mathematicians, Evrika Foundation, the St. Cyril and St. Methodius International Foundation, and the Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences* and *American Foundation for Bulgaria* as founders of HSSI; *America for Bulgaria Foundation* for sponsoring the Bulgarian students at RSI (since 2011); University of Plovidiv "Paisii Hilendarski " for recognizing the certificates for excellence of the HSSI students as excellent entry exams, American University in Bulgaria for hosting the SRS for several years, and Musala Soft and SAP Labs for their ongoing support. Of course, a big applause to all the HSSI alumni who stay in touch with the Bulgarian scientists and pass the torch to the younger generations!

REFERENCES

[1] Е. Сендова. Расте прекрасно поколение („изтичане на мозъци“ или вливане на надежда). Наука, бр. 4 (2014), 53–55.

[2] Е. Сендова. Млади сили в крепостта на науката. Наука, бр. 6 (2004), 57–61.

[3] P. Kenderov. Higher Ability Students and Inquiry Based Learning in Bulgaria – the Role of European Projects InnoMathEd and Fibonacci. Proceedings of the 6-th Conference of the World Federation of National Mathematics Competitions (WFNMC), Riga, July 25–30, 2010.

[4] P. Kenderov. One year HSSI, Sofia, 2001, 1–3.

[5] П. Кендеров, О. Мушкаров, Б. Паракозова. Петнадесет години Ученически институт по математика и информатика. *Математика и математическо образование*, **44** (2015), 41–56.

[6] П. Кендеров, О. Мушкаров. Десет години ученически институт по математика и информатика. *Математика и математическо образование*, **39** (2010), 7–18.

[7] O. Mushkarov, A. Rangachev, E. Sendova. Entering the world of mathematics research at school age. *Mathematics and Education in Mathematics*, **38** (2009), 92–94.

[8] O. Mushkarov, N. Dimitrova, E. Sendova. Math Research at School Age. 6th chapter in: Meeting in Mathematics (eds V. Georgiev et al.). Sofia, 2008, 81–93.

[9] P. Kenderov, E. Sendova. Enhancing the inquiry-based mathematics education. In the Proceedings of the UNESCO, International Workshop: Re-designing Institutional Policies and Practices to Enhance the Quality of Teaching through Innovative Use of Digital Technologies, 14–16 June 2011, Sofia, Bulgaria, 56–70.

[10] P. Kenderov, E. Sendova. Inquiry Based Mathematics Education (IBME) and Gifted Students. In: Implementing Inquiry in Mathematics Education (eds P. Baptist, D. Raab). Bayreuth, 2012, 163–174.

[11] E. Sendova. You do – you understand, you explore – you invent: the fourth level of the inquiry-based learning. In: Constructionism and Creativity (eds G. Futschek, C. Kynigos). Proceedings of the 3d International Constructionism Conference, August 19–23, 2014, Vienna, Austria, 103–112.

[12] Б. Паракозова, Е. Сендова. Когато да бъдеш изключителен не е изключение. (интервю на отличници от УЧИМИ за RSI 2010). *Математика и информатика*, бр. 1, 2010.

[13] Y. Penova. Keep in Touch. `https://murrayedwardscollegegoingplaces.wordpress.com/2014/04/24/keep-in-touch/`.

[14] S. Gagliani. Preface to “Success with Science: The Winners’ Guide to High School Research”, Research corporation for science advancement, 2011, xi–xii.

Evgenia Sendova
`e-mail: jenny.sendova@gmail.com`
Albena Vassileva
`e-mail: albena.ava@gmail.com`
Emil Kolev
`e-mail: emil@moi.math.bas.bg`
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev St, Bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria

НЕ „ИЗТИЧАНЕ“, А „СПЕЧЕЛВАНЕ“ НА МОЗЪЦИ: 20 ГОДИНИ УЧЕНИЧЕСКИ ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Евгения Сендова, Албена Василева, Емил Колев

Авторите проследяват развитието на Ученическия институт по математика и информатика (УчИМИ) от създаването му през 2000 г. до днес, като се спират на основните събития, организирани в рамките му – *Зимната ученическа конференция*, *Ученическата секция* към Пролетната конференция на СМБ и *Лятната изследователска школа*. Отделят внимание и на родствената международна програма *Research Science Institute* (RSI), както и на селекцията на българските ученици за участие в нея.

Защитата на твърдението в заглавието личи най-добре от думите на випускниците на УчИМИ и RSI, които освен с личните си научни постижения на престижни международни форуми, допринасят за научното развитие на българската младеж и като ментори (както от разстояние, така и на родна почва).

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

75 ГОДИНИ ОТ РОЖДЕНИЕТО НА АКАД. СТЕФАН ДОДУНЕКОВ*

Цонка Байчева, Петър Бойваленков, Илия Буюклиев



На 5 август 2012 г. завинаги ни напусна нашият учител, колега и приятел академик Стефан Додунеков. Той щеше да навърши 67 години само месец по-късно, а през тази година се навършват 75 години от рождението му. В спомените на голяма част от колегията Стефан Додунеков е учен – специалист по теория на кодирането, администратор – директор на ИМИ–БАН, председател на СМБ, председател на БАН (уви, за кратко), преподавател, приятел. За нас обаче Стефан Додунеков е преди всичко Учител с главна буква – създател на българската школа по теория на кодирането, станала известна в целия свят.

Създадената от Стефан Додунеков школа в областта на Алгебричната и комбинаторна теория на кодирането не е формална структура. През годините в нея

*Тази статия е частично подкрепена от Национална научна програма „Информационни и комуникационни технологии за единен цифров пазар в науката, образованието и сигурността (ИКТвНОС)“ на МОН и проект 12/8 от 15.12.2017 на ФНИ.

се включваха учени от различни институции – ИМИ–БАН, ФМИ–СУ, НБУ, ФМИ–ВТУ, ФМИ–ШУ, ТУ Габрово, ЮЗУ, БСУ, РУ. По традиция, веднъж годишно се събираме на националния семинар по теория на кодирането, където всеки представя резултати, получени през годината, обменят се мнения, представят се докторантите, набелязват се и се координират планове и проекти. Семинарът през ноември 2019 г. беше с рекорден брой участници – над 50. Програмата зае плътно два работни дни, като се обсъдиха и три проекта за дисертации.

По инициатива на Стефан Додунеков са създадени и се провеждат и до днес две серии от международни конференции – българо-руската (започнала като българо-съветска, но винаги с английския като единствен официален език) *Algebraic and Combinatorial Coding Theory* (ACCT) и организираната от ИМИ *Optimal Codes and Related Topics* (OCRT). На тези конференции идват изявени учени от областта, представят се млади колеги, които тепърва започват изследователската си кариера, и българските учени получават прекрасна възможност да обсъдят с чуждестранните колеги актуални и нововъзникващи теми.

Основните инициатори на ACCT са Стефан Додунеков и Леонид Бассалыго от Института по проблеми на предаването на информацията на РАН. Те са и съпредседатели на организационния комитет на първите 13 издания на конференцията, а проф. Бассалыго, който е ученик на Колмогоров, неведнъж е подчертавал, че отдавна вече не ходи на други конференции, освен на ACCT.

Стефан Додунеков инициира работата по много от тематиките, по които изследователите, работещи в областта на теорията на кодирането в България, работиха, а по някои от тях и продължават да се работят – оптимални линейни кодове, самодуални кодове, CRC кодове, near-MDS кодове (въведени от него и Ланджев), добри и точни кодове, сферични кодове[1].

Ще завършим този кратък обзор на наследството на Стефан Додунеков с неговия индивидуален подход към всеки от групата. Съдействаше или организираше различни специализации, обмени за повишаване на квалификацията (в България и чужбина), настояваше и поощряваше да се кандидатства за проекти и стипендии, да се участва в конференции. Ще отбележим няколко цитата: „Колеги, в нашата работа се искат три неща – конструктивизъм, позитивизъм и добронамереност“, „Срещу заобикалящата ни посредственост може да се борим само с професионализъм“, „От наука не се забогатява, но се оцелява, при това интересно“, „Където отивате – гледайте внимателно и „купувайте“, та като се върнете да има на какво да научите и другите“.

На следващите страници ще се спрем накратко на някои резултати, свързани с изследвания на оптимални кодове, тематика, която Стефан Додунеков разви с учениците си в България.

1. Оптимални кодове. Една от сферите, в които Додунеков има важни научни постижения, се отнася до възможните параметри и някои основни свойства на оптималните линейни кодове спрямо някои от познатите граници.

[1] В интерес на истината, Стефан Додунеков смяташе, че един от авторите на тези редове ще работи успешно в областта на конструирането на добри сферични кодове. Но нещата се завъртяха – получиха се резултати за несъществуване, универсални граници, необходими и достатъчни условия за тяхната оптималност и т.н., и при всички случаи помощта на Додунеков беше навременна и изключително важна.

Нека F_q е крайно поле с q елемента, където q е степен на просто число. Да означим n-мерното векторно пространство над това поле с F_q^n. Разстояние по Хеминг между два вектора x и y от F_q^n се дефинира като брой на позициите, в които те се различават. Тегло (по Хеминг) $wt(x)$ на вектор $x \in F_q^n$ ще наричаме броя на ненулевите координати на x. Подпространство C с размерност k на линейното пространство F_q^n ще наричаме линеен код с дължина n и размерност k. Минимално разстояние (минимално тегло) на линеен код ще наричаме най-малкото измежду теглата на ненулевите вектори на кода. С $[n, k, d; q]$ ще означаваме линеен код с дължина n, размерност k и минимално разстояние d над поле с q елемента.

Една от основните задачи на теорията на кодирането е оптимизирането на един от параметрите n, k и d на линеен код над крайно поле по зададени другите два. С параметрите n и d при фиксирано k се свързват следните две функции:

$n_q(k, d)$ – минималното n, за което съществува $[n, k, d; q]$ код при зададени k и d;

$d_q(n, k)$ – максималното d, за което съществува $[n, k, d; q]$ код при зададени n и k.

Намирането на точните стойности на тези функции се свежда до:

– конструиране на кодове с фиксирани параметри;

– доказване несъществуването на кодове с определени параметри.

Кодовете с параметри $[n_q(k, d), k, d; q]$ и $[n, k, d_q(n, k); q]$ се наричат оптимални.

Първите оптимални линейни кодове са конструирани със самото зараждане на теорията на кодирането. Една част от известните оптимални двоични линейни кодове с голямо практическо и теоретично значение са описани от МакУйлямс и Слоен [5] и др.

В [25] е получена следната оценка отдолу за $n_q(k, d)$:

$$n_q(k, d) \geq g_q(k, d) = \sum_{i=0}^{k-1} \lceil d/q^i \rceil.$$

Тази граница е известна като *граница на Грийсмър*. Кодове, за които тя се достига, се наричат *Грийсмърови*.

Границата на Грийсмър има особена роля поради факта, че за фиксирани k всички оптимални кодове с достатъчно големи d я достигат [3, 4], т.е. има само краен брой оптимални кодове, които не са Грийсмърови. В тази посока Додунеков доказва следните твърдения:

Теорема 1 ([2]). *Нека* $d = s(q-1)q^{k-1} - \sum_{i=0}^{p} a_i q^{u_i - 1}$, *където* $s = \lceil d/(q-1)q \rceil$, $k = u_0 > u_1 > \cdots > u_p \geq 1$, $0 \leq a_0 \leq q-2$, $1 \leq a_i \leq q-1$ *за* $i = 1, 2, \ldots, p$. *Код с параметри* $[g_q(k, d), k, d; q]$ *съществува тогава и само тогава, когато* $\sum_{i=1}^{\min(s+1,p)} u_i \leq sk$.

Следствие от теорема 1 е:

Теорема 2 ([2, 26]). *За всяка размерност* k *съществува константа* $D(k)$, *такава, че* $n_q(k, d) = g_q(k, d)$ *при* $d \geq D(k)$.

Следното твърдение дава съществена информация за вида на пораждащата матрица на Грийсмърови кодове.

Теорема 3 ([2, 15]). *Ако* $d \leq sq^{k-1}$, *то всяка пораждаща матрица на* $[g_q(k, d) + t, k, d; q]$ *код* C *не съдържа повече от* $t + s$ *еквивалентни помежду си стълба.*

С други думи, всеки Грийсмъров код с $(s-1)q^{k-1} \leq d \leq sq^{k-1}$ може да се конструира чрез изтриване на подходящи координати от код, представляващ s копия на симплексния код на размерност k и при $d \leq q^{k-1}$ Грийсмъровите кодове нямат пропорционални координати (наричат се проективни кодове).

Тези твърдения поставят следните естествени въпроси.

Има ли Грийсмърови кодове с d по-малко от D?

С какви параметри са останалите, *негрийсмърови*, оптимални кодове за дадено k и d?

Отговорите на тези въпроси отварят нови или дават друго развитие на вече известни изследователски направления. Такива са изследванията върху възможните теглови разпределения на линейните кодове [18],[19]. Класификацията (или намирането на точно един представител от клас на еквивалентност) на кодове с фиксирани параметри води до характеризация на структурите и в частност до доказване на несъществуване на кодове с дадени параметри. Геометричната интерпретация на кодовете над крайни полета се оказа много уместна и резултатна. Благодарение на тази интерпретация стана възможно използване на методи за редуциране на параметрите на кодове, като например, базиран на проективно дуалната трансформация.

Ще се спрем по-подробно на един пример, който се отнася до доказване на съществуване и класификация на оптималните $[162, 8, 80; 2]$ кодове и се основава на този метод, поради няколко причини. Една от причините е, че това е последното конструктивно уточнение на $n_2(8, d)$ (за останалите няколко отворени случая впоследствие беше доказано несъществуване), а Додунеков и неговите ученици имат основни заслуги при намирането на точните стойности на $n_2(8, d)$. Друга причина е, че този пример провокира интереса на Додунеков към теоретично обобщение на проективно дуалната трансформация. Такова обобщение беше развито заедно със Симонис в класическата статия [20]. В тази разработка се дава нов аналитичен поглед на връзката между линейни кодове и мултимножества от точки в проективни геометрии. Представя се добре известната още от Делсарт (преразгледана в друга светлина от Брауер) трансформация като частен случай на много по-общо изображение, позволяващо линейност, лифтинг и др.

Брауер и Ван Ойпън [11] установяват следното съответствие между двойнотегловни и проективни кодове.

Нека C е $[n, k, d; q]$ код с пораждаща матрица G и нека $\gamma^j = (\gamma_1^j, \gamma_2^j, \ldots, \gamma_k^j)$ са представители на точките от $PG(k-1, q)$ за $j = 1, 2, \ldots, (q^k - 1)/(q-1)$.

Нека кодът C да има ненулеви тегла $w_1, w_2, \ldots, w_t$. Всеки подкод B на C с размерност $k-1$ има ненулеви тегла $w_1, w_2, \ldots, w_t$ с кратности съответно $f_1, f_2, \ldots, f_t$.

Да изберем α и β такива, че всички числа $\alpha w_i + \beta$ да са цели и неотрицателни. Нека матрицата G_X да съдържа всяко γ^j като стълб $\alpha w_j + \beta$ пъти, където $w_j = wt(\gamma^j.G)$ за $j = 1, 2, \ldots, (q^k - 1)/(q-1)$.

Броят на всички γ^j, включени в G_X, за които $\gamma^j.G \in B$, е

$$\sum(\alpha w_i + \beta) f_i)/(q-1) = \alpha n_B q^{k-2} + \beta(q^{k-1} - 1)/(q-1)q,$$

където n_B е ефективната дължина на кода. Да разгледаме кода X, породен от G_X. Лесно се проверява, че X е $[n', k', d'; q]$ код с параметри:

$$n' = \beta(q^k - 1)/(q-1) + \alpha q^{k-1} n, k' \leq k, d' = |X| - \beta\frac{q^{k-1} - 1}{q-1} - q^{k-2}.\max(\alpha n, \alpha(n-1)).$$

Аналогично съответствие е в сила за непроективни кодове, но тогава полученият код ще има повече от две тегла, защото n_B ще приема повече от две стойности.

Възможен е и обратният преход от X към C. При избор на подходящи α и β от X може да се конструира C.

В по-нататъшните разсъждения използваме Теорема 3 и представената по-долу Теорема 4, доказана в общия случай от Додунеков и отнасяща се до параметрите на остатъчния линеен код.

Дефиниция. *Остатъчен код на кода C относно кодовата дума $x \in C$ ще наричаме кода, който се получава от рестрикцията на C върху стълбовете, в които x има нули. Остатъчният код на кода C относно кодовата дума $x \in C$ ще означаваме с $Res(C, x)$.*

Ако не се интересуваме от вектора x, относно който образуваме остатъчния код, а само от неговото тегло $w = wt(x)$, ще записваме $Res(C, w)$.

Теорема 4 ([1]). *Нека C е $[n, k, d; q]$ код, $x \in C$, $wt(x) = w$ и $w < d + \lceil w/q \rceil$. Тогава $Res(C; w)$ има параметри $[n - w, k - 1, d_\mu]$, където $d_\mu \geq d - w + \lceil w/q \rceil$.*

Известно е от [17], че $n_2(8, 78) = 159$ или 160; $n_2(8, 80) = 162$ или 163. Ще разгледаме остатъчния код $Res(162, 112)$, който е $[50, 7, 24; 2]$ код.

Теорема 5. *Съществува единствен с точност до еквивалентност $[50, 7, 24; 2]$ код.*

Доказателство. Използвайки Теорема 4 и резултатите за оптимални двоични линейни кодове, се установява, че [50,7,24;2] код може да има кодови думи с ненулеви тегла 24, 32, 46, 48, 50.

Нека x е кодова дума с тегло 24 и $y \in C$. Ако $wt(y) = 50$, то $wt(x + y) = 26$ – противоречие. Ако $wt(y) = 48$, то $wt(x + y) = 24, 26$ или 28. Поради това, че в кода няма кодова дума с тегло 26 и 28, то $wt(x + y) = 24$ и $wt(v + y) = 24$ за всички вектори $v \in C$ с тегла 24. Това е невъзможно, защото от теорема 3 имаме, че кодът $[50, 7, 24; 2]$ се генерира от пораждаща матрица с редове с тегло 24. Тогава за някой вектор c от пораждащата матрица ще е изпълнено $c + y \neq 48$, защото в противен случай ще има две позиции, в които всички кодови думи ще имат нули.

Нека $wt(y) = 46$. Да допуснем, че $y = (11 \ldots 10000)$. Знаейки, че в C няма кодови думи с тегла 22, 26, 28 и 30, то $wt(x + y) = 24$ за всички $x \in C$ с тегло 24. За векторите $u = (u_1, 1000)$ и $v = (v_1, 0100)$ от C с тегла 24 имаме $wt(u + v + y) = 46 - wt(u_1 + v_1) + 2 = 50 - wt(u + v) = 4, 12$ или 26, което е невъзможно.

Тогава от уравненията на МакУйлямс лесно се получава, че за $[50, 7, 24; 2]$ кодовете има единствена възможност за теглови спектър: $A_0 = 1$, $A_{24} = 108$, $A_{32} = 19$, $B_2 = 1$.

В [16] е показано, че съществува единствен [19,7,8;2] код с теглови спектър $A_0 = 1$, $A_8 = 78$, $A_{12} = 48$ и $A_{16} = 1$. От този $[19, 7, 8; 2]$ код, използвайки съответствието между проективни и двойнотегловни кодове за $\alpha = 1/4$ и $\beta = -2$, се получава $[50, 7, 24; 2]$ код. Обратният преход от $[50, 7, 24; 2]$ код към $[19, 7, 8; 2]$ код имаме при $\alpha = 1/8$ и $\beta = -3$. От това, че кодът с параметри [19,7,8;2] е единствен, а $[50, 7, 24; 2]$ има единствен теглови спектър и съответствието е взаимно еднозначно, следва, че двойнотегловният непроективен $[50, 7, 24; 2]$ код е също единствен. □

Сега ще докажем, че има две възможности за тегловия спектър на кодовете с параметри $[162, 8, 80; 2]$:

(*i*) $A_0 = 1$, $A_{80} = 234$, $A_{96} = 21$, (*ii*) $A_0 = 1$, $A_{80} = 235$, $A_{96} = 19$, $A_{112} = 1$.

Използвайки Теорема 4 и резултатите за оптимални двоични линейни кодове, установяваме, че в $[162, 8, 80; 2]$ код C може да има кодови думи с ненулеви тегла 80, 96, 98, 100, 112, 160, 162. Ако има кодова дума с тегло 162, тогава би трябвало също да има кодова дума с тегло 82. Ако има кодова дума с тегло 160, тогава би трябвало да има кодова дума с тегло 82, защото векторите с тегла 80 генерират кода. Следва, че $A_{160} = A_{162} = 0$. С използване на уравненията на МакУйлямс се елиминира и възможността да има кодови думи с тегло 98 и 100. Следователно в кода C може да има само кодови думи с тегла 80, 96, 112.

Сега ще докажем, че $A_{112} \leq 1$. Нека v_1 и v_2 са различни кодови думи с тегло 112 и нека $v_2 = (v_2', v_2'')$, където $v_2'' \in Res(C, v_1)$. Според Теорема 4 теглата на v_2'' са 24 или 32 и оттук получаваме, че теглата на $v_1 + v_2$ са 64 или 48, което е невъзможно. Ако $A_{112} = 0$, тегловият спектър на C е $A_0 = 1$, $A_{80} = 234$, $A_{96} = 21$ и ако $A_{112} = 1$, тегловият спектър е $A_0 = 1$, $A_{80} = 235$, $A_{96} = 19$, $A_{112} = 1$.

Теорема 6. *Съществуват* $[162, 8, 80; 2]$ *кодове с теглови спектър* (i) *и* (ii) *и те са единствени с точност до еквивалентност.*

Доказателство. В [27] Джафе характеризира всички [21,8,8;2] кодове и доказва единствеността на [21,8,8;2] кодовете със спектри

1) $A_0 = 1$, $A_8 = 102$, $A_{12} = 144$, $A_{16} = 9$; 2)$A_0 = 1$, $A_8 = 106$, $A_{12} = 136$, $A_{16} = 13$.

По метода, описан в [11], на [162,8,80;2] кодовете с теглови спектър от вида (i) и (ii) за $\alpha = 1/16$ и $\beta = -5$ съответстват [21,8,8;2] кодовете с теглови спектър 1) и 2) съответно. Обратният преход се получава при $\alpha = 1/4$ и $\beta = -2$. От единствеността на [21,8,8;2] кодовете с теглови спектър 1) и 2) следва единствеността на [162,8,80;2] кодовете със спектри (i) и (ii). Поради това, че в дуалните кодове на кодовете, конструирани в горното доказателство, има вектори с тегло 3, следва, че съществува $[159, 8, 78; 2]$ код и оттам $n_2(8, 78) = 159$. $\square$

2. Двоични и троични квази-съвършени кодове с малки размерности. Когато се интересуваме от възможността на един шумозащитен код да коригира определен брой грешки, са важни следните понятия.

Дефиниция. *Радиус на покритие* $R = R(C)$ *на код* C *се нарича максималното измежду разстоянията на вектор от пространството* F_q^n *до кода* C, *т.е.* $R(C) = \max\{d(x, C) \mid x \in F_q^n\}$.

Ще означаваме с $[n, k, d; q]R$ линеен $[n, k, d; q]$ код с радиус на покритие R.

Дефиниция. *Радиус на сферичната опаковка* $e(C) = \left\lfloor \dfrac{d-1}{2} \right\rfloor$.

Радиусът на сферичната опаковка ни дава теглото на най-тежкия еднозначно коригируем вектор-грешка, докато радиусът на покритие на кода е мярката за максималното тегло на коригируем (еднозначно или не) вектор-грешка.

Оптимални по отношение на максималния брой коригирани грешки са *съвършените кодове*, за които $R(C) = e(C)$. Проблемът за намиране на всички съвършени кодове е поставен от Golay през 1949 и е напълно решен през 1973 от Зиновиев и Леонтиев [29] (и независимо от Tietäväinen [28]).

Следващата стъпка в тази посока е да се разглеждат квази-съвършени кодове, т.е. кодове, за които радиусът на сферичната опаковка и радиусът на покритие се различават с 1. Един съвсем естествен въпрос е: *Кои кодове са квази-съвършени?* Ясно е, че всеки код с радиус на покритие 1 и минимално разстояние 1 или 2 е

квази-съвършен. В тази работа ще представим резултати на Додунеков за кодове с радиус на покритие поне 2.

Квази-съвършените кодове с радиуси на покритие 2 и 3 са изследвани от различни автори. В частност, кодовете с параметри $[n, k, d; q]2$, $d = 3, 4$ са квази-съвършени. Тези кодове са свързани с *1-saturating* множества в проективните пространства $PG(n-k-1, q)$ и в литературата са описани много такива кодове. Направени са и изследвания на $[n, n-4, 5; q]3$ квази-съвършените кодове, които съответстват на пълни арки в проективното пространство $PG(3, q)$.

Значително по-малко е известно за q-ичните квази-съвършени кодове с $q > 2$. Една безкрайна фамилия от троични квази-съвършени кодове е известна от работата на Гашков и Сидельников [23]. Членове на фамилията са $[(3^s+1)/2, (3^s+1)/2 - 2s, 5; 3]3$ кодовете. Две фамилии от четвъртични кодове $[(4^s-1)/3, (4^s-1)/3-2s, 5; 4]3$ и $[(2^{2s+1}+1)/3, (2^{2s+1}+1)/3-2s-1, 5; 4]3$ са представени в [21] и [24], а Додунеков показва, че техните членове са квази-съвършени кодове [13, 1].

Тегловните разпределения и поведението при откриване на грешки на троичния $[13, 7, 5]$ квадратично-остатъчен код са изследвани в [6]. Показано е, че радиусът на покритие на кода е три, т.е. той е квази-съвършен. По-късно Додунеков и Данев [12] доказват, че този код е първият член на фамилия от троични квази-съвършени кодове с параметри $[(3^s-1)/2, (3^s-1)/2 - 2s, 5]$ за всички нечетни $s \geq 3$.

Представените до тук резултати водят до следния въпрос: *Колко рестриктивно е свойството на един код да е квази-съвършен, т.е. има ли неекивалентни квази-съвършени кодове със зададени параметри (тъй като всички посочени примери съдържат само по един код за съответните параметри)?*

За да се отговори на този въпрос, в [8] са класифицирани кодове със зададени параметри. Първо се фиксира размерността на кода и за тази размерност се определят възможните дължини и минимални разстояния на кодовете, които биха могли да са квази-съвършени, като се вземе предвид, че минималното разстояние на тези кодове може да има само две стойности: $2e+1$ или $2e+2$. По-конкретно, определят се параметрите, за които е възможно да съществуват двоични квази-съвършени кодове с размерности до 14 и троични квази-съвършени кодове с размерности до 13. След това се класифицират всички такива кодове, като се прилагат две основни техники. Първата се основава на съкращаване, а втората – на скъсяване на кодове. При съкращаване на кода изтриваме една или няколко негови позиции от всяка кодова дума. При скъсяване на кода фиксираме една негова позиция, избираме кодовите думи, които имат 0 в тази позиция, изтриваме тази позиция и получаваме скъсения $[n-1, k-1]$ код на $[n, k]$ кода.

За класификацията на част от кодовете, обект на това изследване, са използвани и вече известни класификации. Тъй като се разглеждат кодове с радиус на покритие, по-голям от 1, то минималното им разстояние трябва да е поне 3. Тогава дуалните им кодове трябва да са проективни кодове, т.е. такива, чието дуално минимално разстояние е поне 3. Двоичните проективни кодове с размерности до 6 са класифицирани от Илия Буюклиев в [10]. Те са използвани като основа за класифицирането на двоичните кодове с ко-размерности $n-k$ до 6, като измежду класифицираните в [10] проективни кодове се разглеждат само тези, които имат необходимото дуално разстояние. Например, за да класифицираме всички двоични $[8, 2, 5]$ кодове, се разглеждат 14-те $[8, 6]$ проективни кода. Само един от тях има дуално разстояние

5 и следователно има единствен $[8, 2, 5]$ код. По същия начин класификацията на троичните проективни кодове с размерности до 4 [7] е използвана, за да бъдат класифицирани троичните кодове с ко-размерности до 4, които биха могли да бъдат квази-съвършени.

След класифицирането на кодовете, които биха могли да са квази-съвършени, са пресметнати радиусите им на покритие. За целта последователно се разглеждат всички вектори с дължина n от вида $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, a)$, $a \in F_q^{n-k}$ за $q = 2$ или $q = 3$ и с тегло $\geq e$, тъй като всеки вектор с тегло по-малко или равно на e е единствен лидер на съседен клас. Пресмята се тяхното разстояние до кода. Ако се намери вектор, който е на разстояние от кода, по-голямо от $e+1$, търсенето се преустановява, защото радиусът на покритие на съответния код е поне $e + 2$, а ние търсим кодове с радиус на покритие $e + 1$.

С помощта на представения подход са класифицирани всички двоични и троични квази-съвършени кодове с размерности съответно до 9 и до 6. Получени са и частични резултати за двоичните квази-съвършени кодове с размерности до 14 и за троичните квази-съвършени кодове с размерности до 13.

В следващата теорема е показана конструкция на последователност от квази-съвършени кодове.

Теорема 7 ([8]). *Да приемем, че съществува $[n, k, d; q]2$ квази-съвършен код с $n \leq \dfrac{q^{n-k} - 1}{q - 1} - 2$ и $3 \leq d \leq 4$. Тогава съществува и $[n+1, k+1, 3; q]2$ квази-съвършен код.*

Като се приложи Теорема 7 към кодовете, получени в настоящата класификация, се получават следните вериги от параметри на квази-съвършени кодове.
$[5, 2, 3; 2]2 \to [6, 3, 3; 2]2$
$[8, 4, 4; 2]2 \to \cdots \to [14, 10, 3; 2]2$
$[9, 4, 4; 2]2 \to \cdots \to [30, 25, 3; 2]2$
$[13, 7, 4; 2]2 \to \cdots \to [\mathbf{18}, \mathbf{12}, \mathbf{3}; \mathbf{2}]\mathbf{2} \to [19, 13, 3; 2]2 \to [\mathbf{20}, \mathbf{14}, \mathbf{3}; \mathbf{2}]\mathbf{2} \to \ldots$
$\to [\mathbf{62}, \mathbf{56}, \mathbf{3}; \mathbf{2}]\mathbf{2}$
$[5, 2, 3; 3]2 \to [12, 3, 3; 3]2;$
$[8, 4, 4; 3]2 \to \cdots \to [17, 13, 3; 3]2 \to [\mathbf{18}, \mathbf{14}, \mathbf{3}; \mathbf{3}]\mathbf{2} \to \cdots \to [\mathbf{40}, \mathbf{36}, \mathbf{3}; \mathbf{3}]\mathbf{2}$
$[12, 7, 3; 3]2 \to [\mathbf{13}, \mathbf{8}, \mathbf{3}; \mathbf{3}]\mathbf{2} \to \cdots \to [\mathbf{121}, \mathbf{116}, \mathbf{3}; \mathbf{3}]\mathbf{2}$.

Кодовете, които не са били известни преди тази класификация, са дадени в получерен шрифт.

До тази работа, единствените известни примери на квази-съвършени кодове с минимално разстояние, по-голямо от 5, бяха двоичните кодове с повторение, $[22, 12, 6; 2]3$ съкратеният код на Golay, $[7, 1, 7; 3]4$ и $[8, 1, 8; 2]4$ кодовете с повторение. С намерените примери на още такива кодове се дава отговор на отворения проблем, поставен в статията на Etzion и Mounits [22], където се предлага да се намерят нови или да се докаже несъществуването на квази-съвършени кодове с $d > 5$. Най-интересни са $[24, 12, 7; 2]4$ и $[25, 12, 8; 2]4$, които са първите примери на квази-съвършени кодове с $R = 4$ извън споменатите по-горе.

Получените в това изследване резултати показват, че има само по няколко дължини, за които е възможно да съществуват квази-съвършени кодове за всяка размерност. За някои от параметрите са намерени стотици и хиляди квази-съвършени

кодове, което показва че това не е чак толкова рестриктивно свойство за кода. Намирането на квази-съвършени кодове с минимално разстояние, по-голямо от 5, ни дава основание да считаме, че за по-големи размерности ще съществуват квази-съвършени кодове с по-големи радиуси на покритие.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Додунеков. Минимальная блоковая длина линейного q-ичного кода с заданными размерностью и кодовым расстоянием. *Проблемы передачи информации*, **20** (1984), No 4, 11–22.

[2] С. М. Додунеков. Оптимални линейни кодове. Дисертация за присъждане на научната степен „доктор на математичските науки“, София, 1985.

[3] С. М. Додунеков, Н. Л. Манев. Характеризация двух классов кодов, достигающих границ Грайсмера. *Проблемы передачи информации,* **19**, *4* (1983), 3–10.

[4] С. М. Додунеков, Н. Л. Манев. Уточнение границы Грайсмера для некоторых классов расстояний. *Проблемы передачи информации*, **23** (1987), No 1, 47–56.

[5] Ф. Дж. МакУилямс, Н. Дж. А. Слоен. Теория кодов исправляющих ошибки, Москва, Связь, 1979.

[6] T. Baicheva, S. Dodunekov, R. Kötter. On the Performance of the Ternary [13,7,5] Quadratic-Residue Codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **48** (2002), No 2, 562–564.

[7] T. Baicheva, I. Boyukliev. On the ternary projective codes with dimensions 4 and 5. Proc of the International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Kranevo, Bulgaria, 2004, 34–39.

[8] T. Baicheva, I. Bouyukliev, S. Dodunekov, V. Fack. Binary and Ternary Quasi-perfect Codes with Small Dimensions. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **54** (2008), No 9, 4335–4339.

[9] I. Bouyukliev. What is Q-extension? *Serdica J. Computing*, **1** (2007), No 2, 115–130.

[10] I. Bouyukliev. On the binary projective codes with dimension 6. *Discrete Applied Mathematics*, **154** (2006) 1693–1708.

[11] A. E. Brouwer, M. van Eupen. The corespondence between projective codes and 2-weight codes. *Designs, Codes and Cryptography*, **11** (1997), No 3, 261–266.

[12] D. Danev, S. Dodunekov. A family of ternary quasi-perfect codes. Proc. International workshop on coding and cryptograph, Versailles, France, 2007.

[13] S. M. Dodunekov. The optimal double-error correcting codes of Zetterberg and Dumer-Zinov'ev are quasiperfect. *C. R. Acad. Bulgare Sci*, **38** (1985), No 9, 1121–1123.

[14] S. M. Dodunekov. Some quasiperfect double error correcting codes, *Problems Control Inform. Theory/Problemy Upravlen. Teor. Inform.*, **15** (1986), No 5, 367–375.

[15] S. M. Dodunekov. A remark on the weight structure of generating matrices of linear codes. *Problems Inform. Transmission*, **26** (1990), No 2, 173–176.

[16] S. M. Dodunekov, S. B. Encheva. On the uniqueness of some linear subcodes of the binary extended Golay code. Proc. of the Int. Workshop Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Varna, Bulgaria, 1988, 38–40.

[17] S. M. Dodunekov , T. Helleseth, N. L. Manev, Ø. Ytrehus. New bounds on binary linear codes of dimension eight. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **33** (1987), No 6, 917–919.

[18] S. M. Dodunekov, N. L. Manev. An improvement of the Griesmer bound for some small minimum distances. *Discrete Appl. Math.*, **12** (1985), No 2, 103–114.

[19] S. M. Dodunekov, N. L. Manev. An improvement of the Griesmer bound for some classes of distances. IEEE Conf. on Inf. Theory, Brightion, 1985.

[20] S. Dodunekov, J. Simonis. Codes and projective multisets. *Electron. J. Combin.*, **5** (1998), No 1, Research Paper 37, 23 pp.
[21] I. I. Dumer, V. A. Zinov'ev. Some new maximal codes over $GF(4)$, *Problems of Information Transmission*, **14** (1978), No 3, 174–181.
[22] T. Etzion, B. Mounits. Quasi-perfect codes with small distance. *IEEE Trans. Inf. Theory*, **51** (2005), No 11, 3938–3946.
[23] I. B. Gashkov, V. M. Sidel'nikov. Linear ternary quasiperfect codes correcting double errors. *Problems of Information Transmission*, **22** (1986), No 4, 284–288.
[24] D. N. Gevorkijan, A. M. Avetisjan, G. A. Tigranjan. On the construction of codes correcting two errors in Hamming's metric over Galois field. *Vichislitel'naja tehnika*, **3** (1975) 19–21 (in Russian).
[25] J. H. Griesmer. A bound for error-correcting codes. *IBM J Res. Develop.*, **4** (1960), 532-542.
[26] R. Hill. Optimal linear codes. In: Cryptography and Coding II (ed. C. Mitchell), Oxford, Oxford University Press, 1992, 75–104.
[27] D. Jaffe. Binary linear codes: new results on nonexistence. Manuscript, Department of mathematics and statistics, University of Nebraska.
[28] A. Tietäväinen. On the nonexistence of perfect codes over finite fields. *SIAM J. Appl. Math.*, **24** (1973), 88–96.
[29] V. A. Zinov'ev, V. K. Leont'ev. On non-existence of perfect codes over Galois fields. *Probl. Control Inf. Theory*, 2 (1973), 16–24; translation from *Probl. Upravl. Teor. Inform.* **2** (1973), No 2, 123–132.

Цонка Байчева
e-mail: tsonka@math.bas.bg
Петър Бойваленков
e-mail: peter@math.bas.bg
Илия Буюклиев
e-mail: iliyab@math.bas.bg
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, блок 8
1113 София, България

STEFAN DODUNEKOV'S 75th BIRTHDAY

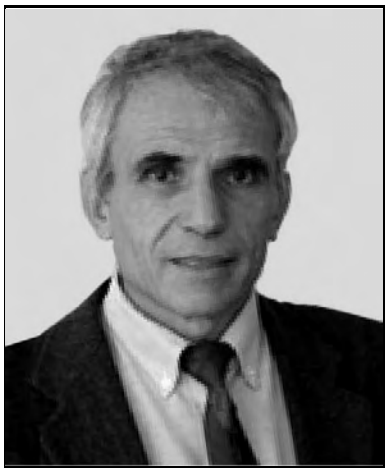
T. Baicheva, P. Boivalenkov, I. Bouyukliev

This year marks the 75th anniversary of Stefan Dodunekov's birth - a world-renowned scientist, founder of the Coding theory group in Bulgaria, of two international scientific conferences, former Director of the Institute of Mathematics and Informatics, Academician and President of the Bulgarian Academy of Sciences, but most of all a great teacher, friend and person. In this work we present some results on optimal error-correcting codes obtained by Stefan Dodunekov.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

75 ГОДИНИ ОТ РОЖДЕНИЕТО НА БОРИСЛАВ БОЯНОВ

Гено Николов



През 2019 година се навършиха 75 години от рождението на Борислав Боянов. Изминаха и 11 години от 8 април 2009 г., когато той неочаквано и преждевременно ни напусна, намирайки се в разцвета на творческите си сили.

Борислав Дечев Боянов е роден на 18 ноември 1944 година в с. Шемшево, намиращо се в непосредствена близост до Велико Търново. Средното си образование завършва във Втора гимназия във Велико Търново. През 1968 г. завършва висше образование по математика в университета във Вроцлав, Полша, като научен ръководител на дипломната му работа е известният полски математик Стефан Пашковски. След завръщането си в България работи неизменно като преподавател в Софийския университет „Св. Климент Охридски“ в продължение на повече от четири десетилетия, преминавайки последователно през всички академични длъжности, започвайки от математик 7-ма степен (1968–1970), асистент (1970–1977), доцент (1977–1985) и професор (1985–2009). През 1975 г. придобива научната степен „Кандидат на математическите науки“ (сега ОНС „Доктор“) за дисертационен труд, озаглавен „Оптимално интерполиране и квадратурни формули“. Негов научен ръководител е акад. Благовест Сендов. През 1981 г. защитава дисертация на тема „Оптимално възстановяване на функции и функционали“ за присъждане на научната степен „Доктор на математическите науки“. През 1997 г. Борислав Боянов е избран за действителен член на Българската академия на науките.

Научното наследство на академик Борислав Боянов включва повече от 130 статии, четири монографии и един учебник. Темите, застъпени в неговите публикации, са изключително разнообразни и обхващат проблеми от теория на апроксимациите, класическия анализ и числените методи. Пълната оценка на научните резултати на Борислав Боянов е една твърде амбициозна (и непостижима в обем от няколко страници) цел, затова ще се ограничa с отбелязването на само някои от тях.

Съществена част от публикациите на Борислав Боянов е посветена на проблеми от оптималното възстановяване. Интересът към тази тематика е породен от контактите му с видния руски математик Николай Сергеевич Бахвалов по време на неговото посещение през 1971–1972 г. в Московския държавен университет. Първите резултати на Борислав Боянов в тази област са за съществуване, характеризация и получаване на точната асимптотика на грешката на оптималните квадратурни формули с предписани кратности на възлите в пространствата на Харди H^p. На Боянов принадлежи и доказателството за съществуване, единственост и характеризация на оптималните квадратурни формули с кратни възли в пространствата на Соболев. В частност, той доказва, че равноотдалечените възли са оптимални за периодичните класове на Соболев — един резултат, предсказан много време преди това и атакуван безуспешно от много изтъкнати математици. Струва си да се отбележи, че Борислав Боянов е един от първите математици, които използват топологическа степен на изображение за доказване на съществуване и единственост на решения на задачи от теория на апроксимациите.

Задачите за оптимално възстановяване на функции и функционали в пространства на Соболев най-често водят до изследването на специфични класове от сплайн-функции: моносплайни, естествени и съвършени сплайни, и др. На Борислав Боянов се дължат важни резултати от теорията на сплайн-функциите, като съществуване и единственост на моносплайни с минимално L_p-отклонение от нулата, въвеждането и изследване на B-сплайни и σ-съвършени сплайни с Биркхофски възли, доказателства на свойства като тоталната положителност на ядрата от отсечените степенни функции, преплитане на нулите на сплайн функции, и др. Тези и много други резултати са включени в две монографии, посветени на сплайн функциите, написани от Борислав Боянов в съавторство с А. Акопян и А. Саакян.

Друг предмет на изследване в работите на Боянов са квадратурни и кубатурни формули, използващи нетрадиционен тип информация и точни за максимални подпространства на дадено линейно пространство (Гаусови квадратурни и кубатурни формули). Самостоятелно или в съавторство със свои ученици той доказва съществуване и единственост на Гаусови квадратурни формули за разширени и за слаби Чебишови системи; съществуване на Гаусови квадратурни формули от Биркхофски тип с двойна алгебрическа степен на точност; съществуване и единственост на интервални Гаусови квадратурни формули, т.е. Гаусови квадратурни формули, използващи информация, състояща се от интеграли от подинтегралната функция върху непресичащи се интервали с предварително предписана дължина. Сред резултатите на Боянов върху кубатурни формули ще спомена и тези за съществуване и единственост на кубатурни формули върху единичното кълбо в $\mathbb{R}^m$, които използват n Радонови проекции от подинтегралната функция и са точни за полиномите на m променливи от тотална степен $2n-1$, както и на кубатурни формули с максимална полихармонична степен на точност.

Любима тема в изследванията на Борислав Боянов са полиномиалните неравенства. През 1982 г. той доказа хипотезата за „най-дългия полином“ на световноизвестния унгарски математик Пол Ердьош, датираща от 1939 г. Именно, измежду всички полиноми $P(x)$ от степен най-много n, такива че $|P(x)| \leq 1$ за всяко $x \in [-1,1]$, най-голяма дължина на графиката в $[-1,1]$ има n-тият полином на Чебишов $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. От същото време датира следното изключително красиво обобщение на неравенството на А. А. Марков, получено от Боянов: за всеки алгебричен полином от f от степен, ненадминаваща n, е изпълнено

$$\|f'\|_p \leq \|T_n'\|_p \|f\|_\infty,$$

където $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_p$ са съответно равномерната норма и L_p нормата ($1 \leq p \leq \infty$) в $[-1,1]$. Ключов елемент в доказателството на тези два резултата е едно друго изящно твърдение, доказано от Боянов: ако P е осцилиращ в даден интервал алгебричен полином от степен n с големини на локалните екстремуми $\{h_i\}_{i=0}^n$ (включително в краищата на интервала), тогава големините на локалните екстремуми $\{h_i'\}_{i=1}^n$ на P' са строго монотонно растящи функции на $\{h_i\}_{i=0}^n$. По-късно Боянов разшири свойството монотонна зависимост от h-овете и го приложи за доказване на неравенства от тип на Марков и Туран за алгебрични полиноми с кратни нули, осцилиращи тригонометрични полиноми и съвършени сплайни.

Известната хипотеза на Сендов, датираща от 1962 г., гласи, че ако P е алгебричен полином от степен n, чиито нули $\{z_i\}_{i=1}^n$ са в затворения единичен кръг в комплексната равнина $\mathbb{C}$, то всеки затворен кръг в $\mathbb{C}$ с център нула на P и радиус 1 съдържа поне една нула на P'. Макар върху тази хипотеза да са работили много и известни математици, към днешна дата тя не е доказана в общия случай. През 1985 г. в съвместна работа Борислав Боянов, Кази Рахман и Ян Шинал показват, че хипотезата на Сендов е вярна асимптотически, доказвайки неравенството

$$\varrho(A(P), A(P')) \leq (1 + |z_1 z_2 \cdots z_n|)^{1/n} \ (\leq 2^{1/n}),$$

където $A(P)$ и $A(P')$ са съответно множествата от различните нули на P и P', а $\varrho(A(P), A(P'))$ е Хаусдорфовото разстояние между двете множества.

На Борислав Боянов се дължат също важни резултати върху разрешимостта на интерполационната задача с полиноми на две променливи, полиноми на две променливи с минимално отклонение от нулата, приближения, запазващи моментите, най-добри едностранни L_1 приближения с блендинг функции, неравенства от тип на Колмогоров–Ландау, и др. Някои от неговите публикации представят различна гледна точка и алтернативни доказателства на класически резултати в теорията на приближенията като теоремите на Хоби–Райс и на Гаус–Крейн, апроксимационната теорема на Джаксън и пренасянето ѝ върху Чебишови системи, неравенството на Ремез, теоремата на Бернщайн за сравняване на най-добрите равномерни приближения на гладки функции, и др.

Борислав Боянов е бил гост-професор в различни университети в Германия, Франция, Полша, Израел, САЩ, Канада, Бразилия, както и пленарен лектор на голям брой престижни научни форуми. Голямо признание за неговите постижения в математиката е фактът, че той е поканен лектор на Първия европейски математически конгрес в Париж през 1992 г.

Борислав Боянов е основател и в продължение на 15 години (1995–2009 г.) главен редактор на *East Journal on Approximations*. Независимо, че работата върху списа-

нието му струва неимоверни усилия, той не се поддава на предложение от голямо издателство, желаещо да закупи правата върху списанието. През същия период той е член на редакционната колегия на *Journal of Approximation Theory* и на други научни списания. По инициатива на Борислав Боянов от 2002 г. са възстановени международните конференции по Конструктивна теория на функциите, традиционно провеждани в България от 70-те години на миналия век и прекъснали през 1991 г. Конференцията през 2002 г. Боянов посвети на 70-годишния юбилей на своя учител, основателя на българската школа в теория на апроксимациите акад. Благовест Сендов, към когото Боянов изпитваше дълбоко уважение. За дълбоко съжаление, акад. Сендов също вече не е сред нас...

Освен забележителен учен, Борислав Боянов беше и прекрасен учител. Имах привилегията да бъда един от единадесетте негови докторанти (тогава аспиранти). Струва си да се отбележи, че шест от тях понастоящем са преподаватели във Факултета по математика и информатика на Софийския университет. Незабравими ще останат спомените ни за сбирките в кабинета му в Института по математика и информатика на БАН, където на чаша чай обсъждахме математически идеи, политиката и живота. Върху все по-гъсто изписаната дъска изникваха нови и нови математически задачи, и някак неусетно Борислав Боянов успяваше да предаде своя неизчерпаем ентусиазъм и на нас, неговите ученици. От стената ни гледаше голям портрет на академик Никола Обрешков, чиято монография *Нули на полиномите* Боянов считаше за една от най-ценните математически книги. Негово убеждение беше, че върху един математически проблем си струва да се работи дори само заради красотата му, без значение дали решаването му води до практически приложения. И, че един автор може да бъде запомнен с единствен красив резултат, но и да остане незабелязан със стотици и дори хиляди публикации. Шегуваше се, разказвайки как известен руски математик (мисля, Сергей Борисович Стечкин), съзерцавайки статуята „Давид“, промълвил: „Бедни Микеланджело, след няколко века твоето прекрасно творение ще бъде прах, но моите теореми ще останат завинаги“.

През периода 2003–2007 г. Борислав Боянов имаше изключително успешен мандат като декан на Факултета по математика и информатика на Софийския университет. По време на мандата му сградата на ФМИ беше обновена и надстроена с един етаж, на първия етаж бяха поставени бюстове на академиците Иван Ценов, Кирил Попов, Любомир Чакалов и Никола Обрешков, а на новопостроения етаж – портретите на професорите, преподавали някога във ФМИ. Дворът на факултета беше също основно обновен, в него беше изграден параклис и поставена статуята на Емануил Иванов, един от основателите на Университета. Юбилейните годишнини от рожденията на Л. Чакалов и Н. Обрешков бяха отбелязани с организираната от Борислав Боянов през 2006 г. конференция във ФМИ „Пионери на българската математика“. Благодарение на неговите усилия бяха издадени два тома с избрани трудове на Обрешков, а математическата общност по света научи чрез статията на де Бор и Пинкъс (*J. Approx. Theory* **123**(2003), 115–123), че десет години преди Шонберг и Къри[1] да публикуват своята фундаментална статия за свойствата на едномерните B-сплайни, такива резултати са получени и публикувани (на български език) от Л. Чакалов.

[1] I. J. Schoenberg and H. B. Curry (бел. ред.)

Въпреки трудните години на прехода и икономическата и политическа нестабилност, Борислав Боянов си остана патриот и непоправим оптимист за бъдещето на България. Можеше с часове да разказва за славни моменти от българската история. Със средства, предоставени от него, в с. Вишовград беше построен пантеон на загиналите от четата на Филип Тотю. Гордееше се с успехите на българските учени и спортисти по света, с красотата на нашата природа, с уникалността на нашите билки. Беше горд с успехите на българските ученици и студенти в международните състезания и олимпиади. Той инициира провеждането от ФМИ на ежегоден турнир по елементарна математика, който понастоящем носи неговото име. След смъртта му стана ясно, че Боянов е предоставял средствата, полагащи му се като декан на ФМИ, на талантливи студенти в затруднено материално положение. Той защитаваше ясна гражданска позиция, че науката и образованието трябва да бъдат национален приоритет, и по време на неговия мандат като декан Факултетът по математика и информатика се включи в подкрепа на стачката на учителите в България.

Вече 11 години откакто Борислав Боянов не е между нас и той несъмнено липсва на всички, които го познаваха. Нека запазим жив в паметта си спомена за талантливия математик, любим учител, скъп приятел и колега, и забележителна личност.

Гено Николов
Факултет по математика и информатика
Софийски университет „Св. Климент Охридски“
бул. „Джеймс Баучер“ № 5
1164 София, България
e-mail: geno@fmi.uni-sofia.bg

75 YEARS FROM THE BIRTH OF BORISLAV BOJANOV

Geno Nikolov

This article is devoted to the 75th anniversary from the birth of Academician Borislav Bojanov. We commemorate the talented mathematician, the much-loved teacher, friend and colleague, and an extraordinary person.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

АКАДЕМИЦИ И ЧЛЕН-КОРЕСПОНДЕНТИ НА БАН В ОБЛАСТТА НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ НАУКИ С ЮБИЛЕЙ ПРЕЗ 2019 г.: АКАДЕМИК СТАНИМИР ТРОЯНСКИ, ЧЛЕН-КОРЕСПОНДЕНТ ИВАН ДИМОВСКИ И ЧЛЕН-КОРЕСПОНДЕНТ ЕМИЛ ХОРОЗОВ

Николай К. Витанов

През 2019 г. във връзка с отбелязването на 150-годишнината на Българската академия на науките бе дадено начало на разширено отбелязване на годишнините на академици и член-кореспонденти на БАН чрез биографични публикации в Списанието на БАН и в други издания. Прие се да бъдат отбелязвани кръгли годишнини, както и годишнини, завършващи на 5 и започващи от 70-ата годишнина на академиците и член-кореспондентите на БАН в различните области на науката. През 2019 г. в областта на математическите науки имаме трима юбиляра – академик Станимир Троянски навърши 75 г., член-кореспондент Иван Димовски навърши 85 години и член-кореспондент Емил Хорозов навърши 70 години.

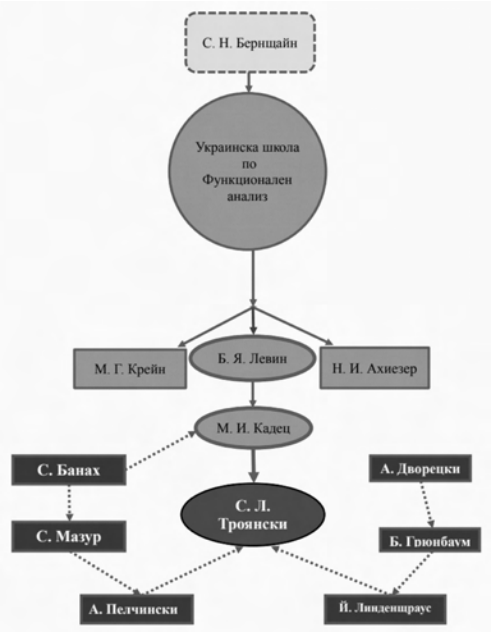


Академик Станимир Троянски

На 12 октомври 2019 г. се навършиха 75 години от рождението на академик Станимир Любенов Троянски – именит български математик, специалист по функционален анализ и топология, действителен член на Българската академия на науките от 2003 г. и чуждестранен член-кореспондент на Кралската академия на точните, физическите и природните науки в Мадрид, Испания от 1999 г.

Академик Троянски е роден на 12 октомври 1944 г. в уважавано лекарско семейство в гр. Варна. Математическите му способности се проявяват още в училище

и това определя бъдещата му кариера. През 1962 г. Троянски завършва с отличен успех гимназия в родния си град и след конкурс е приет да следва математика в университета в Харков, СССР. Механо-математическият факултет на този университет има вековни традиции, свързани с прославените имена на работилите в него големи руски математици М. В. Остроградский, В. А. Стеклов и А. М. Ляпунов. Троянски е един от най-добрите студенти и в трети курс избира функционалния и комплексния анализ за научно направление на дипломната си работа. В Харков съществува прочута школа в тази област – фиг. 1.



Фиг. 1. Научното родословие на академик Станимир Троянски в прочутата харковска и украинска научна школа по функционален анализ. Освен професор Кадец влияние върху формирането на Станимир Троянски имат известните учени Пелчински и Линденщраус, които от своя страна са силно повлияни от идеите на Дворецки, както и от класиците на функционалния анализ Банах и Мазур

Началото на изследванията в Харков полага проф. С. Н. Бернщайн, който получава професура през 1907 г. след завръщането си от Париж и остава в Харков до 1933 г., след което се премества в Ленинград. Поради това Бернщайн не се счита за основател на украинската школа по функционален анализ – нейните трима основатели са професорите М. Г. Крейн, Н. И. Ахиезер и Б. Я. Левин. Акад. Троянски принадлежи към клона на школата, тръгващ от проф. Левин, който идва от Одеса в Харков през 1949 г. Един от учениците на проф. Левин е проф. М. И. Кадец, който дълго време е водеща фигура в областта на изследванията по теория на банаховите пространства не само в Харков, но и в целия Съветски съюз. Станимир Троянски намира отличен учител в лицето на Кадец и естественият резултат от това е, че Троянски бързо започва да получава собствени интересни резултати в областта

на геометрията на банаховите пространства. Освен Кадец влияние върху научното развитие на Троянски оказват и лекциите на видните украински математици А. В. Погорелов, Б. Я. Левин и Н. И. Ахиезер. Под ръководството на М. И. Кадец, Станимир Троянски написва дипломна работа в областта на фукционалния анализ. Основата на дипломната работа е установяването на хомеоморфизъм на пространствата $c_0(\Gamma)$ и $l_1(\Gamma)$ за произволно Γ, което дава положителен отговор на въпрос, поставен през 1958 г. от полските математици Ч. Бесага и А. Пелчински. При развитие на апарата, които установява хомеоморфизма, Троянски използва и развива идеите на Бернщайн за най-добрите приближения. Още като студент, в началото на 1967 г., Станимир Троянски, по покана на А. Пелчински, посещава Математическия институт на Полската академия на науките във Варшава. Така започва почти ежегодното посещение на семинара по Банахови пространства във Варшава, ръководен от А. Пелчински. На този семинар С. Троянски се запознава с работите на израелския математик И. Линденщраус. През 1970 г. Троянски решава важна задача, по пренормиране на Банахови пространства, поставена от Линденщраус, като съчетава методите на най-добрите приближения с апарата за проекционно разлагане на единичния оператор, създаден от Линденщраус. От този момент нататък С. Троянски е редовно канен на ежегодните конференции по геометрия на Банаховите пространства, организирани от Линденщраус и Пелчински.

Още като студент Троянски успява да докаже аналога в крайномерно реално пространство на теоремата на Риман за множеството от сумите на пермутациите на условно сходящите редове, известен като теорема на Леви-Щайниц, построява първи пример на безкрайномерно пространство на Фреше, в което е вярно твърдението на теоремата на Леви-Щайниц, и доказва, че в равномерно гладко Банахово пространство това твърдение е в сила за условно сходящи редове, удовлетворяващи допълнително условие. Изследванията на Станимир Троянски логично водят до защита през 1970 г. в Харков на кандидатска дисертация на тема ***Топологическая эквивалентность некоторых несепарабельных пространств Банаха.*** В дисертацията са изложени решенията на по-горе споменатите задачи, поставени съответно от Ч. Бесага-А.Пелчински и И. Линденщраус. Троянски успешно се справя с всички препятствия на пътя, водещ към защитата на тази дисертация, и така започва една успешна научна кариера. От 1967 г. до 1976 г. Станимир Троянски е математик и научен сътрудник в Института по математика и механика при БАН. От 1976 г. той е доцент във Факултета по математика и информатика на СУ „Св. Климент Охридски“. През 1982 г. Троянски защитава дисертация за научната степен доктор на математическите науки, озаглавена ***Някои геометрични и апроксимационни задачи от теорията на банаховите пространства***. През 1985 г. Станимир Троянски е избран за професор във ФМИ на СУ.

Освен активна научна дейност академик Троянски развива и активна преподавателска дейност както в чужбина (гост професор в университетите в Айова, Бордо, Гранада и Валенсия, в университета Комплутенсе, Мадрид и Юнивърсити Колидж, Лондон, както и редовен професор в Университета в Мурсия, Испания), така и в България. В периода 1985–1999 г. Троянски ръководи катедрата по математически анализ на ФМИ на СУ и активно подпомага осъвременяването на съдържанието и начина на изложение на курса по Математически анализ, а курсът по Функционален анализ става задължителен за студентите по математика. Троянски е ръководител

на 9 защитени кандидатски/докторски дисертации. Днес учениците му работят в различни университети в България, Испания, САЩ.

Станимир Троянски полага големи усилия и има големи заслуги за утвърждаването на „Сердика математическо списание“ като дългогодишен главен съредактор на това първо специализирано списание по математика у нас. В допълнение академик Троянски участва в редколегиите на Revista de la Real Academia de Ciencias, Serie A: Matematicas, (от 2000 г.), Revista Matematica Universidad Complutense de Madrid (2002–2010), Вестник Томского Гос. Университета, Математика и механика (от 2014 г.). От 2000 г. Станимир Троянски е асоцииран чуждестранен професор в Департмент по математика, Университет на Мурсия, Испания, а от 2009 г. е професор в същия департамент. Троянски е автор и съавтор на над 90 публикации, от които една монография и две учебни пособия. Сред списанията, в които са публикувани резултатите му, са: Mathematische Annalen, Proceeding of the London Mathematical Society, Journal of Functional Analysis, Journal of the London Mathematical Society, Canadian Journal of Mathematics, Israel Journal of Mathematics, Bulletin of the London Mathematical Society, Proceeding of the American Mathematical Society, Studia Mathematica и др. Забелязани са над 1000 цитирания на публикациите му, а в допълнение Станимир Троянски има изнесени над 120 доклада. Участвал е в над 10 национални и международни проекти и е бил ръководител на ТЕМПУС-проекти от българска страна. По тези проекти са изпратени на специализация в Западна Европа редица преподаватели и студенти.

Научната и преподавателската дейност на Станимир Троянски е високо ценена у нас и в чужбина. Доказателство за това признание е организираната в Албасете, Испания от 10 до 13 юни 2014 г. международна конференция по „Геометрия на банаховите пространства в чест на 70-годишнината на С. Троянски“ с пленарни доклади от повечето от най-известните специалисти в областта и с повече от 30 други доклади и съобщения. Станимир Троянски е носител на почетен знак „Св. Климент Охридски“ със синя лента през 2004 г. Той е почетен член на Съюза на математиците в България от 2018 г.

По време на дългата си и успешна научна кариера, продължаваща и досега, Станимир Троянски има множество достижения, високо ценени от специалистите. Само няколко от тези достижения в годините преди професурата на Станимир Троянски са:

• Доразвиване и систематично прилагане на метода на еквивалентното пренормиране, развит от Кадец, състоящ се в конструиране в изучаваното банахово пространство на еквивалентна подходяща норма, близка до хилбертовата.

• Теорема на Линденщраус-Троянски (1971). Троянски изследва класа на банаховите пространства с локално равномерно изпъкнала (ЛРИ) норма и решава проблем, формулиран от Линденщраус, като доказва, че всяко слабо компактно породено пространство, в частност всяко рефлексивно пространство, допуска еквивалентно ЛРИ пренормиране. Така Троянски отваря пътя за изследване на ЛРИ и диференцируеми по Фреше норми в несепарабелни пространства. Следствие от доказателството на Троянски е, че всяко изпъкнало слабо компактно подмножество на банахово пространство е изпъкнала обвивка на строго изтъкнатите си точки – теорема на Линденщраус-Троянски.

• През 1979 г. Троянски получава чрез въвеждане на изброими покрития пър-

ва линейно-топологична характеризация във вероятностни термини на банаховите пространства, притежаващи ЛРИ еквивалентна норма. Тази идея предхожда въведената по-късно концепция за σ-фрагментируемост.

Активната творческа дейност на Станимир Троянски продължава и след 1985 г. Само няколко от многобройните резултати от тази дейност са:

• Разработена е удобна за прилагане линейно-топологична характеризация на банаховите пространства, допускащи еквивалентно ЛРИ пренормиране в термините на изброими покрития, такива че за всяка точка от пространството може да се намери съдържащо я множество с произволно малък диаметър, което е сечение на елемент от покритието и подходящо полупространство.

• Публикувана е монографията А. Молто, Х. Орихуела, С. Л. Троянски, М. Валдивиа ***A Non-linear Transfer Technique for Renorming*** (2009) г. в поредицата Lecture Notes in Mathematics. В нея са описани нелинейните трансферни техники, свързани с прилагането на гореспоменатата характеризация, позволяващи получаване на всички по-известни резултати за ЛРИ пренормиране.

• Изследвано е съществуването на еквивалентни равномерно изпъкнали във всяко направление и равномерно диференцируеми по Гато норми в различни класове от банахови пространства и са изучени различни свойства на изпъкналост и гладкост на пространствата на Орлич.

Резултатите по еквивалентно пренормиране, получени от Троянски и сътрудници, са описани в класическите монографии на M. M. Day, Normed linear spaces (Springer) на J. Diestel, Geometry of Banach spaces, Lecture Notes in Mathematics (Springer); J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, II (Springer).

Научните изследвания и преподавателската дейност на академик Троянски продължават и днес. Пример за това са последните му публикации от 2019 година: Approximation of norms in Banach spaces (*Journal of Functional Analysis*), Operator ranges and quasicomplements subspaces of Banach spaces *(Studia Mathematica),* Norming subspaces of Banach spaces *(Proceeding of the American Mathematical Society)* и Polyhedrality and decomposition *(Quarterly Journal in Mathematics).*



Член-кореспондент проф. дмн Иван Димовски

Член-кореспондент проф. дмн Иван Христов Димовски е роден на 7 юли 1934 г. в с. Патрешко, Троянска околия. Основно образование завършва през 1948 г. в с. Орешак, а през 1952 г. завършва средно образование в смесената гимназия в гр.

Троян. Още като ученик Иван Димовски показва силен интерес към математиката, който е пробуден и стимулиран от учителя му по математика Пенчо Балев. Този интерес скоро дава резултати – през учебната 1950/51 г. Иван Димовски се явява на Първата национална математическа олимпиада и печели първо място. Това предопределя пътя му в живота и от 1952 г. до 1957 г. Иван Димовски следва математика (научно-производствен профил) във Физико-математическия факултет (ФМФ, днес Факултет по математика и информатика) на Софийския университет. Никак не е без значение и фактът, че Димовски се включва активно в работата на известния кръжок на тогавашния доцент Ярослав Тагамлицки, в който участват и други студенти, станали по-късно известни математици.

След завършване на университета през 1957 г. Димовски е разпределен като учител в V средно училище, гр. Русе. В периода 1958–1959 г. е асистент по математика във ВИМЕСС Русе (днес Русенски университет „Ангел Кънчев“). В края на 1959 г. Димовски е назначен с конкурс за младши научен сътрудник в Математическия институт (днес Институт по математика и информатика) при БАН в секцията по *Аналитична механика* с ръководител проф. Благовест Долапчиев. Грижата за квалификацията на кадрите по онова време е систематична и целенасочена и през учебната 1961/62 г. Димовски е на специализация в Московския държавен университет в катедрата по Теория на еластичността. Иван Димовски се хабилитира като ст.н.с. II ст. в секцията по *Комплексен анализ* през 1969 г., защитава докторска дисертация (дмн) на тема *Конволюционен метод в операционното смятане* през 1977 г. и е избран за професор по математически анализ през 1982 г.

Член-кореспондент Димовски има значителен научно-организационен принос за укрепването и развитието на Института по математика и информатика при БАН. От 1986 до 2004 г. той ръководи секцията Комплексен анализ към института. Димовски организира редица международни конференции като например *Международна конференция по обобщени функции и операционно смятане* във Варна през 1975 г. и Международна конференция по комплексен анализ и приложения, съчетана със *Симпозиум по обобщени функции и операционно смятане*, отново във Варна, през 1991 г. През 1994, 1996, 1999 и 2003 г. Димовски е съорганизатор на международните работни срещи *Трансформационни методи и специални функции* (ТМСФ) в България.

Иван Димовски е ръководил 4 научни проекта към Фонд научни изследвания на МОН и няколко международни научни проекти между Института по математика при БАН, на Полската академия на науките и на Сръбската академия на науките и изкуствата.

В периода 2005–2009 г. е председател на Специализирания научен съвет по приложна математика и механика към ВАК. Димовски сътрудничи на редица известни чуждестранни издателства и списания като рецензент и като член на редакционните колегии на Integral Transforms and Special Functions, Fractional Calculus and Applied Analysis, Journal of Inequalities and Special Functions и др. Освен това член-кореспондент Димовски има голяма научно-преподавателска и методическа дейност. От 1963 г. до 1973 г. той чете основните курсове за специализацията Механика към Факултета по математика и механика на Софийския университет: Теория на еластичността, Механика на непрекъснатите среди, Теория на потенциала, Операционно смятане, Вариационно смятане, Специални функции и др. Чете лекции по Матема-

тически анализ за фармацевти, биолози, химици и физици в Софийския и Пловдивския университети. От 1987 до 2007 г. Иван Димовски чете лекции в Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“ по: История на математиката, Основи на математиката, Числови системи и операционно смятане. Димовски е бил гост професор в Унгария, Полша, ГДР, СССР, Югославия, Испания, Кувейт, Венецуела и др.

Член-кореспондент Димовски има 10 докторанти, от които трима са професори и доктори на науките, а други четирима са хабилитирани, множество дипломанти и редица сътрудници от различни научни институции у нас. Иван Димовски развива активна популяризаторска дейност като автор и преводач на научна и учебна математическа литература. Член-кореспондент Димовски е носител на наградата на Софийския университет и БАН на името на акад. Никола Обрешков (1979) и на Почетния знак „Марин Дринов“ на БАН (2004).

Творчеството на Иван Димовски – научно, научно-популярно и преводаческо, обхваща около 200 публикации. Димовски е автор на повече от 100 научни публикаци в наши и чуждестранни списания и на монографията (на английски език) I. Dimovski, Convolutional Calculi, публикувана от Издателството на БАН (първо издание, 1982) и от престижното холандско издателство *Kluwer* (второ издание, 1990). В нея се съдържат повечето от резултатите му от този период върху т.нар. *конволюционно смятане*, ключова роля в което играе въведеното от него през 1966 г. понятие *конволюция на линеен оператор*, откриващо пътя за широки обобщения на операционното смятане на Микусински. Интересно в този аспект е заглавието на първата статия на Димовски – *Единственост на полето на Микусински*, публикувана във том 5, книжка 1 на Физико-математическото списание през 1962 г.

Изследванията на Димовски по конволюционно смятане са цитирани многократно, включително и в научни монографии, издадени от известни издателства в чужбина. Така Димовски и разработеният от него конволюционен метод често се цитират като *конволюционния метод на Димовски* в книги, обзори, статии и дори в заглавия на дисертации в чужбина.

Конволюционният метод води до редица нови резултати, получени от Димовски и сътрудници. Разработен е нов вариант на принципа на Дюамел за редица важни нелокални гранични задачи за частни диференциални уравнения на математическата физика. Чрез конволюционния метод е изследвана структурата на функциите на Грийн за нелокални гранични задачи. Намирането на многомерни конволюции води до обобщаване на принципа на Дюамел не само за времевата променлива при еволюционни уравнения, но и за пространствените променливи. Димовски прилага конволюционния метод и в областта на интегралните трансформации и намира нови конволюции на редица известни вече интегрални трансформации. В допълнение Димовски въвежда най-общ клас оператори от беселов тип от произволен цял ред (наричани днес *хипербеселови оператори*) и разработва аналог на трансформацията на Лаплас за такива оператори (известен като трансформация на Обрешков). Обобщението на операторите на Поасон и Сонин (наричани днес трансформации на Поасон-Сонин-Димовски) позволява свеждане на изучаването на редица задачи за общия оператор от беселов тип до задачи за оператора за кратно диференциране, и обратно.

Иван Димовски публикува популярни статии в различни списания, най-много в

сп. Математика, и е автор на учебници и учебни пособия за средните училища, а също и съавтор на много учебници и учебни помагала: *Съвременна аритметика*, *Съвременна алгебра за учители*, *Математика* за 4., 6., 11. и 12. класове и още много други. Той е сред най-активните преводачи на математически книги у нас от английски, немски и френски на български (над 50 книги) и от български на английски – три монографии и поредици от избрани трудове на видни български математици. Първата му преведена книга е: Р. Курант и Х. Робинс *Що е математика?* – през 1967 г. Следват множество други, като например Л. Люстерник и В. Соболев *Елементи на функционалния анализ* (1975), В. И. Арнолд *Математически методи на класическата механика* (1978, 1985), 4 книги на Пойа и много други. С особен интерес човек разгръща книгата на Иван Димовски „За математиката и математиците“ (1972), където са събрани мисли и афоризми на известни математици, а също има и обширни глави, съдържащи спомени на изтъкнатите математици Благовест Долапчиев и Алипи Матеев.



Член-кореспондент проф. дмн Емил Хорозов

Член-кореспондент проф. дмн Емил Хорозов е роден в гр. София на 27.09.1949 г. Математическото си образование (магистърска степен) получава в СУ „Св. Климент Охридски“, където защитава дипломна работа под ръководството на проф. Т. Генчев. Научната кариера на Емил Хорозов получава силен тласък, когато той работи по кандидатската си дисертация в Московския държавен университет под научното ръководство на акад. В. И. Арнолд, чийто научен ръководител е самият Андрей Колмогоров, произлизащ от световно известната школа на Николай Лузин, наричана понякога в негова чест Лузитания. И така, в творческата атмосфера на Лузитания, Емил Хорозов защитава кандидатска дисертация по математика през 1978 г. на тема *Бифуркации симетричных векторных полей на плоскости.* Следва дисертация за научната степен доктор на математическите науки, защитена през 1990 г., когато Емил Хорозов е доцент в СУ „Св. Климент Охридски“. Темата на тази дисертация е *Хамилтонови системи и абелеви интеграли.*

Академичната кариера на Емил Хорозов е тясно свързана със СУ “Св. Климент Охридски“, където от 1979 г. той е асистент, през 1984 г. става доцент, а от 1994 г. е професор. От 2002 г. Емил Хорозов е и професор в ИМИ–БАН, а от 2004 г. е член-кореспондент на БАН. Член-кореспондент Хорозов развива активна международна изследователска дейност като гост професор в реномирани университети в

САЩ, Германия, Франция, Великобритания, Холандия и Белгия и е изнесъл доклади по покана на множество международни конференции, сред които ще отбележим само конференцията на остров Елба, Италия в чест на годишнината на Хирота през 2002 г., конференцията в гр. Поатие, Франция в чест на годишнина на П. ван Мьорбеке през 2004 г. и конференцията "Contemporary mathematics" в чест на 80-ата годишнина на В. И. Арнолд през 2017 г. в Москва, Русия. Емил Хорозов е рецензент по дисертации и конкурси за доценти и професори в България (ФМИ–СУ, ИМИ–БАН, ИЯИЯЕ–БАН, ФзФ–СУ) и в чужбина (САЩ, Франция, Белгия), както и чест рецензент в реномирани списания като например Communications in Mathematical Physics, Duke Mathematical Journal, Journal of Physics A: Mathematical and Geneneral, Nonlinearity и други. Професор Хорозов е редактор в списание „Сердика математическо списание" от 1994 до 2009 г. и редактор в "Годишник на СУ "Св. Климент Охридски"" от 1996 г.

Член-кореспондент Хорозов е носител на наградата „Акад. Н. Обрешков" за математически науки през 1990г., а през 2000 г. е номиниран за Chair of the School of Mathematics at Georgia Institute of Technology. През 2009 г. в чест на 60-ата му годишнина Националната научна фондация на САЩ спонсорира международна конференция в София с редица изтъкнати поканени докладчици и посетена от учени от водещи световни научни центрове като университетите Бъркли, Корнел, Бостън, Единбург, Амстердам, Лозана и други.

Освен научната си дейност Емил Хорозов развива и активна преподавателска дейност у нас и в чужбина (САЩ, Франция). От 1970 г. насам проф. Хорозов е водил основните курсове по математически анализ, обикновени и частни диференциални уравнения и геометрия, както и спецкурсове у нас и в чужбина по Хамилтонови системи, Риманови повърхнинни, теория на бифуркациите, интегруеми системи, математически основи на квантовата теория на полето и др. Професор Хорозов е ръководил учебен семинар по обикновени диференциални уравнения, учебен и научен семинар по динамични системи и теория на числата и научен семинар по математическа физика. Той има 18 защитили дипломанти, от които четирима са професори (*от тях двама в САЩ и един във Франция*), а трима от дипломантите му са удостоени с престижни награди и грантове в САЩ (наградата на името на Херман Вайл за теоретико-групови методи в математическата физика, Алфред Слоун грант и Fellowship на American Mathematical Society). Член-кореспондент Хорозов има и петима успешно защитили докторанти, един от които е професор в университета на Тулуза, Франция.

Емил Хорозов отделя много време и усилия за активна административна и обществена дейност. Той е декан на Факултета по математика и информатика на СУ „Св. Климент Охридски" и член на Академичния Съвет на СУ в периода 1995–1999 г., а във Факултета по математика и информатика ръководи катедра „Диференциални уравнения" в периодите 1993–2000 г. и 2006–2010 г. и е член на Факултетния съвет от 1989 г до 1999 г. и от 2007 г. до 2010 г. Освен това от 2003 г. до 2012 г. професор Хорозов е член на научния съвет на Института по математика и информатика при БАН.

Интересен факт, свидетелстващ за разностранността на научната и административната дейност на Емил Хорозов, е, че той е бил член на научния съвет на Центъра за социологически изследвания към Софийския университет в периода 1997–2003 г.

В допълнение член-кореспонзент. Хорозов развива активна дейност по линията на Висшата атестационна комисия и фонд „Научни изследвания“. Той е бил член на специализирания научен съвет по математика и механика в периодите 1990–1992 г. и 2000–2007 г., член на научно-експертната комисия на ВАК по математически науки в периода 1992–1997 г и от 2001 до 2007 г., като от 1992 г. до 1995 г. е бил и заместник-председател на тази комисия. През 1990 и 1991 г. Емил Хорозов е член на Президиума на ВАК, а в периода 2010–2011 г. той е директор на фонд „Научни изследвания“ към МОН. От септември 2015 г до февруари 2016 г. проф. Хорозов е съветник на министъра на образованието и науката. От 2018 г. Емил Хорозов е член на Етичната комисия към Европейския математически съюз.

Резултатите от научната дейност на чл.-кор. Емил Хорозов са впечатляващи. Наукометричните му показатели са , както следва – над 1000 цитата, h-index = 17, g-index = 32. Научните постижения на Емил Хорозов са многобройни. По-долу се спираме само на няколко от тях.

Член-кореспондент Хорозов има значителни приноси в областта на теорията на бифуркациите и граничните цикли. Той изучава бифуркациите на семейства от векторни полета в равнината в околност на особена точка при наличие на симетрия относно въртене на 180 или 120 градуса. Получените резултати са интересни не само от гледна точка на математическата теория, но също и от гледна точка на инженерните приложения на тази теория. Поради това резултатите се радват на значителен интерес от изследователи от областта на инженерните дисциплини. Резултатите са описани в сборника “Mathematical events of the twentieth century”, издаден от издателство Springer през 2006 г.

Фундаментални са приносите на член-кореспондент Хорозов в областта на изследванията, свързани със 16-ия проблем на Хилберт – оценката на максималния брой гранични цикли на полиномиални векторни полета в равнината чрез степента на дефиниращите ги полиноми. Единствената точна оценка във версията на проблема на Хилберт, известна като проблем на Хилберт–Арнолд е дело на учени под ръководството на Емил Хорозов, а съответната теорема днес е известна като теорема на Гаврилов–Хорозов–Илиев.

Емил Хорозов има големи приноси и в областта на изследванията на Хамилтонови системи. От многобройните резултати на Хорозов в тази област акцентираме само на изучаването на геометрията на компактифицираните многообразия (многообразия на Прим с поляризация 1:2) за задачата на Ковалевска в комплексната област. Тези резултати позволяват представянето във форма на Лакс на уравненията за движение за случая на Ковалевска – така бе решена последната класическа задача, за която такова представяне не беше известно. Резултатите са изложени в много монографии и в престижния доклад на Управляващия борд на Националния научен съвет на САЩ, а авторът е именитият член на Кралското научно дружество на Великобритания Джералд Марсден.

Особен интерес представляват резултатите, получени от член-кореспондент Емил Хорозов в областта на представянията на безкрайномерни алгебри на Ли и теорията на солитоните. Един такъв резултат е например конструирането на Лаксова двойка за Пфафова верижка (име дадено от Хорозов и съавтори), а друг резултат е установената връзка между верижката на Тода и моделите на Пенер, която открива големи възможности за резултати в областта на статистическите суми, свързани с модели

на Пенер. Трети важен резултат е свързан с разработените методи за построяване на биспектрални оператори и с търсенето на ортогонални полиноми, които са собствени функции на диференциални оператори. Накрая нека отбележим и резултата, свързан с q-диференчното уравнение на Кадомцев–Петвиашвили, позволяващ представянето на това уравнение като верижка на Тода. Този резултат има приложение например в статистическата теория на топящ се кристал.

Завършвайки този кратък биографичен обзор за 2019 г., посветен на научната кариера и научните постижения на юбилярите академик и член-кореспонденти на БАН от областта на математическите науки, се надявам, разширеното отразяване на юбилеите в българската математика да продължи и да се превърне в традиция. За разлика от други науки, в които значителните постижения често са свързани със скъпа и недостъпна за всеки изследовател апаратура, постиженията в областта на математиката обикновено са свързани с мощта на човешкия ум, който е продукт на най-скъпата, но за радост общодостъпна „апаратура“ – човешкия мозък. Поради това, не е за учудване, че много български математици имат постижения на световно ниво. Тези постижения трябва да бъдат помнени и разказвани. Така се проправя пътят към традицията, а наличието на традиции е важен елемент от силата на една национална научна школа.

Нека да пожелаем на юбилярите да се радват на добро здраве още дълги години занапред, да постигат нови успехи в живота, изследванията и обществената дейност и да продължават с подготовката на нови ученици, на които да предават традициите на математическите школи, от които идват, както и собствения си опит, който би могъл да направи от тези ученици учени от калибъра на юбилярите.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. К. Витанов. Академик Станимир Троянски на 75 години. *Списание на БАН*, *5* (2019), 67–69.

[2] Н. К. Витанов. Член-кореспондент Иван Димовски на 85 години. *Списание на БАН*, *4* (2019), 69–71.

[3] Н. К. Витанов. Член-кореспондент Емил Хорозов на 70 години. *Списание на БАН*, *5* (2019), 70–71.

[4] Р. Малеев. Академик Станимир Троянски на 70 години. *Математика и математическо образование*, **44** (2015), 19–24.

[5] В. Кирякова. 80-годишен юбилей на чл.-кор. Иван Димовски. *Списание на БАН*, *5* (2014), 80–82.

[6] Т. Тонков. Проф. дмн Иван Христов Димовски. *Математически форум*, **VI**, *5* (2004), 151–160.

[7] V. Kiryakova. On the Occasion of Prof. I. Dimovski's 70th Anniversary. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **7**, *3* (2004), 247–255.

[8] V. Kiryakova. Prof. Ivan Dimovski's 80th Anniversary (in FCAA related news, events and books). *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **17**, *4* (2014), 923–935.

Николай К. Витанов
Институт по механика
Българска академия на науките
ул. Акад. Г. Бончев, бл. 4
1113 София, България
e-mail: vitanov@imbm.bas.bg

ACADEMICIANS AND CORRESPONDING MEMBERS OF THE BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES HAVING JUBILEE IN 2019: ACADEMICIAN STANIMIR TROYANSKI, CORRESPONDING MEMBER IVAN DIMOVSKI AND CORRESPONDING MEMBER EMIL HOROZOV

Nikolay K. Vitanov

In 2019 we had three jubilees of academicians and corresponding members of the Bulgarian Academy of Sciences from the area of mathematical sciences: 75 years of Academician Stanimir Troyanski, 85 years of Corresponding Member Ivan Dimovski and 70 years of Corresponding Member Emil Horozov. In this text we present short professional and research biographies of Academician Trojanski and Corresponding Members Dimovski and Horozov. Several of the main research achievements of the three respected scientists are mentioned.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ИНДИЙСКИЯТ МАТЕМАТИК РАМАНУДЖАН

Иван Ланджев



1. Ранни години. Шрииваса Рамануджан Айенгар е роден на 22 декември 1887 г. в индийското градче Ероде, 250 мили югозападно от Мадрас (днес Шенай). Семейството му, макар със скромни доходи, е от кастата на брамините – каста на свещеници, учители и пазители на свещеното знание. Колониалните владетели на Индия създават добре структурирана система от училища в страната. На десетгодишна възраст Рамануджан вече изпъква сред връстниците си, получавайки най-високи резултати на стандартните изпити в своя окръг. Той става известен с изключителната си памет и способността си да казва наизуст дълги редици от цифри, например от десетичния запис на числото π.

По времето, когато Рамануджан е 16-годишен, в ръцете му попада книгата на Джордж Шубридж Кар *Synopsis of elementary results in pure mathematics*. Нито авторът, нито книгата могат да бъдат наречени гениални. В двата ѝ тома в рамките на 1055 страници тя представя математически резултати, номерирани от 1 до 6165, почти без доказателства и с минимални обяснения. Написана е от преподавател, готвещ студенти за математическия трайпос в Кембридж. Сбитият ѝ стил е много сходен с начина, по който Рамануджан ще излага по-късно своите резултати.

Математическите умения на Рамануджан не остават незабелязани и той получава стипендия за обучение в колеж. На 17-годишна възраст той постъпва в Държавния колеж в Кумбаконам. В колежа Рамануджан започва да учи математика и да прави собствени изследвания. Постепенно математиката се превръща в единственото му занимание и той пропада по всички останали предмети. Губи стипендията от 32 рупии, равняваща се на една и половина месечни заплати на баща му, и бяга от къщи, измъчван от угризения.

През 1906 г. той постъпва отново в колеж – Pachaiyappa's College в Мадрас. Индийската образователна система към тогавашния момент е такава, че за получаване на степен от колежа е необходимо да се положи изпит, който е администриран от Университета в Мадрас. През 1907 г. Рамануджан се явява и отново пропада. Така в годините от 1904 до 1909 г. Рамануджан е през по-голямата част от времето извън училище, без степен, без работа, без връзка с други математици, но с книгата на Кар и с математическите си занимания. Според великия Якоби „Младите математици трябва да бъдат хвърлени в студените води, за да се научат да плуват или да се удавят. Много от тях отлагат всичко, докато не овладеят нещата, направени от други и свързани с тяхната задача. В резултат малцина добиват желание за независими изследвания“. За пет години Рамануджан е сам в „студените води“. Той не получава наставления, окуражаване, пари. През тези години, той започва да записва резултатите си в бележници.[1] Първият достигнал до нас е изписан с особено зелено мастило и съдържа 200 страници, изпълнени с формули за хипергеометрични редове, верижни дроби, безкрайни суми ...

През 1909 г. майка му урежда брак с 9-годишно момиче, Янаки, което заживява с него три години по-късно. Рамануджан започва да се издържа с преподаване на уроци по математика и много бързо става известен в Мадрас като математическо чудо. Започва да публикува в наскоро откритото списание *Journal of the Indian Mathematical Society*. Първата му статия, върху някои свойства на числата на Бернули, излиза през 1911 г. Когато опитите на приятелите му за издействане на стипендия пропадат, той започва да търси работа и намира такава като чиновник (или по-точно човек-калкулатор) на пристанището в Мадрас. Непосредственият му началник Наряна Айер се оказва човек с интереси в академичната математика и за-

[1] Ето една красива формула, която Рамануджан получил още като ученик:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}=3.$$

Рамануджан получава това по следния начин:

$$\begin{aligned} n(n+2) &= n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}} \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)(n+5)}}} \\ &= \qquad\qquad \ldots \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\ldots}}}} \end{aligned}$$

Остава да положим $n=1$ в безкрайния корен. Разбира се, Рамануджан не се интересува от законността на преминаването към безкраен израз.

почва да го подкрепя. Това продължава през целия живот на Рамануджан. Самият директор на порт Мадрас сър Франсиз Спринг е виден британски инженер и отчасти чрез него Рамануджан започва да общува с технически образовани британци в Мадрас.

Междувременно приятелите на Рамануджан продължават да го подкрепят и той започва да пише с тяхна помощ на британски математици. Не е известно със сигурност, на кого той пише най-напред. Малко преди смъртта си Литълууд ще спомене имената на Х. Ф. Бейкър и Е. У. Хобсън. Никой от двамата не е добър избор: Бейкър се занимава с алгебрична геометрия, а Хобсън с математически анализ. Интересите и на двамата са доста далеч от това, което прави Рамануджан. Никой от тях не отговаря. Така на 16 януари 1913 г. – Рамануджан изпраща писмо на Г. Х. Харди.

2. Кореспонденцията с Харди. Писмото[2] започва с думите: „Уважаеми господине, позволявам си да Ви се представя като чиновник в пристанищния тръст в Мадрас със заплата от 20 лири на година. Сега съм на около 23 години ...“ По-нататък остава впечатление, че авторът се опитва да изясни идеята за аналитично продължение, обобщавайки неща като функцията факториел върху нецели числа. Той пише (малко нескромно): „Всички мои изследвания се основават на тази идея и аз я развих толкова далеч, че местните математици не могат да разберат по-високия полет на моята мисъл.“ По-нататък четем мъглявото твърдение, че авторът разполага с метод за преброяване на простите числа до дадено място и писмото завършва с думите: „Аз съм беден, но ако считате, че тук има нещо ценно, бих желал да публикувате моите теореми, ... Искам да ме извините за грижите, които Ви създавам, и оставам, Уважаеми Господине, искрено Ваш, Ш. Рамануджан.“

[2]Dear Sir, I beg to introduce myself to you as a clerk in the Accounts Department of the Port Trust Office at Madras on a salary of only £20 per annum. I am now about 23 years of age. I have had no University education but I have undergone the ordinary school course. After leaving school I have been employing the spare time at my disposal to work at Mathematics. I have not trodden through the conventional regular course which is followed in a University course, but I am striking out a new path for myself. I have made a special investigation of divergent series in general and the results I get are termed by the local mathematicians as “startling”.

Just as in elementary mathematics you give a meaning to a^n when n is negative and fractional to conform to the law which holds when n is a positive integer, similarly the whole of my investigations proceed on giving a meaning to Eulerian Second Integral for all values of n. My friends who have gone through the regular course of University education tell me that $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \Gamma(n)$ is true only when n is positive. They say that this integral relation is not true when n is negative. Supposing this is true only for positive values of n and also supposing the definition $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ to be universally true, I have given meanings to these integrals and under the conditions I state the integral is true for all values of n negative and fractional. My whole investigations are based upon this and I have been developing this to a remarkable extent so much so that the local mathematicians are not able to understand me in my higher flights.

Very recently I came across a tract published by you styled *Orders of Infinity* in page 36 of which I find a statement that no definite expression has been as yet found for the number of prime numbers less than any given number. I have found an expression which very nearly approximates to the real result, the error being negligible. I would request you to go through the enclosed papers. Being poor, if you are convinced that there is anything of value I would like to have my theorems published. I have not given the actual investigations nor the expressions that I get but I have indicated the lines on which I proceed. Being inexperienced I would very highly value any advice you give me. Requesting to be excused for the trouble I give you.

I remain, Dear Sir, Yours truly, S. Ramanujan

Следват девет страници (поне две страници са загубени), в които са изложени над 120 математически резултата. Някои равенства изглеждат абсурдни, като това, че сумата на естествените числа е (може да се мисли) равна на $-1/12$:[3]

$$1+2+3+4+5+6+\ldots=-\frac{1}{12}.$$

или пък, че

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots=\frac{1}{120}.$$

Има и екзотични неща – страници, изпълнени с формули като тези:

(1)
$$\frac{1}{1^3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots$$
$$=\frac{1}{6}(\log 2)^3-\frac{\pi^2}{12}\log 2+\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}=\ldots\right)$$

(2)
$$1+9\left(\frac{1}{4}\right)^4+17\left(\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}\right)^4+25\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}\right)^4+\ldots=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\left(\Gamma(\frac{3}{4})\right)^2}$$

(3)
$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-\ldots=\frac{2}{\pi}$$

(4)
$$\frac{1^{13}}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^{13}}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^{13}}{e^{6\pi}-1}+\ldots=\frac{1}{24}$$

(5)
$$\frac{\coth\pi}{1^7}+\frac{\coth 2\pi}{2^7}+\frac{\coth 3\pi}{3^7}+\ldots=\frac{19\pi^7}{56700}$$

Каква била реакцията на Харди? Най-напред той се посъветвал с Литълууд. Известни ли са тези равенства? Или са съвсем погрешни? Някои от тях са разпознати

[3]Тук Рамануджан пресмята стойността на ζ-функцията в -1. Започваме с функционалното уравнение за ζ-функцията

(∗)
$$\zeta(1-s)=2^{1-s}\pi^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s),$$

където

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^z}{z(z+1)\ldots(z+n)},\ \ z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}.$$

Полагаме $s=2$ в (∗) и като използваме $\Gamma(2)=1$ получаваме

$$\zeta(-1)=-\frac{\zeta(2)}{2\pi^2}.$$

Добре известно е, че

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Оттук

$$\zeta(-1)=1+2+3+\ldots=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{6}=-\frac{1}{12}.$$

и са верни. Други са съвсем неизвестни. По-късно той прави прочутата забележка, че тези формули „трябва да са верни, защото ако не са, то никой не би имал въображението да ги открие“.

Бъртран Ръсел пише, че в деня след получаване на писмото намира „Харди и Литълууд в състояние на дива възбуда, защото считат, че са открили втори Нютън – чиновник в Мадрас, печелещ 20 лири на година“. Харди показва писмото от Рамануджан и дори отправя запитване до държавния департамент, занимаващ се с Индия. Отнема му седмица да отговори, започвайки с премерено чувство на възхищение: „Бях извънредно заинтересован от Вашето писмо и теоремите, които формулирате“. И продължава: „Все пак ще разберете, че преди да мога да оценя правилно стойността на това, което сте направили, е съществено да видя доказателства на някои от Вашите твърдения“. Това е важно – за Харди не е достатъчно да знае, той иска да бъде убеден, да му се разкаже приказка, да се обясни, защо това, което се твърди, е вярно. Разбира се, Харди би могъл сам да се опита да докаже, но за него е важно да разбере, как мисли Рамаунджан и още по-важно – от какъв алибъръ е като математик.

Резултатите на Рамануджан са разделени в три класа: вече известни, нови и интересни, но може би не важни, и накрая – нови и потенциално важни. Един от резултатите е поставен веднага в третата група – твърдението за броя на простите числа. Но Харди добавя, че „почти всичко зависи от строгостта на методите“. Харди очевидно е направил своето малко проучване, защото писмото му се позовава на статията на Рамануджан за числата на Бернули. Но казва само: „Надявам се да получа отговор от Вас колкото може по-скоро“.

Рамануджан отговаря наистина бързо и писмото му е забележително. Започва с това, че е очаквал отговор, подобен на този от „лондонския професор“ (Хил), предупреждаващ го да не попада в „капана на разходящите редове“. На желанието на Харди за доказателства той откликва с думите: „Ако Ви кажа методите си, то със сигурност ще се присъедините към лондонския професор ... ако Ви кажа за това[4], то ще помислите, че съм за лудницата ... пиша тези редове, за да Ви убедя, че не можете да разберете методите ми само по няколко думи“. Той пише още, че основната му цел е някой да провери резултатите му така, че да може да получи стипендия, защото „аз вече съм полугладен човек; за да запазя мозъка си, имам нужда от храна“. Изненадващо, Рамануджан се радва най-много на резултатите, които Харди поставя в първата група – тези, които са вече известни – „защото резултатите ми са проверени, макар аргументацията ми да има плитки основи“. С други думи, Рамануджан не е сигурен, че резултатите му са верни и е радостен, че това е така.

Рамануджан не дава обяснение как са получени тези резултати. Със сигурност той използва смес от традиционни математически доказателства, емпирични данни, получени от пресмятания, и много, много интуиция. Той започва кореспонденция по детайлите от доказателствата, които бил в състояние да предостави. Харди и Литълууд изглежда имат намерение да организират усилията му. Те продължават да се чудят дали Рамануджан е „един Ойлер“ или просто „един Якоби“. Литълууд пише: „нещата, отнасящи се до простите числа, са грешни“ и обяснява как Рама-

[4] резултата $1 + 2 + 3 + \ldots = -1/12$.

нуджан неправилно приел, че Римановата ζ-функция няма нули извън реалната ос, докато всъщност тя има безбройно много. Това е и същността на хипотезата на Риман.

Харди и Литълууд нямат точен модел за начина на мислене на Рамануджан. Литълууд дори предположил, че Рамануджан не представя доказателства, защото се страхува да не му ги откраднат. Краденето на резултати в онези дни било проблем в академичните среди, точно както и днес. Рамануджан казва, че от това допускане го е заболяло и уверява, че не е загрижен за това, дали методът му може да бъде използван от други. Той казва още, че е открил този метод преди осем години, но не бил намерил човек, който да го оцени. Сега бил готов да предостави без резерви малкото, което има.

3. В Индия или Англия – това е въпросът. В първите месеци на 1913 г. Харди и Рамануджан разменят писма, в които Рамануджан описва свои резултати. Харди критикува казаното от него и настоява за доказателства и традиционно математическо описание. Следва пауза и през декември 1913 г. Харди пише отново, за да обясни, че най-амбициозните резултати на Рамануджан, тези за разпределението на простите числа, са със сигурност грешни. Харди пише: „Теорията за простите числа е изпълнена с капани, заобикалянето на които изисква най-пълно обучение в модерните методи“. Той добавя и, че ако Рамануджан успее все пак да докаже резултатите си, то това ще бъде „може би най-забележителното постижение в историята на математиката“.

Междувременно още преди да отговори на първото писмо на Рамануджан, Харди започва да проучва възможността да го доведе в Кеймбридж. През януари 1914 г. в Мадрас пристига младият математик Ерик Харолд Невил[5]. Той изнася цикъл от лекции, но, още по-важно – донася съобщение, че Харди е (по думите на Рамануджан) „много заинтересован да го вземе“. Още през февруари предната година Рамануджан е разговарял със своя наставник, „много ортодоксален брамин, имащ скрупули към пътуването в чужбина“, който е казал, че Рамануджан не бива да заминава. Самият Рамануджан също има съмнения, подсилвани от това, че там може би ще трябва да полага изпити. Невил разсейва всичките му съмнения, като обяснява, че парите няма да са проблем, че английският му е достатъчно добър, че няма да се налага да държи изпити и че може да остане вегетарианец и в Англия.

Харди предполага първоначално, че няма да има бюрокротични трудности да доведе Рамануджан в Англия. Но не става така. Колежът „Тринити“ (Trinity College) не е готов да осигури финансиране. Харди и Литълууд предлагат да дадат част от парите сами. Невил пише до Университета на Мадрас, че „откриването на гения на Рамануджан обещава да бъде най-интересното събитие на нашето време в математическия свят“ и предлага Университетът да участва със средства. Приятелите на Рамануджан в Индия издействат помощ от 75 рупии (5 лири) на месец от 1 май 1913 г. за период от две години. Те го подтикват да кандидатства за стипендия за магистратура в Университета на Мадрас. Хората от университетската администрация настояват на това, че правилниците не разрешават да се даде стипендия на човек като Рамануджан, който няма университетска степен. Но те подсказват и решение. В раздел XV на закона за устройство и раздел 3 на закона за Индийските универ-

[5] E. H. Neville (1889–1961) е известен и като „човекът, убедил Рамануджан да замине за Англия“.

ситети от 1904 г. се разрешава даването на стипендия от Държавния департамент за образование за изнасяне на лекции по заместване, при условие, че е изразено съгласие от губернатора на Форт Сейнт Джордж. Така нещата са придвижени и в рамките само на няколко седмици Рамануджан получава двугодишна стипендия с единственото изискване да представя отчет на всеки три месеца.

На 17 март 1914 г. след изпращане, включващо някои местни знаменитости, Рамануджан се качва на борда на *Невася*, който, минавайки през Коломбо, Аден, Порт Саид, Генуа и Плимут, хвърля котва в устието на Темза на 14 април. Посреща го Невил. Отсядат в Южен Кенсингтън и прекарват няколко дни в Лондон. На 18 април Рамануджан пристига в Кеймбридж и индийските вестници гордо съобщават, че „мистър Рамануджан от Мадрас, чиито работи по висша математика предизвикаха възхищение в Кеймбридж, вече е в колежа „Тринити““.

4. Първи години в Кеймбридж. При пристигането си в Кеймбридж Рамануджан е малко плах, но ентусиазиран и жаден за знания. Може да говори на различни теми, шегува се, понякога за своя сметка, винаги е учтив и се опитва да следва местните обичаи. Родният му език е тамилски, но при пристигането му в Кеймбридж английският му е безупречен. Физически е описван като набит, но всички, които са го виждали, не пропускат да отбележат особения блясък в очите му. Рамануджан не се заобикаля с вещи; в стаята му има само няколко книги и статии. Разумен е за практическите неща като намиране на продукти за вегетарианските му ястия.

Рамануджан е финансово осигурен в Кеймбридж. Той получава годишна стипедния от 250 лири от Мадрас и 60 лири от Тринити. При това без никакви задължения, свързани с преподаване в колежа. За сравнение през 1914 г. среден работник в Англия има доход от 75 лири на година. Прагът за плащане на данъци по това време е 160 лири на година и се достига от по-малко от 7% от населението. Рамануджан праща 50 лири в Индия, за да подкрепя семейството си.

Рамануджан започва работа с Харди и Литълууд. С Литълууд се срещат веднъж седмечно, а с Харди – почти всеки ден. Рамануджан работи здраво и е много продуктивен. Той не идва в Кеймбридж да слуша лекции, но, пристигайки навреме за Великденския срок, той започва да посещава някои от тях. Някои са лекции на самия Харди, другите са на Артър Бери, преподавател от Кралския колеж (King's College London), който към този момент е малко над 50-годишен. От това време се е запазила следната случка. Една сутрин Бери пише по дъската, извеждайки някакви формули, когато вдига поглед и среща очите на Рамануджан, които сияят от възхищение. Дали господинът следи лекцията, информира се Бери, на което Рамануджан кима с глава. А дали би добавил нещо. В този момент Рамануджан става, отива до дъската и изписва няколко резултата, които Бери не е доказал до момента и въобще, както казва Бери по-късно, Рамануджан няма откъде да знае.

На 28 юни 1914 г., два и половина месеца след пристигането на Рамануджан в Англия, е извършен атентат срещу ерцхерцог Франц Фердинанд и на 28 юли 1914 г. започва Първата световна война. Това веднага се отразява на живота в Кеймбридж. Много студенти са мобилизирани. Същото се случва и с Литълууд, който започва да работи по изготвянето на балистични таблици за противовъздушните оръдия.[6]

[6] От това време е и забележката на Харди: "Even Littlewood could not make ballistics respectable, and if he could not, who can?"

Макар да не подкрепя войната, Харди също се записва доброволец, но е отхвърлен по медицински причини.

Раманудjан описва войната в писмо до майка си: „Те летят с аероплани на голяма височина, бомбардират градовете и ги разрушават. Щом се появят вражески самолети, нашите, които чакат на земята, се издигат и се отправят към тях, причинявайки разрушение и смърт“. Въпреки всичко Раманудjан продължава заниманията си с математика, като обяснява на майка си, че войната се води далеч, толкова далеч, колкото е „Рангун от Мадрас“. Появяват се и практически трудности като липсата на зеленчуци, което кара Раманудjан да помоли приятел в Индия да му изпрати с колет тамаринди и кокосово масло. Но по-важно за него е, че заради войната професорите в Кеймбридж са загубили интерес към математиката.

Раманудjан пише на приятел, че откакто е в Англия той изучава „техните методи“ и се опитва да публикува лесно и без забавяне. Образованието на Раманудjан завършва с края на *Synopsis*-а на Кар, а той не включва нищо, направено след 1850 г. Но Харди вече държи в ръце бележника на Раманудjан и вярва, че 1/3 от резултатите в него са „нови и спиращи дъха“. По-късно Уотсън ще промени тази оценка на 2/3. Много си струва да бъде публикувано, разбира се след редактиране, да се оформят резултатите, да се изберат правилните означения. „Всички ръкописи на Раманудjан минаха през ръцете ми“, ще каже по-късно Харди. „По-ранните пренаписах изцяло, но не добавих нищо към математиката.“ Раманудjан, пише Харди, „бе готов почти до абсурд да признае дори и най-малката помощ“.

5. Публикационна дейност. През 1914 г. излиза от печат само една статия в *Quarterly Journal of Mathematics* – “Modular equations and approximations to Pi”. Но в следващата година Раманудjан публикува много повече. Тогава излиза и дълга статия със заглавие “Highly Composite Numbers”, отнасяща се до тези естествени n, за които $d(n) > d(m)$, за всяко $m < n$. Понятието е въведено от Раманудjан, но може да е било известно и на Платон, който отбелязва, че идеалният брой жители в един град е 5040, тъй като това число има повече делители от всяко предхождащо го. Всъщност 5040 е деветнадесетото *високо съставно число*.

През следващите няколко години Раманудjан продължава да пише редица статии, които биват публикувани въпреки войната. Една от забележителните му статии (Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc, Ser. 2, **17**(1918), 75–115) е написана заедно с Харди и се отнася до функцията $p(n)$ – броя на разбиванията на естественото число n. Статията е класически пример на съчетаване на асимптотични с точни резултати. Тя започва със забележителната оценка

$$p(n) \sim P(n) = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

По-нататък в нея се развиват идеи на Раманудjан, които той има още в Индия, за да се получи още по-точна формула, в която старшият член е

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{\exp\left(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n-\frac{1}{24}}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \right).$$

Харди и Раманудjан доказват, че от някакво място нататък грешката е по-малка от 1/2, така че резултатът им е точен, закръгляйки до най-близкото цяло число.

6. Последни години. През май 1917 г. се появява проблем – Рамануджан се разболява. Сега се счита, че най-вероятната причина е инфекция на черния дроб, предизвикана от някакъв паразит, донесен от Индия. Рамануджан ходи от лекар на лекар и от болница в болница. Той не вярва на това, което му говорят, а и лекарите не му помагат. През някои месеци е добре и работи, през други е на легло. Той се депресира. През главата му минават мисли за самоубийство. Майка му в Индия забранява на Янаки да се свързва с него, вероятно с идеята да не го отвлича от работата му. Това не помага. Харди се опитва да облекчи Рамануджан. Говори с лекарите и провежда сам общите математически изследвания. Един лекар му казва, че причина за заболяването е „някакъв малко известен микроорганизъм, който е недостатъчно добре изследван в настоящия момент“. Харди пише: „Рамануджан е силно суеверен и е ужасно трудно да бъде принуден да се погрижи за себе си“. От това време е и прочутата история с числото 1729. При един от престоите си в Пътни Рамануджан е посетен от Харди, който споменава, че таксито, с което е пристигнал, има доста неинтересния номер 1729. На което Рамануджан отговаря: „Не, Харди, това е много интересно число. Това е най-малкото естествено число, което може да се представи като сума на два куба по два различни начина“. [7] Харди пита, дали Рамануджан знае пример и за четвъртите степени и след момент замисляне Рамануджан отговаря отрицателно, но добавя, че първото такова число трябва да е много голямо[8].

В тези години математическата репутация на Рамануджан расте. Той е избран за член на Кралското общество (Fellow of the Royal Society). Между подкрепилите го са Хобсън и Бейкър – адресатите на първите му писма, останали без отговор. През октомври 1918 г. Рамануджан е избран и за Fellow of Trinity College, което осигурява и допълнителна финансова подкрепа. Месец по късно Първата световна война приключва, а заедно с нея и заплахата от немски подводници. Пътят към Индия е открит.

В началото на 1919 г. здравето на Рамануджан се подобрява достатъчно, че да предприеме пътуване до Индия. Уредена му е позиция в Университета в Мадрас. Рамануджан пише благодарствено писмо до ректора, извинявайки се за това, че болестта му не му е позволила да работи достатъчно интензивно в последно време. На 13 март 1919 г. Рамануджан пристига в Индия, известен и почитан, но и много болен. Той дори не може да започне работа в Университета. След три месеца в Мадрас той се връща в Кумбаконам. През цялото време продължава да твори математика. На 20 януари 1920 г. изпраща на Харди забележително писмо относно нов клас θ-функции (*mock theta functions*). Живее скромно, игнорирайки и малкото, което медицината може да направи за него. Умира на 26 април 1920 г. на 32-годишна възраст, три дни след последния запис в бележника си.

[7] Наистина $1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$. Сега бихме казали, че това е третото число на Кармайкъл. Едно съставно число m се нарича число на Кармайкъл, ако сравнението $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ е изпълнено за всяко a, което е взаимнопросто с m. През 1994 г. беше доказано, че съществуват безброй много числа на Кармайкъл.

[8] Първото такова число е посочено от Ойлер:

$$635318657 = 158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4.$$

7. Наследството на Рамануджан. От началото на заниманията си с математика Рамануджан записва резултатите си в бележници с твърди корици, като до публикуване достига съвсем малка част от тях. След смъртта на Рамануджан бележниците му и негови непубликувани резултати са предадени в Университета на Мадрас от вдовицата му Янаки Амал. На 30.08.1923 г. служител на Университета изпраща на Харди всички ръкописи на Рамануджан[9]. Харди започва да организира публикуването на всички резултати от бележниците, които били около 3000. След 1930 г. в това се включват още математици. Един от тях е професорът от Бирмингам Г. Н. Уотсън, който посвещава на бележниците над 10 години и над 30 статии. Някъде между 1934 и 1947 г. Харди предава на Уотсън ръкописи на Рамануджан, между които е и т. нар. „загубен бележник“, но Уотсън може би не му е обърнал внимание (Уотсън разглежда като *неразрешени* въпроси, на които има отговор в бележниците). През 1940 г. Харди предава всички писма от Рамануджан на Университетската библиотека в Кеймбридж (Wren Library), но между тях не е първото писмо на Рамануджан от 1913 г. Така единственото, което имаме сега, е преписът на Харди, публикуван по-късно. След смъртта на Уотсън загубеният бележник е открит случайно сред документите му. Подробно изследване на бележниците на Рамануджан е направено в пет тома от Брус Бернт (Bruce Berndt), а изгубеният бележник разгледан в други три тома с автори Джордж Андрюс (George Andrews) и Брус Бернт.

В момента на смъртта на Рамануджан Янаки Амал е само на 21 години. Както бил обичаят, тя никога повече не се омъжва. Живее скромно, издържайки се с шивачество. През 1950 г. осиновява сина на починал неин приятел. Към 1960 г. Рамануджан се превръща в нещо като национален герой на Индия и тя започва да получава различни почести. През годините я посещават математици от цял свят и тя им предава вещи на Рамануджан. Между тях е и паспортната му снимка, която днес е най-известният негов образ. Живее дълго и умира през 1994 г., надживявайки мъжа си със 73 години.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. E. Andrews, B. C. Berndt. Ramanujan's Lost Notebook. New York-Heidelberg-Dordrecht-London, Springer, Part I 2005, Part II 2009, Part III 2012, Part IV 2013.

[2] B. C. Berndt. Ramanujan's Notebooks. Springer, Part I 1985, Part II 1999, Part III 2004, Part IV 1993, Part V 2005.

[3] G. H. Hardy. The Indian Mathematician Ramanujan. *American Mathematical Monthly* **44**, sl3 (1937), 137–155.

[4] G. H. Hardy. The mathematician's apology. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1940.

[5] R. Kangiel. The man who knew infinity. Washington Square Press, 1991.

[9] Някъде по това време при Харди пристига Дьорд Пойа. Той заема от Харди копие от бележниците на Рамануджан, нищо от които още не е публикувано. След няколко дни Пойа се връща в състояние близко до паника и ги хвърля обратно на Харди. Не, той не ги иска. Не ги иска, защото веднъж хванат в паяжината на магическите теореми на Рамануджан, човек би прекарал остатъка от живота си в опит да ги докаже и никога не би открил нещо свое ...

Иван Ланджев
Нов български университет
ул. „Монтевидео“ 21
1618 София, България
и
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад Г. Бончев“ бл. 8
1113 София, България
e-mail: ivan@math.bas.bg

ДОКЛАДИ ПО ПОКАНА

INVITED TALKS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

A DIOPHANTINE TRANSPORT PROBLEM FROM 2016 AND ITS POSSIBLE SOLUTION FROM 1903*

Silvia Boumova, Vesselin Drensky, Boyan Kostadinov

Motivated by a recent Diophantine transport problem about how to transport profitably a group of persons or objects, we survey classical facts about solving systems of linear Diophantine equations and inequalities in nonnegative integers. We emphasize on the method of Elliott from 1903 and its further development by MacMahon in his "Ω-Calculus" or Partition Analysis. As an illustration we obtain the solution of the considered transport problem in terms of a formal power series in several variables which is an expansion of a rational function of a special form.

1. Introduction. The idea for this paper came from the very interesting recent papers by Robles-Pérez and Rosales [37] and [38]. Starting with a specific transport problem about how to transport profitably a group of persons or objects the authors of [37] and [38] have generalized it to the following system of linear Diophantine inequalities.

Let $\mathbb{N}$ be the set of nonnegative integers, let $(a_1, \ldots, a_k)$ and $(b_1, \ldots, b_k)$ belong to $\mathbb{N}^k$, and let $a, b \in \mathbb{N}$. How to find the set T of all solutions $y \in \mathbb{N}$ of the system

$$\left| \begin{array}{l} y \geq a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + a \\ y \leq b_1x_1 + \cdots + b_kx_k - b? \end{array} \right.$$

The approach in [37] and [38] is to prove that $T \cup \{0\}$ is a submonoid of the additive monoid $(\mathbb{N}, +)$ and to develop an algorithm for computing the minimal system of its generators. This is in the spirit of results in [39], the main of which states that there exists a one-to-one correspondence between the set of numerical semigroups (i.e. submonoids S of $(\mathbb{N}, +)$ such that $\mathbb{N} \setminus S$ is a finite set) with a fixed minimal nonzero element and the set of nonnegative integer solutions of a system of linear Diophantine inequalities.

Linear Diophantine equations and inequalities and their solutions in nonnegative integers are classical objects which appear in many branches of mathematics, computer science and their applications. Many methods have been developed for solving such systems. The purpose of our paper is to survey results, many of them with proofs, starting from Euler, Gordan and Hilbert. Special attention is paid to the method of Elliott [19]

*2020 **Mathematics Subject Classification:** 11D75, 11D72, 11Y50, 05A15, 30B10, 32A05, 90B06, 90C08.

Key words: Linear Diophantine inequalities, solutions in nonnegative integers, transport problem, generating functions, Laurent series, nice rational functions.

Partially supported by Grant KP-06-N-32/1 "Groups and Rings – Theory and Applications" of the Bulgarian National Science Fund.

from 1903 and its further development by MacMahon [32] in his "Ω-Calculus" or Partition Analysis. Later, this method was studied in detail by Stanley [42] who added new geometric ideas. More recently, Domenjoud and Tomás [17] gave new life to the method deriving an algorithm for solving systems of linear Diophantine equations, inequalities and disequalities in nonnegative integers. As an illustration of the methods of Elliott and MacMahon in the present paper we solve one of the Diophantine transport problems which motivated our project.

The ideas of Elliott and MacMahon have many other applications. Andrews, alone or jointly with Paule, Riese, and Strehl published a series of twelve papers (I – [4], ..., XII – [5]) on MacMahon's Partition Analysis, with numerous applications to different problems, illustrating the power of the methods. The "Ω-Calculus" was further improved by developing better algorithms and effective computer realizations by Andrews, Paule, and Riese [6, 7], and Xin [47]. Other applications were given by Berele [10, 11] (to algebras with polynomial identities), Bedratyuk and Xin [9] (to classical invariant theory), and the authors in a series of papers, also jointly with Benanti, Genov, and Koev (to algebras with polynomial identities, and classical and noncommutative invariant theory), see [12] and the references there.

Let

$$a_{ij}, a_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, k,$$

be arbitrary integers. Consider the system of Diophantine equations and inequalities

$$\left|\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k + a_1 &=& 0 \\ \cdots & & \\ a_{l1}x_1 + \cdots + a_{lk}x_k + a_l &=& 0 \\ a_{l+1,1}x_1 + \cdots + a_{l+1,k}x_k + a_{l+1} &\geq& 0 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k + a_m &\geq& 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Let the set of solutions of the system (1) in nonnegative integers be

$$S = \{s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s \text{ is a solution of the system}\}.$$

The leitmotif of the paper is to apply a slight modification of the method as presented in the original paper by Elliott [19], to show how to calculate the function

$$\chi_S(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{s \in S} t_1^{s_1} \cdots t_k^{s_k}, \tag{2}$$

which describes the solutions of the system, and to derive the parametric form of the solutions. We give concrete calculations for the example in [37]. Using similar methods one can handle also the example in [38].

2. The ideas of Euler, Gordan, and Hilbert seen from nowadays. We start with some classical facts on systems of linear Diophantine equations. For historical details and a survey of the methods for solving such systems we refer to the sections on historical and further notes on linear Diophantine equations and on integer linear programming in the book of Schrijver [41] and the section of brief historical notes in the Ph.D. Thesis of Tomás [44].

The following fact was known already by Euler in 1748, see [20, 21, 22].

Lemma 2.1. *Let all coefficients a_{ij} and b_j of the system*

$$\left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k = b_m, \end{array}\right. \tag{3}$$

be nonnegative integers such that for each $j = 1, \ldots, k$ at least one of the coefficients a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, is different from 0. Then the number of solutions in nonnegative integers of the system is equal to the coefficient of $t_1^{b_1} \cdots t_m^{b_m}$ of the expansion as a power series of the product

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1 - t_1^{a_{1j}} \cdots t_m^{a_{mj}}}. \tag{4}$$

Proof. Using the formula

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots,$$

we obtain immediately that

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1 - t_1^{a_{1j}} \cdots t_m^{a_{mj}}} = \prod_{j=1}^{k} \sum_{s_j \geq 0} t_1^{a_{1j}s_j} \cdots t_m^{a_{mj}s_j}$$

$$= \sum_{s_j \geq 0} t_1^{\sum_{j=1}^{k} a_{1j}s_j} \cdots t_m^{\sum_{j=1}^{k} a_{mj}s_j} = \sum_{b_i \geq 0} c_b t_1^{b_1} \cdots t_m^{b_m},$$

where the coefficient c_b is equal to the number of k-tuples $(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k$ such that

$$a_{i1}s_1 + \cdots + a_{ik}s_k = b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

i.e. to the number of solutions of the system (3). $\square$

Remark 2.2. If we replace in Lemma 2.1 the product (4) by

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1 - z_j t_1^{a_{1j}} \cdots t_m^{a_{mj}}},$$

then the coefficient of $t_1^{b_1} \cdots t_k^{b_k}$ will be a polynomial

$$\chi_S(z_1, \ldots, z_k) = \sum_{s \in S} z_1^{s_1} \cdots z_k^{s_k}$$

in $z_1, \ldots, z_k$, where $S \subset \mathbb{N}^k$ is the set of the solutions $s = (s_1, \ldots, s_k)$ of the system (3).

Example 2.3. Given the system

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \end{array}\right.$$

we expand the product

$$\frac{1}{(1 - z_1t_1t_2)(1 - z_2t_1t_2^2)(1 - z_3t_1t_2^3)}$$

as a power series and find that the coefficient of $t_1^{10}t_2^{15}$ is equal to $z_1^7z_2z_3^2 + z_1^6z_2^3z_3 + z_1^5z_2^5$. Hence the system has three solutions

$$(s_1, s_2, s_3) = (7, 1, 2), (6, 3, 1), (5, 5, 0).$$

Now we shall consider systems of homogeneous linear Diophantine equations

$$\left|\begin{array}{lll} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1k}x_k = 0 \\ & \cdots & \\ a_{m1}x_1 & +\cdots+ & a_{mk}x_k = 0, \end{array}\right. \tag{5}$$

where the coefficients a_{ij} are arbitrary integers. As before, we shall be interested in solutions in nonnegative integers. We introduce a partial order on $\mathbb{N}^k$:

$$q' = (q'_1, \dots, q'_k) \preceq (q''_1, \dots, q''_k) = q'' \text{ if } q'_j \le q''_j, \quad j = 1, \dots, k. \tag{6}$$

If $q' \prec q''$ are two solutions, then

$$q = q'' - q' = (q_1, \dots, q_k) = (q''_1 - q'_1, \dots, q''_k - q'_k) \in \mathbb{N}^k$$

is also a solution and q'' is a sum of two smaller solutions q and q'. Hence every solution of the system (5) is a sum of *minimal* (or *fundamental*) solutions. In 1873 Gordan [24] called the minimal solutions *irreducible*. He proved that every system (5) has a finite number of minimal solutions. Here we give the proof from the book by Grace and Young [26, Chapter VI, Section 97] which is very close to the original proof of Gordan.

Theorem 2.4. *The system* (5) *has a finite number of minimal solutions.*

Proof. We start with a single equation. Changing the order of the unknowns we rewrite the equation in the form

$$a_1x_1 + \cdots + a_mx_m = b_1y_1 + \cdots + b_ny_n, \tag{7}$$

where all a_i and b_j are positive integers. The equation has mn solutions

$$x_r = b_s, y_s = a_r$$

and all other variables equal to 0. Now, let us assume that in the solution $(r, s) = (r_1, \dots, r_m, s_1, \dots, s_n)$ one of the coordinates r_i (e.g. r_1) is greater than $b_1 + \cdots + b_n$. Hence

$$b_1s_1 + \cdots + b_ns_n = a_1r_1 + \cdots + a_mr_m \ge a_1r_1 > a_1(b_1 + \cdots + b_m),$$

$$b_1(s_1 - a_1) + \cdots + b_n(s_n - a_1) > 0$$

and there exists an s_j (e.g. s_1) such that $s_j > a_1$. Then

$$(r, s) = (r_1 - b_1, r_2, \dots, r_m, s_1 - a_1, s_2, \dots, s_n) + (b_1, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots, 0)$$

and the solution (r, s) is not minimal. In this way the minimal solutions satisfy the condition

$$r_i \le b_1 + \cdots + b_n, s_j \le a_1 + \cdots + a_m.$$

Hence they are a finite number and can be found explicitly. Let $(r^{(1)}, s^{(1)}), \dots, (r^{(p)}, s^{(p)})$ be all minimal solutions of the first equation of the system (5). Then all solutions of the first equation are in the form

$$q = (r, s) = (r^{(1)}, s^{(1)})z_1 + \cdots + (r^{(p)}, s^{(p)})z_p, \quad z_i \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Replacing (r, s) in the second equation of the system (5) we obtain an equation

$$c_1z_1 + \cdots + c_pz_p = 0 \tag{9}$$

with unknowns $z_1, \dots, z_p$. Then the minimal solutions $q = (q_1, \dots, q_k)$ of the first two equations of (5) are among the solutions (8) obtained from the minimal solutions of the equation (9). Again, we can find them explicitly. Continuing in the same way we can find all minimal solutions of the system (5). □

Remark 2.5. We can find the candidates for the minimal solutions of the equation (7) combining the method of the proof of Theorem 2.4 with the method of Euler from Lemma 2.1 as modified in Remark 2.2. We consider the power series

$$T(t_1,\dots,t_m,z)=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1-t_iz^{a_i}}=\sum_{x_i\ge 0}t_1^{x_1}\cdots t_m^{x_m}z^{a_1x_1+\cdots+a_mx_m}=\sum_{k\ge 0}T_k(t_1,\dots,t_m)z^k,$$

$$U(u_1,\dots,u_m,z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-u_jz^{b_j}}=\sum_{y_j\ge 0}u_1^{y_1}\cdots u_n^{y_n}z^{b_1y_1+\cdots+b_ny_n}=\sum_{k\ge 0}U_k(u_1,\dots,u_n)z^k.$$

The polynomials $T_k(t_1,\dots,t_m)$ and $U_k(u_1,\dots,u_n)$, respectively, are sums of monomials of the form $t_1^{x_1}\cdots t_m^{x_m}$ and $u_1^{y_1}\cdots u_n^{y_n}$ and each pair of these monomials gives a solution of (7) of the form

$$a_1x_1+\cdots+a_mx_m=b_1y_1+\cdots+b_ny_n=k.$$

By the proof of Theorem 2.4 the candidates for minimal solutions satisfy the conditions $x_i\le b_1+\cdots+b_n$ and $y_j\le a_1+\cdots+a_m$. Hence it is sufficient to compute the polynomials $T_k(t_1,\dots,t_m)$ and $U_k(u_1,\dots,u_n)$ for $k\le(a_1+\cdots+a_m)(b_1+\cdots+b_n)$.

Example 2.6. Let us consider the system

$$\left|\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3-x_4=0\\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=0.\end{array}\right. \tag{10}$$

We rewrite the first equation in the form

$$x_1+2x_2=y_3+y_4.$$

By the proof of Theorem 2.4 every minimal solution $q=(r_1,r_2,s_1,s_2)$ satisfies the conditions

$$0<r_1+r_2,\quad r_1,r_2\le 2,\quad 0<s_1+s_2,\quad s_1,s_2\le 3.$$

There are 8 possibilities for r_1+r_2 and for each (r_1,r_2) there are $r=r_1+r_2+1$ possibilities $(r,0),(r-1,1),\dots,(0,r)$ for (s_1,s_2). Simple calculations give that there are 35 candidates for minimal solutions. We start with the cases $(r_1,r_2)=(0,1)$ and $(1,0)$ and obtain 5 solutions

$$\begin{gathered} q^{(1)}=(0,1,0,2),\quad q^{(2)}=(0,1,1,1),\quad q^{(3)}=(0,1,2,0),\\ q^{(4)}=(1,0,0,1),\quad q^{(5)}=(1,0,1,0).\end{gathered} \tag{11}$$

If $r_1>1$, then $s_1+s_2>1$ and the solution $q=(r_1,r_2,s_1,s_2)$ is not minimal because $q^{(i)}\prec q$ for some $i=4,5$. By similar argument we derive that the other solutions with $r_1+r_2>1$ are also not minimal. Thus we obtain that the minimal solutions of the first equation of (10) are those in (11) and all solutions of this equation are

$$q=\sum_{i=1}^{5}t_iq^{(i)}=(t_4+t_5,t_1+t_2+t_3,t_2+2t_3+t_5,2t_1+t_2+t_4),\quad t_i\ge 0.$$

The second equation of (10) becomes

$$\begin{aligned}2x_1+3x_2-2x_3-x_4&=2(t_4+t_5)+3(t_1+t_2+t_3)-2(t_2+2t_3+t_5)-(2t_1+t_2+t_4)\\&=t_1-t_3+t_4=0.\end{aligned}$$

By the proof of Theorem 2.4 again, $t_1,t_4\le 1$, $t_3\le 2$, and the candidates for minimal

solutions of the equation $t_1 - t_3 + t_4 = 0$ are

$$(t_1, t_3, t_4) = (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 2, 1).$$

Only the first two solutions are minimal. We have to add also the minimal solutions

$$(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$$

and obtain the candidates for minimal solutions of the original system (10)

$$q = (0, 2, 2, 2), (1, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0).$$

The first two solutions are not minimal and we obtain all minimal solutions of (10)

$$q^{(1)} = (0, 1, 1, 1), q^{(2)} = (1, 0, 1, 0).$$

Example 2.7. We consider the same system (10). Applying the method in Remark 2.5 to the first equation $x_1 + 2x_2 = y_3 + y_4$ of the system, we start with the power series

$$T(t_1, t_2, z) = \frac{1}{(1 - t_1 z)(1 - t_2 z^2)} = \sum_{k \geq 0} T_k(t_1, t_2) z^k,$$

$$U(u_1, u_2, z) = \frac{1}{(1 - u_1 z)(1 - u_2 z)} = \sum_{k \geq 0} U_k(u_1, u_2) z^k$$

and compute the first 6 polynomials T_k and U_k $(k = 1, \ldots, 6)$. For example

$$T_1 = t_1, U_1 = u_1 + u_2, \quad T_2 = t_1^2 + t_2, U_2 = u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2,$$

which gives the pair of monomials

$$(t_1, u_1), (t_1, u_2), (t_1^2, u_1^2), (t_1^2, u_1 u_2), (t_1^2, u_2^2), (t_2, u_1^2), (t_2, u_1 u_2), (t_2, u_2^2)$$

producing the solutions

$$(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (2, 0, 2, 0), (2, 0, 1, 1), (2, 0, 0, 2), (0, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 2).$$

Then by direct verification we select the minimal solutions of the equation and continue with the second equation of the system (10).

By the Hilbert Basis theorem [27] every ideal of the polynomial algebra $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ is finitely generated. The following property of the partial order (6) is known as the *Dickson lemma* with easy proof by induction in [16]. As it is mentioned in [16] it is a direct consequence of the Hilbert Basis theorem applied to monomial ideals in $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$.

Lemma 2.8. *Let J be a subset of $\mathbb{N}^k$. Then J has a finite subset*

$$\{q^{(i)} = (q_1^{(i)}, \ldots, q_k^{(i)}) \mid i = 1, \ldots, n\}$$

with the property that for any $q = (q_1, \ldots, q_k) \in J$ there exists a $q^{(i)}$ such that $q^{(i)} \preceq q$.

We should mention that this lemma was used by Gordon [25] in 1899 in his proof of the Hilbert Basis theorem. Clearly, as a corollary we immediately obtain also a nonconstructive proof of Theorem 2.4.

It is interesting to know the behavior of the minimal solutions of the system (5). It can be given in terms of recursion theory.

Definition 2.9. *Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be an arbitrary function. A function $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ is* primitive recursive in f *if h can be obtained by a finite number of steps applying the following rules, starting with the function f, the constant function 0, the successor function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (defined by $s(n) = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$) and the projection function $p_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, k$ (defined by $p_i^k(n_1, \ldots, n_k) = n_i$, $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$):*

(1) *The functions f, 0, s and p_i^k are primitive recursive in f;*

(2) Substitution: *If* $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *and* $h_i : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $m = 1, \ldots, k$, *are primitive recursive in* f, *then the function* $g(h_1, \ldots, h_k) : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ *is also primitive recursive in* f;

(3) Primitive recursion: *If* $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *and* $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$, *are primitive recursive in* f, *then the primitive recursion* $p : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *of* g *and* h *defined by*

$$p(0, n_1, \ldots, n_k) = g(n_1, \ldots, n_k) \text{ and } p(s(m), n_1, \ldots, n_k) = h(m, p(m, n_1, \ldots, n_k)),$$

$m \in \mathbb{N}$, $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$, *is also primitive recursive in* f.

In the above definition, the "ordinary" primitive recursive functions are those which do not depend on the function f. Roughly speaking, from the point of view of computability theory, a primitive recursive function can be computed by a computer program such that for every loop in the program the number of iterations can be bounded from above before entering the loop.

Definition 2.10. *The function* $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *is recursive if in addition to the constructions in the definition of a primitive recursive function one uses also the following.*

(4) Minimization operator μ: *If* $h(m, n_1, \ldots, n_k) : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *is partially defined (i.e. defined on a subset of* $\mathbb{N}^{k+1}$*), then the function* $\mu(h) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *is defined by* $\mu(h)(n_1, \ldots, n_k) = m$ *if* $h(i, n_1, \ldots, n_k) > 0$ *for* $i = 0, 1, \ldots, m-1$ *and* $h(m, n_1, \ldots, n_k) = 0$. *If* $h(i, n_1, \ldots, n_k) > 0$ *for all* $i \in \mathbb{N}$ *or if* $h(i, n_1, \ldots, n_k)$ *is not defined before reaching some* m *with* $h(m, n_1, \ldots, n_k) = 0$, *then the search for* m *never terminates, and* $\mu(h)(n_1, \ldots, n_k)$ *is not defined for the argument* $(n_1, \ldots, n_k)$.

We shall restate the formalization of Seidenberg [40] introduced originally for the ideals of the polynomial algebra $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$.

Problem 2.11. *Given a function* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *what is the maximal* $p_f(i) \in \mathbb{N}$ *with the property: There exists a set*

$$I_f = \{q^{(i)} = (q_1^{(i)}, \ldots, q_k^{(i)}) \mid i = 1, \ldots, p_f(i)\} \subset \mathbb{N}^k$$

such that $q_1^{(i)} + \cdots + q_k^{(i)} \leq f(i)$ *and the elements of* I_f *are not comparable with respect to the partial order* $\prec$.

Seidenberg showed that there exists a bound $p_f^{(k)}$ depending on f and k only, which is recursive in f for a fixed k. This result was improved by Moreno-Socías [34].

Theorem 2.12. *In the notation of Problem* 2.11 *for every* k *there is a primitive recursive function* $p_f^{(k)} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *in* f, *but there is no bound* p_f *which is primitive recursive in* f *in general.*

For each $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Moreno-Socías [33] constructed an example for the primitive recursive function $f_d(n) = d + n$, $n \in \mathbb{N}$, with the property that the bound p_{f_d} is expressed in terms of the Ackermann function $a(k, n) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ [2] defined by

$$a(0, n) = n + 1, \quad a(k + 1, 0) = a(k, 1), \quad a(k + 1, n + 1) = a(k, a(k + 1, n)).$$

It is known that $a(k, n)$ is recursive and grows faster than any primitive recursive function.

Theorem 2.13. *In the notation of Problem* 2.11 *let* $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *and let* $f_d(n) = d+n$, $n \in \mathbb{N}$. *Then there exists a set*

$$I_{f_d} = \{q^{(i)} = (q_1^{(i)}, \ldots, q_k^{(i)}) \mid i = d, d + 1, \ldots, p\} \subset \mathbb{N}^k$$

of noncomparable k*-tuples such that* $q_1^{(i)} + \cdots + q_k^{(i)} = i$ *and* p *is equal to* $a(k, d-1) - 1$, *where* $a(k, n)$ *is the Ackermann function.*

See also the paper by Aschenbrenner and Pong [8] for another approach to the complexity of the problems discussed above.

3. From the homogeneous case to the solution of general linear Diophantine constraints. Let us consider the general system of linear Diophantine equations and inequalities (1). There is a standard way to bring the solution of (1) to the solution of a homogeneous system of linear Diophantine equations. We introduce new unknowns $y, y_{l+1}, \dots, y_m$ and replace the system (1) by the system

$$\left|\begin{array}{rcrcrcl} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1k}x_k & + & a_1 y & & = 0 \\ & \cdots & & & & & \\ a_{l1}x_1 & + \cdots + & a_{lk}x_k & + & a_l y & & = 0 \\ a_{l+1,1}x_1 & + \cdots + & a_{l+1,k}x_k & + & a_{l+1}y & - y_{l+1} & = 0 \\ & \cdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mk}x_k & + & a_m y & - y_m & = 0. \end{array}\right. \tag{12}$$

The following easy theorem shows how to reduce the solution of a general system to a homogeneous one.

Theorem 3.1. *Let*

$$\{q^{(i)} = (r_1^{(i)}, \dots, r_k^{(i)}, s^{(i)}, s_{l+1}^{(i)}, \dots, s_m^{(i)}) \mid i = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}^{k+1+m-l} \tag{13}$$

be the set of minimal solutions of the homogeneous system of equations (12) *and let* $s^{(i)} = 1$ *for* $i = 1, \dots, c$, $s^{(i)} = 0$ *for* $i = c+1, \dots, d$ *and* $s^{(i)} > 1$ *for* $i = d+1, \dots, n$. *Then the set of all solutions of the system* (1) *are of the form*

$$q = q^{(i)} + t_{c+1}q^{(i)} + \cdots + t_d q^{(d)}, \quad i = 1, \dots, c, \quad t_{c+1}, \dots, t_d \in \mathbb{N}.$$

Proof. If $q = (r_1, \dots, r_k, s, s_{l+1}, \dots, s_m)$ is a solution of (12), then $s_{l+1}, \dots, s_m \geq 0$ and the solutions $(r_1, \dots, r_k)$ of (1) are obtained from solutions q with $s = 1$. Every q is a linear combination of the minimal solutions from (13). If q has the form $q = \sum_{i=1}^{n} t_i q^{(i)}$, we obtain that $1 = s = t_1 + \cdots + t_c + t_{d+1}s^{(d+1)} + \cdots + t_n s^{(n)}$. Hence $t_1 + \cdots + t_c = 1$ and $t_{d+1} = \cdots = t_n = 0$ because $t_{d+1}, \dots, t_n > 1$. $\square$

Remark 3.2. Let some of the inequalities in the system (1), e.g.

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k + a_m > 0$$

be strict. Then we replace it in the system (12) by

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k + (a_m + 1)y - y_m = 0.$$

Example 3.3. Let us modify the system (10) from Example 2.6 into the system

$$\left|\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 1 = 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & 1 \geq 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Following the proof of Theorem 3.1 we have to consider the system

$$\left|\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - y & = 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - y - y_2 & = 0. \end{array}\right. \tag{15}$$

The minimal solutions $q = (r_1, r_2, r_3, s)$ of the first equation of (15) are the same as the minimal solutions (11) of the first equation of (10). Since $s = 2 > 1$ in the solution $q^{(1)} = (0, 1, 0, 2)$, $s = 1$ in $q^{(2)}$ and $q^{(4)}$, and $s = 0$ in $q^{(3)}$ and $q^{(5)}$, we obtain that all solutions are

$$q' = q^{(2)} + t_3 q^{(3)} + t_5 q^{(5)} = (t_5, 1 + t_3, 1 + 2t_3 + t_5, 1),$$
$$q'' = q^{(4)} + t_3 q^{(3)} + t_5 q^{(5)} = (1 + t_5, t_3, 2t_3 + t_5, 1),$$

$t_3, t_5 \in \mathbb{N}$. Substituting q' in the second equation of (15) we obtain

$$2t_5 + 3(1 + t_3) - 2(1 + 2t_3 + t_5) - 1 - y_2 = -t_3 - y_2 = 0.$$

Hence $t_3 = y_2 = 0$ and we obtain the solutions $(r_1, r_2, r_3) = (1 + t_5, 0, t_5)$ of (14). Similarly, starting with q'', the second equation of (15) gives

$$2(1 + t_5) + 3t_3 - 2(2t_3 + t_5) - 1 - y_2 = 1 - t_3 - y_2 = 0.$$

We obtain two solutions $(t_3, y_2) = (0, 1)$ and $(t_3, y_2) = (1, 0)$, which give the solutions $(r_1, r_2, r_3) = (1 + t_5, 0, t_5)$ and $(r_1, r_2, r_3) = (1 + t_5, 1, 2 + t_5)$ of (14).

There are many methods based on different ideas for solving systems of linear Diophantine equations and inequalities. See for example [1, 3, 14, 15, 17, 23, 31, 35, 36, 45, 46] and the bibliography there. See also [28, 29] for relations with mathematical logic and the theory of formal grammars.

4. The method of Elliott. In this section we shall explain in detail the method of Elliott from [19]. Originally, it was developed for systems of homogeneous linear Diophantine equations. But for our applications we shall restate the method for systems of linear Diophantine inequalities. We fix arbitrary integers

$$a_{ij}, a_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k,$$

a system of Diophantine inequalities

$$\left| \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k + a_1 \geq 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k + a_m \geq 0, \end{array} \right. \tag{16}$$

and consider the set of solutions of the system (16) in nonnegative integers

$$S = \{s = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{N}^k \mid s \text{ is a solution of the system}\}.$$

4.1. The first idea of Elliott. A usual way to describe a set $A \subset \mathbb{R}^k$ is in terms of its *characteristic* (or *indicator*) *function* $\mathrm{ch}_{f_A} : \mathbb{R}^k \to \{0, 1\}$ defined by

$$\mathrm{ch}_{f_A}(p_1, \dots, p_k) = \begin{cases} 1, (p_1, \dots, p_k) \in A \\ 0, (p_1, \dots, p_k) \notin A. \end{cases}$$

Definition 4.1. *Let $P \subset \mathbb{N}^k$. By analogy with the characteristic function of P we call the formal power series*

$$\chi_P(t_1, \dots, t_k) = \sum_{p \in P} t_1^{p_1} \cdots t_k^{p_k}, \quad p = (p_1, \dots, p_k),$$

the characteristic series *of P.*

When $P \subset \mathbb{N}^k$ is the set of solutions of a system of linear Diophantine equations Elliott suggests to call $\chi_P(t_1, \dots, t_k)$ the *generating function* of the set of solutions.

4.2. The second idea of Elliott. To find the characteristic series of a set of solutions $S \subset \mathbb{N}^k$ of a system of homogeneous linear Diophantine equations Elliott involves Laurent series.

Definition 4.2. *Let $P \subset \mathbb{N}^k$, let*

$$f(t_1, \dots, t_k) = \sum_{p \in P} \alpha_p t_1^{p_1} \cdots t_k^{p_k} \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_k]], \quad p = (p_1, \dots, p_k), \alpha_p \in \mathbb{C},$$

be a formal power series, and let S be a subset of P. We call the formal power series

$$\chi_S(f;t_1,\dots,t_k)=\sum_{p\in S}\alpha_p t_1^{p_1}\cdots t_k^{p_k},$$

the characteristic series of f with respect to the set S.

The next lemma is one of the key moments in the approach of Elliott. Its proof is obvious.

Lemma 4.3. *Let $P\subset\mathbb{N}^k$, let*

$$f(t_1,\dots,t_k)=\sum_{p\in P}\alpha_p t_1^{p_1}\cdots t_k^{p_k}\in\mathbb{C}[[t_1,\dots,t_k]],\quad p=(p_1,\dots,p_k),\alpha_p\in\mathbb{C},$$

be a formal power series, and let $S\subset P$ be the set of solutions in P of the Diophantine equation

$$a_1x_1+\cdots+a_kx_k=0,\quad a_i\in\mathbb{Z}.$$

If the Laurent series

$$\xi_S(t_1,\dots,t_k,z)=f(t_1z^{a_1},\dots,t_kz^{a_k})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{p\in S}\alpha_p t_1^{p_1}\cdots t_k^{p_k}z^n,$$

$p=(p_1,\dots,p_k)$, $n=a_1p_1+\cdots+a_kp_k$, has the form

$$\xi_S(t_1,\dots,t_k,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t_1,\dots,t_k)z^n,\quad f_n(t_1,\dots,t_k)\in\mathbb{C}[[t_1,\dots,t_k]],$$

then

$$\chi_S(f;t_1,\dots,t_k)=\sum_{p\in S}\alpha_p t_1^{p_1}\cdots t_k^{p_k}=f_0(t_1,\dots,t_k).$$

The next lemma is a slight generalization of the original approach of Elliott. Its proof is also obvious.

Lemma 4.4. *Let $P\subset\mathbb{N}^k$, let*

$$f(t_1,\dots,t_k)=\sum_{p\in P}\alpha_p t_1^{p_1}\cdots t_k^{p_k}\in\mathbb{C}[[t_1,\dots,t_k]],\quad p=(p_1,\dots,p_k),\alpha_p\in\mathbb{C},$$

be a formal power series, and let S be the solutions in P of the Diophantine inequality

$$a_1x_1+\cdots+a_kx_k+a\geq 0,\quad a_i,a\in\mathbb{Z}.$$

If

$$\xi_S(t_1,\dots,t_k,z)=z^af(t_1z^{a_1},\dots,t_kz^{a_k})$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{p\in S}\alpha_p t_1^{p_1}\cdots t_k^{p_k}z^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t_1,\dots,t_k)z^n,$$

$f_n(t_1,\dots,t_k)\in\mathbb{C}[[t_1,\dots,t_k]]$, $n=a_1p_1+\cdots+a_kp_k+a$, then

$$\chi_S(f;t_1,\dots,t_k)=\sum_{(p_1,\dots,p_k)\in S}\alpha_p t_1^{p_1}\cdots t_k^{p_k}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t_1,\dots,t_k).$$

Now the problem is how to find $\chi_S(f;t_1,\dots,t_k)$ if $f(t_1,\dots,t_k)$ is an explicitly given power series which converges to a rational function and we know the set S. Even in simple cases the answer may be not trivial.

Example 4.5. Combining the results from [18, p. 409] with ideas from [12], for the formal power series

$$f(t_1,t_2)=\frac{t_1-t_2}{1-(t_1+t_2)}=(t_1-t_2)\sum_{n=0}^{\infty}(t_1+t_2)^n,\quad S=\{(p_1,p_2)\in\mathbb{N}^2\mid p_1\geq p_2\},$$

we obtain

$$\chi_S(f;t_1,t_2)=\frac{1-\sqrt{1-4t_1t_2}}{2t_2-(1-\sqrt{1-4t_1t_2})}.$$

4.3. The third idea of Elliott. The following definition is given by Berele [10].

Definition 4.6. *A* nice rational function *is a rational function with denominator which is a product of monomials of the form* $(1-t_1^{\alpha_1}\cdots t_k^{\alpha_k})$.

Nice rational functions appear in many places of mathematics. For example, the Hilbert series of any finitely generated multigraded commutative algebra is of this form. The following theorem was proved by Elliott [19]. The proof also gives an algorithm how to find the characteristic series $\chi_S(t_1,\dots,t_k)$ of the set S of solutions.

Theorem 4.7. *Let*

$$\left|\begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1k}x_k=0\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mk}x_k=0,\end{array}\right. \tag{17}$$

where $a_{ij}\in\mathbb{Z}$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,k$, *be a system of homogenous linear Diophantine equations. Then the characteristic series* $\chi_S(t_1,\dots,t_k)$ *of the set* S *of the solutions of* (17) *in* $\mathbb{N}^k$ *is a nice rational function.*

Proof. We start with the characteristic series of the set $\mathbb{N}^k$ of all points with nonnegative integers coordinates

$$\chi_{\mathbb{N}^k}(t_1,\dots,t_k)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-t_i}=\sum_{p_i\geq 0}t_1^{p_1}\cdots t_k^{p_k}.$$

Let the first equation of the system be of the form

$$a_1x_1+\cdots+a_dx_d-c_{e+1}x_{e+1}-\cdots-c_kx_k=0,\quad a_i>0,c_j>0,d\leq e. \tag{18}$$

Then the Laurent series

$$\xi_S(t_1,\dots,t_k,z)=\chi_{\mathbb{N}^k}(t_1z^{a_1},\dots,t_dz^{a_d},t_{d+1},\dots,t_e,t_{e+1}z^{-c_{e+1}},\dots,t_kz^{-c_k})$$

from Lemma 4.3 has the form

$$\xi_S(t_1,\dots,t_k,z)=\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=d+1}^{e}\prod_{m=e+1}^{k}\frac{1}{(1-t_iz^{a_i})(1-t_j)(1-t_mz^{-c_m})}.$$

More general, we shall assume that $\xi_S(t_1,\dots,t_k,z)$ is of the form

$$\xi_S(t_1,\dots,t_k,z)=\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=d+1}^{e}\prod_{m=e+1}^{k}\frac{1}{(1-A_iz^{a_i})(1-B_j)(1-C_mz^{-c_m})}, \tag{19}$$

where A_i,B_j,C_m are monomials in $t_1,\dots,t_k$.

Case 1. If the equation (18) does not contain negative c_m, i.e. if $e=k$, then

obviously

$$\xi_S(t_1,\dots,t_k,z)=\prod_{i=1}^{d}\prod_{j=d+1}^{k}\frac{1}{(1-A_iz^{a_i})(1-B_j)}$$

$$=\prod_{j=d+1}^{k}\frac{1}{1-B_j}\left(1+\sum_{n\geq 1}D_nz^n\right),\quad D_n\in\mathbb{Q}[[t_1,\dots,t_k]],$$

and

$$\chi_S(t_1,\dots,t_k)=f_0(t_1,\dots,t_k)=\prod_{j=d+1}^{k}\frac{1}{1-B_j}.$$

Case 2. Similar arguments work when the equation (18) does not contain positive a_i, i.e. when $d=0$. Again

$$\chi_S(t_1,\dots,t_k)=f_0(t_1,\dots,t_k)=\prod_{j=1}^{e}\frac{1}{1-B_j}.$$

Case 3. Now, let (18) contain both positive a_i and negative c_m. We shall use the Elliott tricky equality [19, equation (4)]

$$\frac{1}{(1-Az^a)(1-Cz^{-c})}=\frac{1}{1-ACz^{a-c}}\left(\frac{1}{1-Az^p}+\frac{1}{1-Cz^{-c}}-1\right),\tag{20}$$

where $a,c\in\mathbb{N}$ and A,C are again monomials in $t_1,\dots,t_k$. Applying (20) to a pair of a_i and c_m, we shall replace the product (19) by a sum of three similar products with numerators ± 1. Continuing with the application of (20) to each of the three expressions in several steps we shall obtain a sum of products with denominators containing factors which do not depend on z and factors with only positive or only negative degrees of z. Then in order to obtain the expression of $f_0(t_1,\dots,t_k)$ we handle each summand as in Case 1 and Case 2 of the proof. In this way we compute the characteristic series of the set of the solutions of the first equation of (17). Applying the same algorithm on $f_0(t_1,\dots,t_k)$ we obtain the characteristic series of the solutions of the first two equations of (17) and continue the process until we find the characteristic series $\chi_S(t_1,\dots,t_k)$ of the set S of the solutions of the whole system (17). Below we shall explain why the process stops in a finite number of steps. □

The product (19) has $d+(k-e)$ factors depending on z. The original arguments of Elliott are the following. If $a=c$, then, applying (20), in any of the three summands the number of factors depending on z is smaller. If $a>c$, then after applying (20), one of the summands (the third one) has fewer number of factors depending on z. For the first of the other two factors we replace the factor $(1-Az^a)(1-Cz^{-c})$ with negative degree of z in $1-Cz^{-c}$ by the factor $(1-ACz^{a-c})(1-Az^a)$. Since $a-c$ is between $-c$ and a, this expression is simpler than the original. For the other factor $(1-ACz^{a-c})(1-Cz^{-c})$ again $a-c$ is between $-c$ and a and the expression is simpler than the original, too. Similar arguments can be applied for the case $a<c$.

We shall formalize the arguments of Elliott following the Master Thesis [30] of the third named author of this paper. Given two sequences of nonnegative integers

$$\alpha=(a_1,\dots,a_d)\text{ and }\gamma=(c_{e+1},\dots,c_k),$$

we denote by $\theta = [\alpha, \gamma]$ the corresponding pair of partitions

$$[\alpha] = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_d}), \quad a_{i_1} \geq \cdots \geq a_{i_d}, \quad [\gamma] = (c_{m_1}, \ldots, c_{m_{k-e}}), \quad c_{m_1} \geq \cdots \geq c_{m_{k-e}}.$$

Then we define the linear order

$$\theta = [\alpha, \gamma] \prec [\alpha', \gamma'] = \theta', \text{ if } [\alpha] < [\alpha'] \text{ or } [\alpha] = [\alpha'], [\gamma] < [\gamma'],$$

where the order $<$ in $[\alpha] < [\alpha']$ and $[\gamma] < [\gamma']$ is with respect to the usual lexicographic order. Obviously the order $\prec$ satisfies the descending chain condition.

Proposition 4.8. *The algorithm of Elliott in the proof of Theorem* 4.7 *stops after a finite number of steps.*

Proof. Applying (20) to the product $\xi = \xi_S(t_1, \ldots, t_k, z)$ from (19) we shall follow the behavior of the two sequences $\alpha = (a_1, \ldots, a_d)$ and $\gamma = (c_{e+1}, \ldots, c_k)$ of the degrees of z and the corresponding pair of partitions $\theta = [\alpha, \gamma]$. Since the set of all finite integer sequences is well ordered with respect to $\prec$, it is sufficient to show that the statement holds for the pair θ if it holds for all pairs φ which are smaller with respect to $\prec$, and then to apply inductive arguments. Without loss of generality we may assume that $a_1 \geq \cdots \geq a_d$ and $c_{e+1} \geq \cdots \geq c_k$. By virtues of (20) we replace the product (19) corresponding to $\theta = [\alpha, \gamma]$ with three products

$$\xi' = \frac{1}{1 - A_1 C_1 z^{a_1 - c_{e+1}}} \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=d+1}^{e} \prod_{m=e+2}^{k} \frac{1}{(1 - A_i z^{a_i})(1 - B_j)(1 - C_m z^{-c_m})},$$

$$\xi'' = \frac{1}{1 - A_1 C_1 z^{a_1 - c_{e+1}}} \prod_{i=2}^{d} \prod_{j=d+1}^{e} \prod_{m=e+1}^{k} \frac{1}{(1 - A_i z^{a_i})(1 - B_j)(1 - C_m z^{-c_m})},$$

$$\xi''' = \frac{1}{1 - A_1 C_1 z^{a_1 - c_{e+1}}} \prod_{i=2}^{d} \prod_{j=d+1}^{e} \prod_{m=e+2}^{k} \frac{1}{(1 - A_i z^{a_i})(1 - B_j)(1 - C_m z^{-c_m})},$$

corresponding to the pairs $\theta' = [\alpha', \gamma']$, $\theta'' = [\alpha'', \gamma'']$, $\theta''' = [\alpha''', \gamma''']$, respectively.

Case 1. Let $a_1 = c_1$. Then

$$\theta' = [(a_1 - c_{e+1} = 0, a_1, a_2, \ldots, a_d), (c_{e+2}, \ldots, c_k)],$$

$$\theta'' = [(a_2, \ldots, a_d), (c_{e+1}, c_{e+2}, \ldots, c_k)],$$

$$\theta''' = [(a_2, \ldots, a_d), (c_{e+2}, \ldots, c_k)].$$

Since $[c_{e+2}, \ldots, c_k] < [c_{e+1}, c_{e+2}, \ldots, c_k]$ and $[a_2, \ldots, \ldots, a_d] < [a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_d]$ we obtain that $\theta', \theta'', \theta''' \prec \theta$ and we can apply inductive arguments.

Case 2. Let $a_1 > c_{e+1}$. Then $\theta', \theta'', \theta'''$ are, respectively,

$$\theta' = [\alpha', \gamma'] = [(a_1 - c_{e+1}, a_1, a_2, \ldots, a_d), (c_{e+2}, \ldots, c_k)],$$

$$\theta'' = [\alpha'', \gamma''] = [(a_1 - c_{e+1}, a_2, \ldots, a_d), (c_{e+1}, c_{e+2}, \ldots, c_k)],$$

$$\theta''' = [\alpha''', \gamma'''] = [(a_1 - c_{e+1}, a_2, \ldots, a_d), (c_{e+2}, \ldots, c_k)].$$

Since $[\alpha''] = [\alpha'''] < [\alpha]$ we have that $\theta'', \theta''' \prec \theta$ and we can apply inductive arguments for them. But we have that $[\alpha'] > [\alpha]$ and $\theta' \succ \theta$. Applying (20) to θ' we obtain three pairs of partitions:

$$(\theta')' = [(\alpha')', (\gamma')'] = [(a_1 - c_{e+1}, a_1 - c_{e+2}, a_1, a_2, \ldots, a_d), (c_{e+3}, \ldots, c_k)],$$

$$(\theta')'' = [(\alpha')'', (\gamma')''] = [(a_1 - c_{e+1}, a_1 - c_{e+2}, a_2, \dots, a_d), (c_{e+2}, c_{e+3}, \dots, c_k)],$$
$$(\theta')''' = [(\alpha')''', (\gamma')'''] = [(a_1 - c_{e+1}, a_1 - c_{e+2}, a_2, \dots, a_d), (c_{e+3}, \dots, c_k)].$$

Let us assume that

$$[\alpha] = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{r \text{ times}}, a_{r+1}, \dots, a_d), \quad a_1 > a_{r+1} \geq \cdots \geq a_d.$$

Then

$$[(\alpha')''] = [(\alpha')'''] = [\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{r-1 \text{ times}}, a_1 - c_{e+1}, a_1 - c_{e+2}, a_{r+1}, \dots, a_d] < [\alpha]$$

and again $(\theta')'', (\theta')''' \prec \theta$. Hence we have a problem with $(\theta')'$ only.

The application of (20) to $(\theta')'$ gives three pairs $((\theta')')', ((\theta')'', ((\theta')')'''$. The latter two, $((\theta')')''$ and $((\theta')')'''$, are smaller than θ and

$$((\theta')')' = [(a_1, \dots, a_d, a_1 - c_{e+1}, a_1 - c_{e+2}, a_1 - c_{e+3}), (c_{e+4}, \dots, c_k)] \succ \theta.$$

Continuing to apply (20), we obtain in each step pairs of partitions which are smaller than θ, and the pairs

$$[(a_1, \dots, a_d, a_1 - c_{e+1}, \dots, a_1 - c_{e+j}), (c_{e+j+1}, \dots, c_k)] \succ \theta.$$

Finally, we shall reach the pair

$$[(a_1, \dots, a_d, a_1 - c_{e+1}, \dots, a_1 - c_k), (0)]$$

corresponding to the product

$$\prod_{i=1}^{d} \frac{1}{1 - A_i z^{a_i}} \prod_{m=e+1}^{k} \frac{1}{1 - A_1 C_m z^{a_1 - c_m}} \prod_{j=d+1}^{e} \frac{1}{1 - B_j},$$

which we can handle as in Case 1 of Theorem 4.7.

Case 3. Let $a_1 < c_{e+1}$. Applying (20) to θ gives pairs of partitions

$$\begin{aligned} \theta' &= [\alpha', \gamma'] = [(a_1, a_2, \dots, a_d), (c_{e+1} - a_1, c_{e+2}, \dots, c_k)], \\ \theta'' &= [\alpha'', \gamma''] = [(a_2, \dots, a_d), (c_{e+1} - a_1, c_{e+1}, c_{e+2}, \dots, c_k)], \\ \theta''' &= [\alpha''', \gamma'''] = [(a_2, \dots, a_d), (c_{e+1} - a_1, c_{e+2}, \dots, c_k)] \end{aligned}$$

with $\theta', \theta''' \prec \theta$. As in Case 2, we replace θ'' by a sequence

$$[(a_{j+1}, \dots, a_d), (c_{e+1} - a_1, \dots, c_{e+1} - a_j, c_{e+1}, c_{e+2}, \dots, c_k)], \quad j = 2, \dots, d,$$

until we obtain $[(0), (c_{e+1} - a_1, \dots, c_{e+1} - a_d, c_{e+1}, c_{e+2}, \dots, c_k)]$ and then handle the corresponding product as in Case 2 of Theorem 4.7. $\square$

The following theorem is a modification of Theorem 4.7 for systems of Diophantine inequalities.

Theorem 4.9. *Let $a_{ij}, a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$, be arbitrary integers. Then the characteristic series $\chi_S(t_1, \dots, t_k)$ of the set S of the solutions in nonnegative integers of the system of Diophantine inequalities*

$$\left| \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k + a_1 \geq 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k + a_m \geq 0 \end{array} \right.$$

is a nice rational function.

Proof. We repeat the arguments from the proof of Theorem 4.7 using Lemma 4.4

instead of Lemma 4.3. Consider the linear Diophantine inequality

$$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + a \geq 0, \quad a_i, a \in \mathbb{Z},$$

and the nice rational function

$$f(t_1, \ldots, t_k) = t_1^{r_1} \cdots t_k^{r_k} \prod \frac{1}{1 - t_1^{q_{i1}} \cdots t_k^{q_{ik}}}$$

with a set S of solutions in nonnegative integers. By Lemma 4.4 we have to compute the component

$$\chi_S(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t_1, \ldots, t_k)$$

of the Laurent series

$$\xi_S(t_1, \ldots, t_k, z) = z^a f(t_1 z^{a_1}, \ldots, t_k z^{a_k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t_1, \ldots, t_k) z^n.$$

Applying the algorithm of Elliott to the part $\prod \frac{1}{1 - D_i z^{d_i}}$ of

$$z^a f(t_1 z^{a_1}, \ldots, t_k z^{a_k}) = z^b B \prod \frac{1}{1 - D_i z^{d_i}},$$

where B and D_i are monomials in $t_1, \ldots, t_k$, we present $z^a f(t_1 z^{a_1}, \ldots, t_k z^{a_k})$ as a sum of products of the form

$$\xi^+ = z^d E \prod \frac{1}{1 - G_i} \prod_{h_j > 0} \frac{1}{1 - H_j z^{h_j}} \text{ and } \xi^- = z^d E \prod \frac{1}{1 - G_i} \prod_{h_j < 0} \frac{1}{1 - H_j z^{h_j}},$$

where again E, G_i, H_j are monomials in $t_1, \ldots, t_k$. In order to complete the proof we have to determine the contribution of each summand ξ^+ and ξ^- to $\chi_S(t_1, \ldots, t_k)$.

Case 1. The exponent d of z in ξ^+ satisfies $d \geq 0$. Then the whole ξ^+ contributes to $\chi_S(t_1, \ldots, t_k)$.

Case 2. The exponent d of z in ξ^- satisfies $d \leq 0$. If $d < 0$, then ξ^- does not contribute to $\chi_S(t_1, \ldots, t_k)$ because its expansion as a Laurent series contains only negative degrees of z. If $d = 0$, then the contribution of ξ^- is $E \prod \frac{1}{1 - G_i}$.

Case 3. The exponent d of z in ξ^+ satisfies $d < 0$. We expand $\prod_{h_j > 0} \frac{1}{1 - H_j z^{h_j}}$ as

$$\prod_{h_j > 0} \frac{1}{1 - H_j z^{h_j}} = 1 + K_1 z + K_2 z^2 + \cdots + K_{d-1} z^{d-1} + z^d L(z),$$

where $L(z) \in \mathbb{C}[[t_1, \ldots, t_k, z]]$. Then

$$\xi^+ = E \prod \frac{1}{1 - G_i} (z^{-d} + K_1 z^{-d+1} + K_2 z^{-d+2} + \cdots + K_{d-1} z^{-1}) + E \prod \frac{1}{1 - G_i} L(z)$$

and the contribution of ξ^+ to $\chi_S(t_1, \ldots, t_k)$ is $E \prod \frac{1}{1 - G_i} L(z)$.

Case 4. The exponent d of z in ξ^- satisfies $d > 0$. As in Case 3 we have

$$\prod_{h_j < 0} \frac{1}{1 - H_j z^{h_j}} = 1 + K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2} + \cdots + K_d z^{-d} + z^{-(d+1)} L(z),$$

where $L(z) \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_k, z^{-1}]]$. Then

$$\xi^- = E \prod \frac{1}{1-G_i}(z^d + K_1 z^{d-1} + K_2 z^{d-2} + \cdots + K_{d-1}z + K_d) + z^{-1} E \prod \frac{1}{1-G_i} L(z)$$

and the contribution of ξ^- is

$$E \prod \frac{1}{1-G_i}(z^d + K_1 z^{d-1} + K_2 z^{d-2} + \cdots + K_{d-1}z + K_d). \qquad \square$$

There are several algorithms for solving linear systems of Diophantine equations and inequalities using the method of Elliott, see e.g. Domenjoud, Tomás [17], Pasechnik [35] and Xin [47].

Applying the result of Elliott we start with a nice rational function and obtain the result also in the form of a nice rational function. See Stanley [42] for further discussions and applications of the approach of Elliott.

The next theorem of Blakley [13] gives another point of view of the problem.

Theorem 4.10. *Let*

$$f(t_1, \dots, t_k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t_1^{a_{i1}} \cdots t_k^{a_{ik}}} = \sum_{b_j \geq 0} \beta(b_1, \dots, b_k) t_1^{b_1} \cdots t_k^{b_k}, \quad \beta(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{N}.$$

Then there is a finite decomposition of $\mathbb{N}^k$ such that the coefficients $\beta(b_1, \dots, b_k)$ are polynomials of degree $n-k$ in $b_1, \dots, b_k$ on each piece.

In the notation of Theorem 4.10 Sturmfels [43] proposed a method to find such a decomposition and the polynomials which express the coefficients $\beta(b_1, \dots, b_k)$.

5. The algorithm of Xin. In this section we give an idea for the algorithm of Xin [47] in a form suitable for our purposes. The algorithm is based on two easy observations.

Lemma 5.1. *Let*

$$q(t_1, \dots, t_k, z) = 1 - t_1^{a_1} \cdots t_k^{a_k} z^b, \quad a_i \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}.$$

(i) *If $b > 0$, then $q(t_1, \dots, t_k, z)$ decomposes as a product of irreducible polynomials in $\mathbb{Q}[t_1, \dots, t_k, z]$ with constant terms (as polynomials in z) equal to 1.*

(ii) *If $b < 0$, then $q(t_1, \dots, t_k, z)$ is decomposed as*

$$q(t_1, \dots, t_k, z) = z^b \prod_{i=1}^{m} u_i(t_1, \dots, t_k, z),$$

where the irreducible polynomials $u_i(t_1, \dots, t_k, z) \in \mathbb{Q}[t_1, \dots, t_k, z]$ are with leading terms (as polynomials in z) equal to z^{n_i}, $n_i \geq 1$.

Proof. (i) Let $b > 0$ and let $q(t_1, \dots, t_k, z) = 1 - t_1^{a_1} \cdots t_k^{a_k} z^b$ decompose as

$$q(t_1, \dots, t_k, z) = \prod_{i=1}^{m} u_i(t_1, \dots, t_k, z), \quad u_i(t_1, \dots, t_k, z) \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_k, z].$$

Comparing the constant term 1 of $q(t_1, \dots, t_k, z)$ with respect to z with the product of the constant terms of the factors $u_i(t_1, \dots, t_k, z)$ we derive that the constant terms of $u_i(t_1, \dots, t_k, z)$ belong to $\mathbb{Q}$, i.e. we may assume that they are equal to 1.

(ii) If $b < 0$ we present $q(t_1, \dots, t_k, z)$ in the form

$$q(t_1, \dots, t_k, z) = \frac{1}{z^c} q_1(t_1, \dots, t_k, z), \quad q_1(t_1, \dots, t_k, z) = z^c - t_1^{a_1} \cdots t_k^{a_k}, \quad c = -b.$$

As in (i), comparing the leading monomials z^c of $q_1(t_1,\dots,t_k,z)$ and the product of the leading monomials $u_i(t_1,\dots,t_k,z)$ we derive the proof of (ii). $\square$

Proposition 5.2. *Let*

$$
\begin{aligned}
f(t_1,\dots,t_k,z) &= g(t_1,\dots,t_k,z,z^{-1})\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1-t_1^{a_{i1}}\cdots t_k^{a_{ik}}z^{b_i}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t_1,\dots,t_k)z^n,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

where $a_{ij}\in\mathbb{N}$, $b_i\in\mathbb{Z}$, $g(t_1,\dots,t_k,z,z^{-1})\in\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_k,z,z^{-1}]$ *is a polynomial in* $t_1,\dots,t_k$ *and a Laurent polynomial in* z, *and* $f_n(t_1,\dots,t_k)\in\mathbb{Q}[[t_1,\dots,t_k]]$. *Let the partial fraction decomposition of* $f(t_1,\dots,t_k,z)$ *be*

$$
f(t_1,\dots,t_k,z) = p(t_1,\dots,t_k,z) + \sum_{l,d}\frac{p_{ld}(t_1,\dots,t_k,z)}{q_l^d(t_1,\dots,t_k,z)} + \sum_{j,e}\frac{r_{je}(t_1,\dots,t_k,z)}{s_j^e(t_1,\dots,t_k,z)},
$$

where $p,p_{ld},q_l,r_{je},s_j\in\mathbb{Q}[t_1,\dots,t_k,z]$, q_l *and* s_j *are irreducible in* $\mathbb{Q}[t_1,\dots,t_k,z]$, $\deg_z p_{ld}<\deg_z q_l$, $\deg_z r_{je}<\deg_z s_j$, *the constant term* $q_l(t_1,\dots,t_k,0)$ *of each* q_l *be nonzero and belong to* $\mathbb{Q}$ *and the constant term* $s_j(t_1,\dots,t_k,0)$ *of each* s_j *be a polynomial of positive degree in* $\mathbb{Q}[t_1,\dots,t_k]$ *(or* $s_j(t_1,\dots,t_k,0)=z$*). Then*

$$
h(t_1,\dots,t_k,z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t_1,\dots,t_k)z^n = p(t_1,\dots,t_k,z)+\sum_{l,d}\frac{p_{ld}(t_1,\dots,t_k,z)}{q_l^d(t_1,\dots,t_k,z)}
$$

and $f_0(t_1,\dots,t_k)=h(t_1,\dots,t_k,0)$.

Proof. The polynomials $q^d(t_1,\dots,t_k,z)$ and $s^e(t_1,\dots,t_k,z)$ in the denominators in the expression of $f(t_1,\dots,t_k,z)$ are of the form prescribed in Lemma 5.1 (or $s(t_1,\dots,t_k,z)=z$). Hence we may assume that

$$
q(t_1,\dots,t_k,z)=1+zv(t_1,\dots,t_k,z),
$$

$$
s(t_1,\dots,t_k,z)=z^n+w(t_1,\dots,t_k,z),
$$

$v,w\in\mathbb{Q}[t_1,\dots,t_k,z]$, $\deg_z w<n$, $\deg w(t_1,\dots,t_k,0)>0$ (or $s(t_1,\dots,t_k,z)=z$). The expansion of the fractions with denominators of the form $q^d(t_1,\dots,t_k,0)$ belongs to $\mathbb{Q}[[t_1,\dots,t_k,z]]$ because the expression

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q^d(t_1,\dots,t_k,z)} &= \frac{1}{(1+zv(t_1,\dots,t_k,z))^d} \\
&= (1+zv(t_1,\dots,t_k,z)+z^2v^2(t_1,\dots,t_k,z)+\cdots)^d
\end{aligned}
$$

does not involve negative degrees of z. By similar arguments, when $\deg s(t_1,\dots,t_k,0)>0$, all monomials in the expansion of

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s^e(t_1,\dots,t_k,z)} &= \frac{1}{(z^n+w(t_1,\dots,t_k,z))^e} = \frac{1}{z^{nd}(1+u(t_1,\dots,t_k,z^{-1}))^e} \\
&= \frac{1}{z^{nd}}(1+u(t_1,\dots,t_k,z^{-1})+u^2(t_1,\dots,t_k,z^{-1})+\cdots)^d
\end{aligned}
$$

involve factors z^{-m} with negative degrees of z with $m\ge n$. Since m is larger than the degree in z of the corresponding numerator $r(t_1,\dots,t_k,z)$, the expansion of these fractions contains only negative degrees of z and does not contribute to $h(t_1,\dots,t_k,z)$.

When $s(t_1,\dots,t_k,z)=z$ the numerator $r(t_1,\dots,t_k,z)$ does not depend on z and hence these fractions do not participate in $h(t_1,\dots,t_k,z)$ again. $\square$

Algorithm 5.3. We want to solve the homogeneous linear Diophantine system of equations and inequalities

$$
\left|\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k &=& 0\\
\cdots & & \\
a_{l1}x_1 + \cdots + a_{lk}x_k &=& 0\\
a_{l+1,1}x_1 + \cdots + a_{l+1,k}x_k &\geq& 0\\
\cdots & & \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k &\geq& 0.
\end{array}\right. \tag{22}
$$

We start with the function

$$u(t_1,\dots,t_k)=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-t_i},$$

replace the variables t_i by $t_iz^{a_{1i}}$, $i=1,\dots,k$, and expand $u(t_1z^{a_{11}},\dots,t_kz^{a_{1k}})$ in the form (21)

$$f(t_1,\dots,t_k,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t_1,\dots,t_k)z^n.$$

Applying Proposition 5.2 we obtain

$$h(t_1,\dots,t_k,z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t_1,\dots,t_k)z^n=p(t_1,\dots,t_k,z)+\sum_{l,d}\frac{p_{ld}(t_1,\dots,t_k,z)}{q_l^d(t_1,\dots,t_k,z)}.$$

All polynomials $q_l(t_1,\dots,t_k,z)$ in the denominators are divisors of some $1-t_1^{b_1}\cdots t_k^{b_k}z^c$, multiplying the numerators and denominators with suitable polynomials we present $h(t_1,\dots,t_k,z)$ as a fraction with denominator in the form $\prod(1-t_1^{b_1}\cdots t_k^{b_k}z^c)$, i.e. the result is a nice rational function. If we start with an equation $a_{11}x_1+\cdots+a_{1k}x_k=0$ from (22) we take $f_0(t_1,\dots,t_k)=h(t_1,\dots,t_k,0)$, continue the work with $f_0(t_1,\dots,t_k)$ and handle the next equation or inequality of (22). If we have an inequality $a_{11}x_1+\cdots+a_{1k}x_k\geq 0$, we make the next step with the function $h(t_1,\dots,t_k,1)$ which takes into account all $f_n(t_1,\dots,t_k)$, $n\geq 0$. Continuing in the same way, we obtain in each step a nice rational function which is the characteristic series of the solutions of the first several equations and inequalities of (22). At the final step, we obtain the characteristic series of the solutions of the whole system.

Example 5.4. We start with the system from Example 2.6

$$
\left|\begin{array}{rcl}
x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &=& 0\\
2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 &=& 0.
\end{array}\right.
$$

By Algorithm (5.3),

$$u(t_1,t_2,t_3,t_4)=\frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)(1-t_4)},$$

$$f(t_1,t_2,t_3,t_4,z)=u(t_1z,t_2z^2,t_3z^{-1},t_4z^{-1})$$

$$=\frac{1}{(1-t_1)(1-t_2z^2)(1-t_3z^{-1})(1-t_4z^{-1})}$$

$$= \frac{t_3^2}{(t_3-t_4)(1-t_1t_3)(1-t_2t_3^2)(z-t_3)} - \frac{t_4^2}{(t_3-t_4)(1-t_1t_4)(1-t_2t_4^2)(z-t_4)}$$
$$+ \frac{(1+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3t_4+(t_1+t_2t_3+t_2t_4+t_1t_2t_3t_4)z)t_2}{(t_2-t_1^2)(1-t_2t_3^2)(1-t_2t_4^2)(1-t_2z^2)}$$
$$- \frac{t_1^2}{(t_2-t_1^2)(1-t_1t_3)(1-t_1t_4)(1-t_1z)},$$
$$h(t_1,t_2,t_3,z) = \frac{(1+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3t_4+(t_1+t_2t_3+t_2t_4+t_1t_2t_3t_4)z)t_2}{(t_2-t_1^2)(1-t_2t_3^2)(1-t_2t_4^2)(1-t_2z^2)}$$
$$- \frac{t_1^2}{(t_2-t_1^2)(1-t_1t_3)(1-t_1t_4)(1-t_1z))},$$
$$f_0(t_1,t_2,t_3,t_4) = h(t_1,t_2,t_3,0) = \frac{1+t_2t_3t_4-t_1t_2t_3^2t_4-t_1t_2t_3t_4^2}{(1-t_1t_3)(1-t_1t_4)(1-t_2t_3^2)(1-t_2t_4^2)}.$$

We continue in the same way with the second equation and present $f_0(t_1z^2, t_2z^3, t_3z^{-2}, t_4z^{-1})$ as a sum of partial fractions. Finally we obtain the characteristic series of the solutions of (10)

$$\chi_S(t_1,t_2,t_3,t_4) = \frac{1}{(1-t_1t_3)(1-t_2t_3t_4)} = \sum_{m,n\geq 0} (t_1t_3)^m(t_2t_3t_4)^n.$$

This means that all solutions of the system are

$$m(1,0,1,0) + n(0,1,1,1), \quad m,n \in \mathbb{N},$$

i.e. the minimal solutions are $(1,0,1,0)$ and $(0,1,1,1)$.

6. Our solution of the problem of Robles-Pérez and Rosales. We shall illustrate the method of Elliott and the algorithm of Xin on the example of the Diophantine transport problem given in [37] which was one of the two main motivations of the present project. As stated in [37], the example is the following.

A transport company carries cars from the factory to a dealer using small and large trucks with a capacity of three and six cars. The trucks cost for the company 1200 *and* 1500 *euros, respectively. The company receives from the dealer* 300 *euros for each transported car and offers as a bonus the transportation of an additional car without charge. The company considers that the ordered transport is profitable when it has a profit of at least* 900 *euros. How many cars must be transported at least in order to achieve that purpose?*

If y denotes the required number of cars, x_3 and x_6 are the numbers of the small and the large trucks, respectively, the problem is equivalent to the linear Diophantine system

$$\left| \begin{array}{l} 300y \geq 1200x_3 + 1500x_6 + 900 \\ y + 1 \leq 3x_3 + 6x_6 \end{array} \right.$$

which after a simplification has the form:

$$\left| \begin{array}{l} y \geq 4x_3 + 5x_6 + 3 \\ y \leq 3x_3 + 6x_6 - 1 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} -4x_3 - 5x_6 + y - 3 \geq 0 \\ 3x_3 + 6x_6 - y - 1 \geq 0. \end{array} \right. \tag{23}$$

The goal of the paper [37] was to prove that the set T of the integers n for which the system (23) has a solution $(x_3, x_6, y) = (r_3, r_6, n) \in \mathbb{N}^3$ together with 0 forms a

submonoid of $(\mathbb{N},+)$, and to give algorithmic procedures how to compute T. We shall extend this goal and show how to find the set S of all solutions $(r_3,r_6,n)\in\mathbb{N}^3$ of the system. In particular, we shall discuss the relations between the profit and the solutions of the system.

Remark 6.1. As in the one-dimensional case considered in [37], it is easy to see that the set S of solutions (r_3,r_6,n) of the system (23), together with $(0,0,0)$ forms a submonoid of $(\mathbb{N}^3,+)$.

Our solution 6.2. Applying Theorem 3.1 and Algorithm 5.3, the first inequality of (23) is replaced by the equation $-4x_3-5x_6+y-3t=0$ which has to be solved for $t=1$. We start with the function

$$u(x_3,x_6,y,t)=\frac{1}{(1-x_3)(1-x_6)(1-y)(1-t)}$$

and replace the variables x_3,x_6,y,t by $x_3z^{-4},x_6z^{-5},yz,tz^{-1}$, respectively. Presenting the obtained function $f(x_3,x_6,y,t,z)$ as a sum of partial fractions with respect to z

$$f(x_3,x_6,y,t,z)=u(x_3z^{-4},x_6z^{-5},yz,tz^{-3})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(x_3,x_6,y,t)z^n,$$

we obtain

$$h(x_3,x_6,y,t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x_3,x_6,y,t)z^n=\frac{1}{(1-x_3y^4)(1-x_6y^5)(1-y^3t)(1-yz)}.$$

By Theorem 3.1 the solutions of the first inequality in (23) are obtained from the solutions (x_3,x_6,y,t) with $t=1$. In the expansion

$$h(x_3,x_6,y,t,z)=\sum_{d=0}^{\infty}h_d(x_3,x_6,y,z)t^d$$

these solutions correspond to the coefficient $h_1(x_3,x_6,y,z)$. Hence

$$h_1(x_3,x_6,y,z)=\frac{y^3}{(1-x_3y^4)(1-x_6y^5)(1-yz)}.$$

Instead of the second inequality of (23) we consider the equation

$$3x_3+6x_6-y-v=0.$$

We start with the function

$$p(x_3,x_6,y,v)=\frac{1}{1-v}h_1(x_3,x_6,y,1)=\frac{y^3}{(1-x_3y^4)(1-x_6y^5)(1-y)(1-v)}$$

and applying Algorithm 5.3 we obtain

$$q(x_3,x_6,y,v,w)=p(x_3w^3,x_6w^6,yw^{-1},vw^{-1})$$

$$=\frac{y^3}{w^3(1-x_3y^4w^{-1})(1-x_6y^5w)(1-yw^{-1})(1-vw^{-1})}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}q_m(x_3,x_6,y,v)w^m,$$

$$r(x_3,x_6,y,v,w)=\sum_{m=0}^{\infty}q_m(x_3,x_6,y,v)w^m$$

$$=\frac{x_6^3y^{18}}{(1-x_6y^6)(1-x_3x_6y^9)(1-x_6y^5v)(1-x_6y^5w)}=\sum_{k=0}^{\infty}r_k(x_3,x_6,y,w)v^k,$$

$$r_1(x_3, x_6, y, w) = \frac{x_6^4 y^{23}}{(1 - x_6 y^5 w)(1 - x_6 y^6)(1 - x_3 x_6 y^9)},$$

$$\chi_S(x_3, x_6, y) = r_1(x_3, x_6, y, 1) = \frac{x_6^4 y^{23}}{(1 - x_6 y^5)(1 - x_6 y^6)(1 - x_3 x_6 y^9)}.$$

Hence the set S of all solutions (r_3, r_6, n) of the system (23) are

$$(r_3, r_6, n) = (0, 4, 23) + c_1(0, 1, 5) + c_2(0, 1, 6) + c_3(1, 1, 9), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}.$$

Replacing x_3 and x_6 with 1 in $\chi_S(x_3, x_6, y)$ we obtain the characteristic series of the set T of the possible values of n:

$$\chi_T(y) = \chi_S(1, 1, y) = \frac{y^{23}}{(1 - y^5)(1 - y^6)(1 - y^9)}$$

which expresses the original solution of the problem in [37] in the form of its characteristic series.

Remark 6.3. Using the expression for $\chi_S(x, y, z)$ found above, it is easy to find a relation between the solutions and the corresponding profit. Since for each transported car the firm gains 300 euros and pays, respectively, 1200 euros and 1500 euros for each small and large truck, we shall consider the function

$$\omega(x_3, x_6, y, t) = \chi_S(x_3 t^{-4}, x_6 t^{-5}, yt) = \frac{x_6^4 y^{23} t^3}{(1 - x_6 y^5)(1 - x_3 x_6 y^9)(1 - x_6 y^6 t)}$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} \omega_k(x_3, x_6, y) t^k = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x_6^{k+1} y^{6k+5} t^k}{(1 - x_6 y^5)(1 - x_3 x_6 y^9)}.$$

The firm will have a profit $300k$ euros for all (r_3, r_6, n) such that $x_3^{r_3} x_6^{r_6} y^n$ participates with a nonzero coefficient $\alpha(r_3, r_6, n)$ in the expansion of $\omega_k(x_3^{r_3} x_6^{r_6} y^n)$ as a power series:

$$\omega_k(x_3, x_6, y) = \frac{x_6^{k+1} y^{6k+5}}{(1 - x_6 y^5)(1 - x_3 x_6 y^9)} = \sum_{r_3, r_6, n \geq 0} \alpha(r_3, r_6, n) x_3^{r_3} x_6^{r_6} y^n.$$

In particular, it is easy to see that the minimal number of transported cars to gain a profit $300k$ is $n = 6k + 5$ (plus one car as a bonus) and for this purpose the firm has to use $k + 1$ large trucks.

Acknowledgements. The second named author is very grateful to Andreas Weiermann for his comments about the relations of the problems considered in the paper with recursion theory and about the results Seidenberg [40] and Moreno-Socías [33, 34] in Theorems 2.12 and 2.13.

REFERENCES

[1] H. Abdulrab, M. Maksimenko. General solution of linear Diophantine equations and inequations. In: "Rewriting techniques and applications. 6th International Conference, RTA-95, Kaiserslautern, Germany, April 5–7, 1995", Lecture Notes in Computer Science, vol. **914**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 339–351.

[2] W. Ackermann. Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. *Math. Ann.*, **99** (1928), 118–133.

[3] F. Ajili, E. Contejean. Complete solving of linear Diophantine equations and inequations without adding variables. In: "Principles and Practice of Constraint Programming – CP'95 (Cassis, 1995), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. **976**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 1–17.

[4] G. E. Andrews. MacMahon's partition analysis. I: The lecture Hall partition theorem. In: Mathematical Essays in Honor of Gian-Carlo Rota's 65th Birthday (eds B. E. Sagan et al.) Prog. Math., vol. **161**, Birkhäuser, Boston, MA, 1998, 1–22.

[5] G. E. Andrews, P. Paule. MacMahon's partition analysis. XII: Plane partitions. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, **76** (2007), No. 3, 647–666.

[6] G. E. Andrews, P. Paule, A. Riese. MacMahon's partition analysis: The Omega package. *Eur. J. Comb.*, **22**, 7 (2001), 887–904.

[7] G. E. Andrews, P. Paule, A. Riese. MacMahon's partition analysis. VI: A new reduction algorithm. *Ann. Comb.*, **5** (2001), 251–270.

[8] M. Aschenbrenner, W. Y. Pong. Orderings of monomial ideals. *Fundam. Math.*, **181** (2004), No. 1, 27–74.

[9] L. Bedratyuk, G. Xin. MacMahon partition analysis and the Poincaré series of the algebras of invariants of ternary and quaternary forms. *Linear Multilinear Algebra*, **59** (2011), 789–799.

[10] A. Berele. Applications of Belov's theorem to the cocharacter sequence of p.i. algebras. *J. Algebra*, **298** (2006), 208–214.

[11] A. Berele. Properties of hook Schur functions with applications to p. i. algebras. *Adv. Appl. Math.*, **41** (2008), 52–75.

[12] F. Benanti, S.Boumova, V. Drensky, G. Genov, P. Koev. Computing with rational symmetric functions and applications to invariant theory and PI-algebras, *Serdica Math. J.*, **38** (2012), No. 1–3, 137–188.

[13] G. R. Blakley. Combinatorial remarks on partitions of a multipartite number. *Duke Math. J.*, **31** (1964), 335–340; Errata Ibid. **31** (1964), 718.

[14] Y. A. Bogoyavlenskiy, D. G. Korzun. A software system for remote solving homogenous linear diophantine equations in non-negative integers. *St. Petersburg State Polytechnical University J., Computer Science, Telecommunication and Control Systems*, (2010), No. 1(93), 90–99 (in Russian).

[15] E. Contejean. Solving linear Diophantine constraints incrementally, in "Logic programming (Budapest, 1993)". MIT Press Ser. Logic Program., Cambridge, MA, MIT Press, 1993, 532–549.

[16] L. E. Dickson. Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors. *Amer. J. Math.*, **35** (1913), No. 4, 413–422.

[17] E. Domenjoud, A. P. Tomás. From Elliott-MacMahon to an algorithm for general linear constraints on naturals. In: "Principles and Practice of Constraint Programming – CP'95 (Cassis, 1995), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. **976**, Berlin, Springer-Verlag, 1995, 18–35.

[18] V. Drensky, C. K. Gupta. Constants of Weitzenböck derivations and invariants of unipotent transformations acting on relatively free algebras. *J. Algebra*, **292** (2005), 393–428.

[19] E. B. Elliott. On linear homogeneous diophantine equations. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **34** (1903), 348–377.

[20] L. Euler. Introductio in Analysin Infinitorum, Vol. I, Bousquet, Lausanne, M.-M. 1748. Reprinted as: Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. I, Vol. VIII (eds A. Krazer, F. Rudio). Teubner, Leipzig, 1922; German translation by H. Maser: Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Erster Teil, Springer-Verlag, Berlin, 1885, reprinted: 1983.

[21] L. Euler. Vollstaendige Anleitung zur Algebra. 2. Theil, Von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytic, Kays. Acad. der Wissenschaften, St. Petersburg, 1770. Reprinted in: Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. I, Vol. I (Vollständige Anleitung zur Algebra, mit den Zusätzen von Joseph Louis Lagrange, (ed. H. Weber), Teubner, Leipzig, 1911, 209–498; English translation (with 1. Theil): Elements of Algebra, J. Johnson, London, 1797. Fifth edition 1840, reprinted: Springer-Verlag, New York, 1984.

[22] L. Euler. De partitione numerorum in partes tam numero quam specie dates. *Noui Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, **14** (1769): I (1770) 168–187. Reprinted in: Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. I, Vol. III (Commentationes Arithmeticae, Vol. II (F. Rudio, ed.), Teubner, Leipzig, 1917, 132–147.

[23] M. Filgueiras, A. P. Tomas. A fast method for finding the basis of non-negative solutions to a linear diophantine equation. *J. Symb. Comput.*, **19** (1995), No. 6, 507–526.

[24] P. Gordan. Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten. *Math. Ann.*, **6**(1873), No. 1, 23–28.

[25] P. Gordan. Neuer Beweis des Hilbert'schen Satzes über homogene Functionen. *Gött. Nachr.* (1899), 240–242.

[26] J. H. Grace, A. Young. The Algebra of Invariants. Cambridge, Cambridge University Press, 1903, reprinted: 2010.

[27] D. Hilbert. Über die Theorie der algebraischen Formen, *Math. Ann.*, **36** (1890), 473-534. Reprinted in: Gesammelte Abhandlungen. Bd. 2. Algebra. Invariantentheorie. Geometrie, Julius Springer, Berlin, viii, 1933, 199–257, reprinted Chelsea, New York, 1965.

[28] D. Zh. Korzun. On the existence of generating contex-free grammars for an arbitrary linear Diophantine system. *Tr. Petrozavodsk. Gos. Univ. Ser. Mat.*, *6* (1999), 34–40 (in Russian).

[29] D. Zh. Korzun. A certain mapping between formal grammars and systems of linear Diophantine equations. *Vestnik Molodykh Uchenykh, Seria Prikladnaya matematika i mekhanika, Saint-Petersburg Research Center of the Russian Academy of Science*, (2000), No. 3, 50–56 (in Russian).

[30] B. S. Kostadinov. Application of Rational Generating Functions to Algebras with Polynomial Identities. M. Sci. Thesis, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University " St. Kliment Ohridski" Program "Mathematics and Mathematical Physics", 2011 (in Bulgarian).

[31] S. L. Kryvyi. Combinatorial method for solving systems of linear constraints. *Kibern. Sist. Anal.*, **50** (2014), No. 4, 14–26 (in Russian); English translation in: *Cybern. Syst. Anal.*, **50** (2014), No. 4, 495–506.

[32] P. A. MacMahon. Combinatory Analysis, vols 1 and 2. Cambridge Univ. Press, 1915, 1916. Reprinted in one volume: Chelsea, New York, 1960.

[33] G. Moreno Socías. An Ackermannian polynomial ideal. Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, Proc. 9th Int. Symp., AAECC-9, New Orleans/LA (USA) 1991, Lect. Notes Comput. Sci., vol. **539**, Berlin, Springer-Verlag, 1991, 269–280.

[34] G. Moreno Socías. Length of polynomial ascending chains and primitive recursiveness. *Math. Scand.*, **71** (1992), No. 2, 181–205.

[35] D. V. Pasechnik. On computing Hilbert bases via the Elliot-MacMahon algorithm. *Theor. Comput. Sci.*, **263** (2001), No. 1–2, 37–46.

[36] P. Pisón-Casares, A. Vigneron-Tenorio. $\mathbb{N}$-solutions to linear systems over $\mathbb{Z}$. *Linear Algebra Appl.*, **384** (2004), 135–154.

[37] A. M. Robles-Pérez, J. C. Rosales. On a transport problem and monoids of non-negative integers. arXiv:1611.02627v2 [math.GR], *Aequat. Math.*, **92** (2018), 661–670.

[38] A. M. Robles-Pérez, J. C. Rosales. Numerical semigroups in a problem about cost-effective transport. *Forum Math.*, **29** (2017), No. 2, 329–345.

[39] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García-García, M. B. Branco. Systems of inequalities and numerical semigroups. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, **65** (2002), No. 3, 611–623.
[40] A. Seidenberg. On the length of a Hilbert ascending chain. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **29** (1971), 443–450.
[41] A. Schrijver. Theory of Linear and Integer Programming. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1986, reprinted: 1998.
[42] R. Stanley. Linear homogeneous Diophantine equations and magic labelings of graphs. *Duke Math. J.*, **40** (1973), 607–632.
[43] B. Sturmfels. On vector partition functions. *J. Comb. Theory, Ser. A*, **72** (1995), No. 2, 302–309.
[44] A. P. Tomás. On Solving Linear Diophantine Constraints. Ph.D. Thesis, Universidade do Porto, 1997.
[45] A. P. Tomas, M. Filgueiras. Solving linear Diophantine equations using the geometric structure of the solution space. In: "Rewriting techniques and applications (Sitges, 1997)", Lecture Notes in Comput. Sci., vol. **1232**, Berlin, Springer-Verlag, 1997, 269–283.
[46] A. P. Tomas, M. Filgueiras. An algorithm for solving systems of linear Diophantine equations in naturals. In: "Progress in artificial intelligence (Coimbra, 1997)", Lecture Notes in Comput. Sci., vol. **1323**, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Berlin, Springer-Verlag, 1997, 73–84.
[47] G. Xin. A fast algorithm for MacMahon's partition analysis. *Electron. J. Comb.*, **11** (2004), No. 1, Research paper R58.

Silvia Boumova
Faculty of Mathematics and Informatics
Sofia University " St. Kliment Ohridski"
5 James Bourchier Blvd., 1164 Sofia, Bulgaria
and
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: boumova@fmi.uni-sofia.bg, silvi@math.bas.bg

Vesselin Drensky
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: drensky@math.bas.bg

Boyan Kostadinov
Faculty of Applied Mathematics and Informatics
Technical University of Sofia
8 Kl. Ohridski Blvd., 1000 Sofia, Bulgaria
e-mail: boyan.sv.kostadinov@gmail.com

ЕДНА ДИОФАНТОВА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ОТ 2016 ГОДИНА И НЕЙНОТО ВЪЗМОЖНО РЕШЕНИЕ ПРЕЗ 1903 ГОДИНА

Силвия Бумова, Веселин Дренски, Боян Костадинов

Този проект е мотивиран от неотдавнашен диофантов транспортен проблем как да транспортираме изгодно група от хора или обекти. Ние правим обзор на класически факти за решаване на системи линейни диофантови уравнения и неравенства в неотрицателни цели числа. Специално внимание отделяме на метода на Елиът от 1903 година и неговото по-нататъшно развитие от МакМахън в неговото „Омега смятане“. Като илюстрация намираме решение на разглеждания транспортен проблем на езика на формални степенни редове на няколко променливи, които са развития на рационални функции от специален вид.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

MATHEMATICAL METHODS IN AUTOMATIC SPEECH RECOGNITION*

Stoyan Mihov

We present the mathematical methods which are used in the process of Automatic Speech Recognition. The presentation is divided in three parts. We start with a short overview of the vocal tract and the corresponding acoustics equations. Afterwards we introduce the digital signal processing, which is performed over the speech signal in order to extract Mel-frequency cepstrum coefficients, corresponing to the articulation configuration. In the second part we present an approach for acoustic modeling based on time-delayed deep neural networks. We discuss the methodology for the machine learning of the acoustic model. In the third part we describe the use of finite-state f-transducers for representing the language model. For decoding the signal we shortly present the Viterby and the beam-search algorithm over a Hidden Markov Model represented as a f-transducer. Finally, we show experimental results for automatic speech recognition of Bulgarian language.

1. Introduction. Because of its practical importance, the area of Automatic Speech Recognition (ASR) has been extensively studied and developed in the recent years [4, 3, 6]. During the last three decades various approaches have been applied and tested in order to improve the ASR performance in respect to preciseness and efficiency [1]. In this paper we intent to present a concise description of the mathematical methods behind a typical implementation of a modern speech recognition system. We start with the processing of the input signal in Section 2. Afterwards we describe the acoustic modeling in Section 3. In Section 4 we show the representation and implementation of the language model. Section 5 presents the speech decoding algorithm. Finally, in Section 6 we show experimental results for ASR for Bulgarian language.

2. Digital signal processing for automatic speech recognition. The vocal tract is the general name of the cavities above the larynx (throat) through which the air passes when speech is produced. In humans, it consists of a laryngeal cavity (containing the larynx and vocal cords), an oral cavity, and a nasal cavity (Fig. 1). The vocal tract is responsible for generating different sounds with the current configuration of its individual components determining what the sound itself will be like.

*2020 **Mathematics Subject Classification:** 68T10, 94A12, 68T07, 68Q45.
Key words: speech corpus, automatic speech recognition, low resource language.
The research presented in this paper is partially funded by the Bulgarian Ministry of Education and Science via grant DO1-200/2018 "Electronic healthcare in Bulgaria" (e-Zdrave) and grant DO1-205/2018 "Information and Communication Technologies for Unified Digital Market in Science, Education and Security".

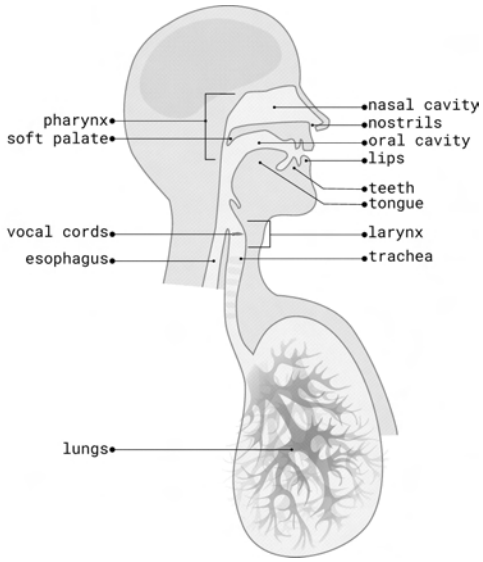


Fig. 1. Vocal tract

Let's take a closer look at Fig. 1. Speech, in fact, is simply the acoustic wave obtained at the end of the system – the lips and nostrils – as a result of expelled air from the lungs. The lungs act as an energy source for this system – the air flow resulting from contraction of the intercostal muscles and the diaphragm propagates up the trachea and through the glottis (the opening between the vocal cords). The vocal cords let out the propagated air. The oscillation of the vocal cords depends on the anatomical features. In men, the vocal cord oscillation frequency (F0) averages 125 Hz, and in women – 210 Hz. The acoustic wave resulting from the oscillation passes through the vocal tract, where it generates turbulence (swirls) when encountering barriers such as lips and teeth, and eventually leaves the system through one of the openings.

The wave propagation in the vocal tract can be modeled with the Navier-Stokes flow equations. Under some simplifications from the equations we derive that in the time domain the output signal $y(t)$ can be expressed as the convolution of the "source" $g(t)$ with the "envelope" or "filter" $h(t)$:

$$y(t) = g(t) * h(t).$$

The source corresponds to the signal generated by the vocal cord oscillations combined with the noise caused by the turbulence. The source determines the presence of noise, voice (the oscillation of the vocal cords), and the pitch. The envelope characterises the articulation configuration of the vocal tract – the relative positioning of the tongue, lips, soft palate etc. It determines the perceived sound (*phoneme*). Therefore, for the task of speech recognition we shall extract the envelope from the original signal. Applying the Fourier transform we derive the following equation in the frequency domain:

$$Y(x) = G(x).H(x).$$

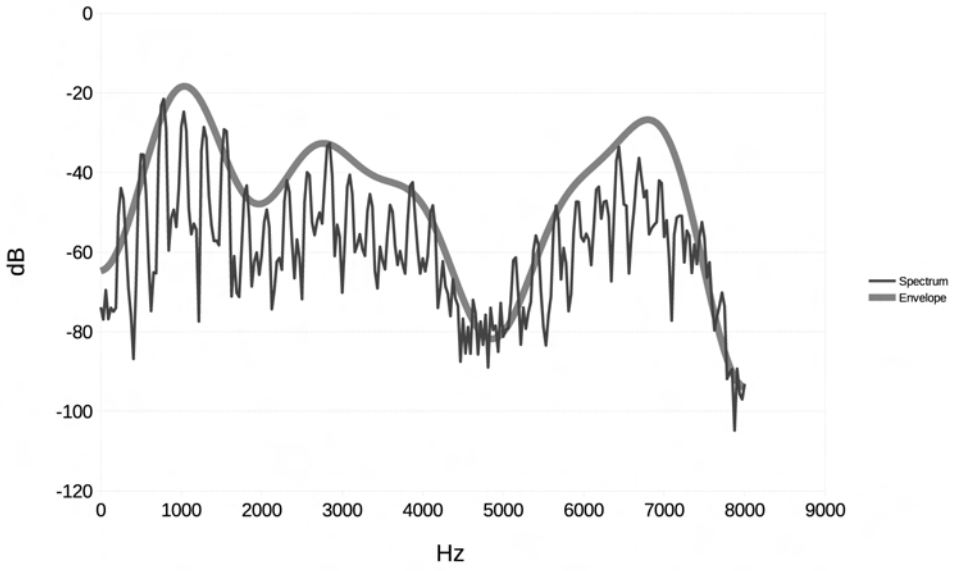


Fig. 2. Logarithm of the power of speech signal (thin line) and envelope (bold line) in the frequency domain

Taking the logarithm of the magnitude we obtain:

$$\log(|Y(x)|) = \log(|G(x)|) + \log(|H(x)|).$$

In Figure 2 the power spectrum of a vowel is shown by a thin line, which has a well expressed period of local extremums at the multiples of 280 Hz. This corresponds to the pitch of the source signal (F0). The global fluctuations shown by the bold line correspond to the envelope. If we consider the speech signal (the thin line) as a signal in time domain, then the higher frequencies correspond to the source and the lower frequencies correspond to the envelope. Hence we approximate the envelope by extracting the low frequency coefficients of the real cosine transform of power spectrum. Those are the so-called *cepstrum coefficients*.

The formulae for the digital signal processing are given in Table 1. For calculating the characteristic vectors of a speech signal we start with the audio input $s[n]$, sampled at $F_s = 16$ KHz. First an emphasis filter is applied for emphasizing the higher frequencies and for compensating the lip's radiation effect. Afterwards, the signal is sliced into frames using a 25 ms Hamming window in 10 ms steps rolling. The next step is extracting the envelope features of the signal. For that purpose we extract the Mel-frequency cepstrum coeffiecients. We compensate for some specifics of the human ear like logarithmic energy and frequency perception. To obtain the Mel-frequency power spectrum we slice the linear-frequency power spectrum using triangle windows spaced according to the Mel-scale. The characteristic feature vector we obtain from each frame consists of the 13 Mel-frequency cepstrum coefficients and their first and second derivatives (finite differences). Thus for every 10 ms of the input signal we obtain a 39-dimensional characteristic vector.

Table 1. Formulae for obtaining the Mel-frequency cepstrum coefficients

Sampled signal:	$s[n],\ n = 1, 2, \ldots$
Signal pre-emphasis:	$s' = s[n] - \alpha s[n-1],\ \alpha = 0.95,\ n = 1, 2, \ldots$
Hamming window:	$w[n] = 0.54 - 0.46\ \cos\left(\frac{2\pi(n-1)}{N}\right),\ n = 1, 2, \ldots, N$
Windowed frame:	$y_t[n-1] = s'[(t-1)N + n].w[n],\ n = 1, 2, \ldots, N$
Fourier transform:	$Y_t[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y_t[n] \exp(-2\pi i \frac{kn}{N}),\ k = 0, 1, \ldots, N-1$
Triangle windows:	$H_m[k] = \begin{cases} 0 & k < f[m-1] \\ \frac{k - f[m-1]}{f[m] - f[m-1]} & f[m-1] \le k \le f[m] \\ \frac{f[m+1] - k}{f[m+1] - f[m]} & f[m] \le k \le f[m+1] \\ 0 & k > f[m+1] \end{cases}$ $f[m] = \frac{N}{F_s} HerzToMel^{-1}(m \frac{HerzToMel(F_s/2)}{M+1})$
Mel-frequency power spectrum:	$C_t[m] = \log\left(\sum_{k=0}^{N-1} \lvert Y_t[k]\rvert^2 H_m[k]\right),\ m = 0, 1, \ldots, M-1$
Mel-frequency cepstrum coefficients:	$c_t[n] = \sum_{m=0}^{M-1} C_t[m] \cos\left(\pi n \frac{m+1}{2M}\right),\ n = 0, 1, \ldots, M'$

The sequence of characteristic vectors is passed to the next stages. More details on the articulation model and the DSP part might be found in [3, 6].

3. Acoustic modeling. The purpose of the acoustic model is to represent the relation between a given part of the audio signal and the phonemes in the target language. Given the characteristic vector of a frame and its surrounding frames, the acoustic model returns the posterior probability estimates for the observed speech signal $\mathbf{o}_{u,t}$ for the time frame t in utterance u, to correspond to the phoneme state s: $P(s|\mathbf{o}_{u,t})$.

A typical realization[1] of an acoustic model with a time delayed deep neural network (TD-DNN) is shown on Figure 3.The input to the network at moment t is the sequence $\mathbf{o}_{u,t}$ of the 23 characteristic vectors generated from the signal processing stage at the moments $t-13, \ldots, t+9$. Each of the four layers consists of an affine transform followed by a non-linear activation function. In other words, if the input of the layer i is $\mathbf{x}_{i-1} \in \mathbb{R}^{n_i}$ then $\mathbf{x}_i = \sigma(\mathbf{A}_i \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{b}_i)$, where $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$. The applied activation function σ is e.g. the ReLU nonlinearity:

$$\sigma(x) = \max(x, 0).$$

In a TD-DNN architecture the initial layer transforms are learnt on narrow contexts and

[1] For the sake of simplicity the given description does not cover some additional details like iVectors, variants of the activation and objective functions, drop-out, and many others.

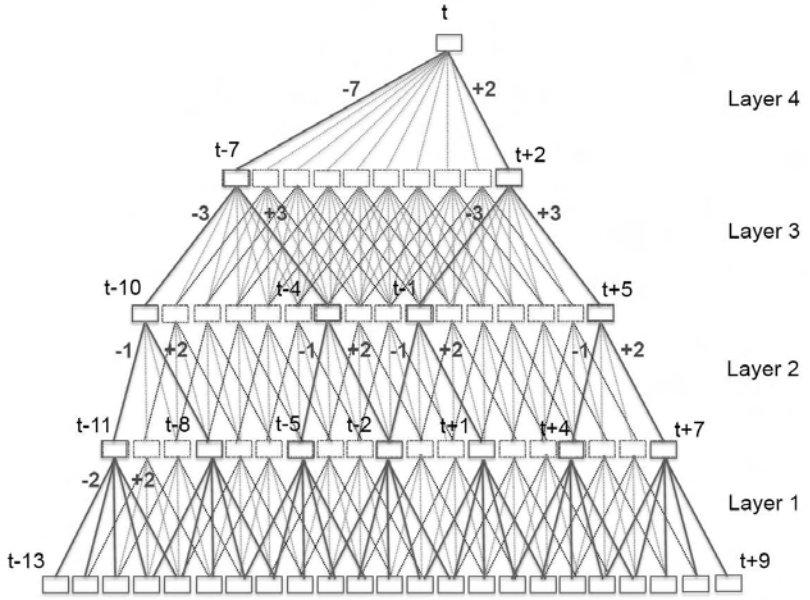


Fig. 3. Computation scheme of a sample time delayed deep neural network [5]

the deeper layers process the hidden activations from a wider temporal context. Each layer in a TD-DNN operates at a different temporal resolution, which increases as we go to higher layers of the network. Typically, there are large overlaps between input contexts of activations computed at neighbouring time steps. Therefore, they can be sub-sampled in order to increase the efficiency. A typical sub-sampling scheme is shown in bold on Figure 3. Let us denote the output of the network for a given phoneme state s for the input sequence $\mathbf{o}_{u,t}$ as $\mathbf{N}_s(\mathbf{o}_{u,t})$. The posterior probability for the phoneme state s is obtained using the softmax activation function:

$$P(s|\mathbf{o}_{u,t}) = \frac{\exp(\mathbf{N}_s(\mathbf{o}_{u,t}))}{\sum_{s'} \exp(\mathbf{N}_{s'}(\mathbf{o}_{u,t}))}.$$

From the Bayes' theorem we obtain:

$$P(\mathbf{o}_{u,t}|s) = \frac{P(s|\mathbf{o}_{u,t})P(\mathbf{o}_{u,t})}{P(s)} \propto \frac{P(s|\mathbf{o}_{u,t})}{P(s)}.$$

The networks are trained to optimize a given training objective function using the standard error back-propagation procedure. Typically, cross-entropy is used as the objective and the optimization is done through stochastic gradient descent (SGD). In our case the cross entropy is given by the equation

$$\mathcal{F}_{CE} = -\sum_u \sum_t \log P(s_{u,t}|\mathbf{o}_{u,t}),$$

where $s_{u,t}$ is the reference phoneme state label at time t for the utterance u. More details for the use of deep neural networks for ASR can be found in [6, 1].

4. Building the language model for ASR. The word level language model defines a probability distribution over all sequences of words in the target language. A typical approach for building a language model is by assuming that the probability of observing the i^{th} word w_i in the context history of the preceding $i-1$ words can be approximated by the probability of observing it in the shortened context history of the preceding $n-1$ words (n^{th}order Markov property). In that case

$$P(w_1 \dots w_m) = \prod_{i=1}^{m} P(w_i|w_1 \dots w_{i-1}) \approx \prod_{i=1}^{m} P(w_i|w_{i-(n-1)} \dots w_{i-1}).$$

The empirical estimations of the conditional probabilities are given by the equation:

$$\hat{P}(w_i|w_{i-(n-1)} \dots w_{i-1}) = \frac{count(w_{i-(n-1)} \dots w_{i-1}w_i)}{\sum_{w'} count(w_{i-(n-1)} \dots w_{i-1}w')},$$

where $count(w_{i-(n-1)} \dots w_{i-1})$ is the number of occurrences of the given sequence of words in a representative corpus of texts in the target language. The concept of *weighted finite-state transducer* provides an efficient structure for representing a language model. The top diagram in Fig. 4 presents a weighted finite state transducer for a very simple language model.

The model estimated with empirical probabilities returns zero probability for every sequence, which contains a subsequence of n words, which does not occur in the representative corpus. For instance, $\hat{P}(\alpha\alpha\gamma) = 0$ for the simple model shown in Fig. 4. To avoid this deficiency and to improve the performance of the language model a smoothing of the empirical distribution is applied. A common approach for smoothing is the back-off smoothing model. The estimation of the conditional probabilities of unseen sequences is done by backing off through progressively shorter history. Formally

$$\bar{P}(w_i|w_{i-(n-1)} \dots w_{i-1}) =$$

$$\begin{cases} d.\hat{P}(w_i|w_{i-(n-1)} \dots w_{i-1}) & \text{if } \hat{P}(w_i|w_{i-(n-1)} \dots w_{i-1}) > 0 \\ \alpha.\bar{P}(w_i|w_{i-(n-2)} \dots w_{i-1}) & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Essentially, this means that if the n-gram has been seen in the corpus, the conditional probability of a word is proportional to the empirical estimate of that n-gram. Otherwise, the conditional probability is equal to the back-off conditional probability of the $(n-1)$-gram. To efficiently represent a smoothed back-off language model a finite-state transducer with failure transitions (f-transducer) is used. The failure transitions, which correspond to the back-off case, are followed only in case there is no regular transition with the current label. The middle diagram in Fig. 4 shows a finite-state f-transducer representing the back-off smoothed language model.

The next step is building the phoneme level language model. This is done by substituting the words in the word level language model with its corresponding sequences of phonemes. In this way we construct the phoneme level language model which defines a probability distribution over all sequences of phonemes in the target language. Given a sequence of phonemes $p_1p_2 \dots p_n$ the phoneme level language model returns the probability $\bar{P}(p_1p_2 \dots p_n)$ for observing the given sequence in the target language. This model represented with a corresponding f-transducer is shown at the bottom of Fig. 4.

The last step is building a Hidden Markov Model (HMM) for representing the conditional probability $P(\mathbf{O}|\mathbf{s})$ for emitting (producing) a given sequence of characteristic

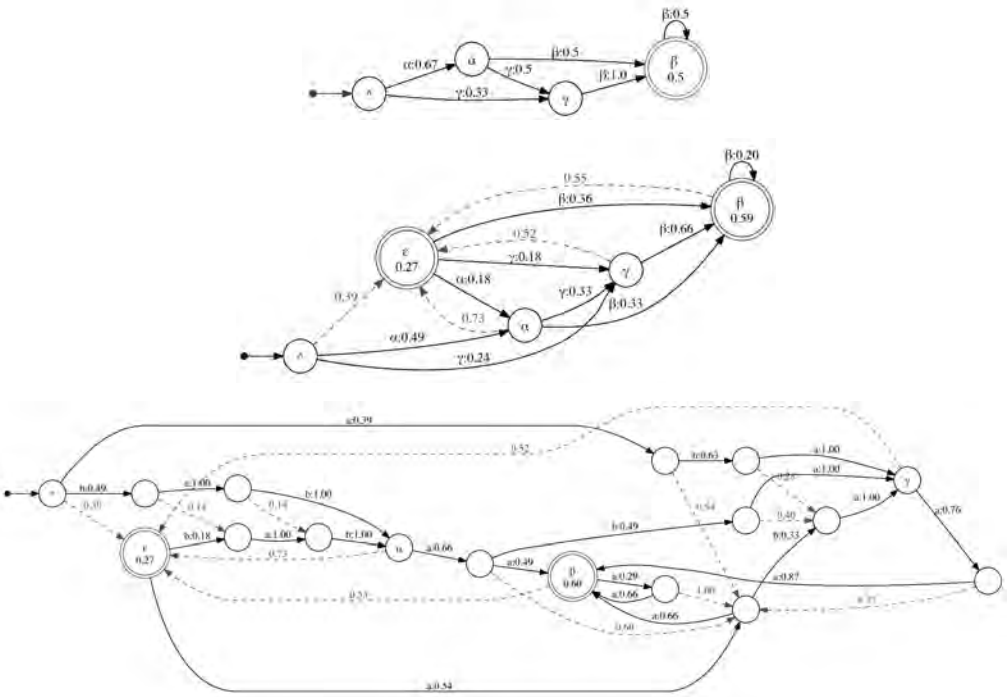


Fig. 4. *Top*: A weighted finite state transducer for representing the following second order language model. Let $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ be the set of words in the language and the corpus for the empirical estimation of the conditional probabilities consist of the three sequences of words $\alpha\beta\beta, \alpha\gamma\beta$ and $\gamma\beta$. Then the conditional probabilities are $\hat{P}(\alpha|\wedge) = 2/3, \hat{P}(\gamma|\wedge) = 1/3, \hat{P}(\beta|\alpha) = \hat{P}(\gamma|\alpha) = 1/2, \hat{P}(\beta|\gamma) = 1, \hat{P}(\beta|\beta) = 1/2, P(\$|\beta) = 1/2$. The sign $\wedge$ marks the beginning and \$ marks the end of the sequence. *Middle*: The corresponding weighted finite state f-transducer for representing the back-off smoothed language model. *Bottom*: The corresponding f-transducer representing the phoneme level language model for the following phonetisation of the words: $\alpha = bab, \beta = aa, \gamma = aba$

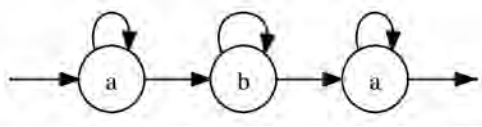


Fig. 5. A HMM model for the sequence of phonemes *aba*

vectors $\mathbf{O}$ from a given sequence of phoneme states $\boldsymbol{s}$. For that purpose each phoneme p in the phoneme level is substituted with a one-state HMM s_p. Fig. 5 shows the sub model for a subsequence of phonemes. The resulting model returns for a given sequence of phoneme states $s_1 s_2 \ldots s_n$ the probability $\bar{P}(s_1 s_2 \ldots s_n)$ for observing the given sequence

in the target language. We obtain:

$$P(\mathbf{O}|\mathbf{s}) = P(\mathbf{o}_1 \dots \mathbf{o}_n | s_1 \dots s_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\mathbf{o}_i|s_i) P(s_i|s_1 \dots s_{i-1}).$$

5. Speech decoding. The speech decoding task is reduced to finding the most likely sequence of phoneme states which emits the observed input.

$$\hat{\mathbf{s}} = \underset{\mathbf{s}}{\operatorname{argmax}} P(\mathbf{O}|\mathbf{s}).$$

After finding the most likely phoneme state sequence, the corresponding word sequence is derived from the correspondding path in the f-transducer.

This optimization task is solved using the so-called *Viterby algorithm*. The essence of the Viterby algorithm is to calculate inductively at each time step t the probability of observing the sequence $\mathbf{o}_1 \dots \mathbf{o}_t$ and finishing in HMM state i. In other words,

$$\delta_t(i) = \max_{s_1 \dots s_{t-1}} P(\mathbf{o}_1 \dots \mathbf{o}_t | s_1 \dots s_{t-1} s_t = i).$$

Using this dynamic programming scheme the path in the HMM which maximizes the target probability is found in time quadratic to the number of states in the HMM. For providing a practical solution we apply a reduction of the full Viterby search where at each step we consider only a fixed number of states, which produce the highest probabilities. This heuristic algorithm is called *Beam search*. The theory of HMMs is presented in many textbooks (see e.g [3]).

6. ASR experiments and results. We present the ASR results using the TD-DNN based acoustic model trained on the BG-PARLAMA datasets [2]. We tested the ASR accuracy on the BG-PARLAMA development and the BG-PARLAMA test sets. Table 2 summarizes the recognition results. The best ASR result on the test data is achieved by the TD-DNN model trained on the BG-PARLAMA dataset – 6.80% word error rate (WER).

Table 2. ASR word error rate on different datasets

Acoustic model	BG-PARLAMA dev	BG-PARLAMA test
TD-DNN	7.45%	6.80%

REFERENCES

[1] L. Deng, Y. Liu. Deep Learning in Natural Language Processing, Springer, 2018.

[2] D. Geneva, G. Shopov, S. Mihov. Building an ASR Corpus Based on Bulgarian Parliament Speeches. In: Statistical Language and Speech Processing (Eds C. Martín-Vide, M. Purver, S. Pollak). Springer International Publishing, 2019, 188–197.

[3] X. Huang, A. Acero, H.-W. Hon. Spoken Language Processing: A Guide to Theory, Algorithm, and System Development. Prentice hall PTR, 2001.

[4] F. Jelinek. Statistical Methods for Speech Recognition. MIT press, 1997.

[5] V. Peddinti, D. Povey, S. Khudanpur. A time delay neural network architecture for efficient modeling of long temporal contexts. In: INTERSPEECH, 2015.

[6] D. Yu, L. Deng., Automatic Speech Recognition. Springer, 2016.

Stoyan Mihov
IICT – BAS
Acad. G. Bonchev Str., Bl. 2
1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: stoyan@lml.bas.bg

Математически методи в автоматичното разпознаване на реч

Стоян Михов

Представяме математическите методи, които се използват в процеса на автоматично разпознаване на речта. Презентацията е разделена на три части. Започваме с кратък преглед на вокалния тракт и съответните уравнения на акустиката, които описват процеса. След това представяме цифровата обработка на сигнала, която се осъществява над речевия сигнал, за да се извлекат коефициентите на Мел-честотния кепструм, съответстващи на конфигурацията на артикулацията. Във втората част представяме подход за акустично моделиране, базиран на забавени във времето дълбоки невронни мрежи. Разглеждаме и методологията за машинно обучение на акустичния модел. В третата част описваме използването на монотонни стохастични f-преобразуватели за представяне на езиковия модел. За декодиране на сигнала представяме накратко алгоритъма на Витерби и алгоритъма за търсене по лъча върху стохастичния f-преобразувател. Накрая показваме експериментални резултати за автоматично разпознаване на реч на български език.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

БЪЛГАРСКА ПЛАТФОРМА ЗА СЪСТЕЗАТЕЛНА ИНФОРМАТИКА*

Емил Келеведжиев, Тодор Брънзов,
Петър Петров, Марин Шаламанов

Представена е разработваната от авторите платформа за състезателна информатика, включваща две основни компоненти: система за оценяване на решенията на състезателите и система за архивиране на състезателни задачи с възможност за онлайн изпращане на решения. Описано е състоянието на подобни системи по света и са дадени изисквания за тях.

Увод. Българската състезателна информатика е известна със своите успехи. Заслужава да отбележим второто място в света при индивидуалното класиране за всичките проведени международни олимпиади по информатика и петото място в света при подредбата на държавите в сумарното класиране по медали за всичките олимпиади [2]. България е основател и първи домакин на Международната олимпиада по информатика и на Европейската младежка олимпиада.

В продължение на дълъг (над 30-годишен) период от време, всяка година непрекъснато в нашата страна се провеждат национални състезания и се осъществява добре организирана подготовка на национално и на местно ниво, ръководена от университетски преподаватели, учени от Българската академия на науките, изявени учители и ентусиасти от софтуерни фирми. Активно се подържа сайт Инфос [12] от Националната комисия, в който е събран пълен архив на задачите от всички национални състезания от последните години.

Световна тенденция в състезателната информатика е да се разработват и прилагат софтуерни състезателни системи. Те могат да бъдат изградени от различни по предназначение модули: за провеждане и оценяване при присъствено състезание; за провеждане на онлайн състезание; за поддържане на жив архив от задачи, където трениращият състезател може да решава задачите и да вижда в реално време как автоматично се оценена работата му и пр. За някои от тези софтуерни системи е необходимо целево хардуерно осигуряване и ползване на хостинг услуги.

Състезания по информатика. Състезанията по информатика възникват върху опита, натрупан при провеждащите се преди тях по-дългогодишни състезания

*Ключови думи: състезания по информатика, системи за оценяване, архиви със състезателни задачи по информатика.

Статията е написана в рамките на проекта „Национална система за състезателна информатика в България“ от програмата „Образование с наука“ между МОН и БАН за 2019-2020 г.

по математика. Новото при състезанията по информатика, е че те се състоят в написване на програма на език за програмиране. Затова са известни и с названието „състезания по програмиране“. Задачите, които се решават са подобни на математическите, имат алгоритмичен характер, като в повечето случаи са от комбинаторен (или целочислен) вид.

Една основна разлика между състезанията по информатика и тези по математика е начинът на проверката на работата на състезателите. Докато при математическите състезания проверката се извършва от добре квалифицирани членове на жури, то при състезанията по информатика днес това се извършва автоматично, чрез съответна софтуерна система. Съществуват няколко разновидности на задачи по информатика, но най-често задачите са такива, които се проверяват чрез набор от тестови примери с предварително приготвен от автора на задачата вход и изход, и тези тестови примери са неизвестни за състезателя.

Така на програмата на състезателя се гледа като на „черна кутия“, т. е. оценителите не се интересуват от начина на написването на програмата от състезателя или какъв алгоритъм е използван. Това увеличава изискванията към автора на задачата да приготви много добре съставени тестови примери, обхващащи разнообразието на възможните входни данни в рамките на ограниченията от условието на задачата. За изпълнението на всеки тест в проверяващата система е зададено ограничение по време за продължителността на работата на програмата на състезателя, което много сполучливо може да оцени, дали състезателят е използвал ефективен (бързоработещ) алгоритъм.

Историческо развитие. По данни от литературата [11] първото състезание по програмиране се е провело през 1970 г. в Университета на Тексас (Texas A&M University). Счита се, че от 1977 г. то прераства в известното сега международно студентско състезание ICPC (ACM International Collegiate Programming Contest). Оттогава това най-голямо международно състезание се провежда ежегодно и през 2019 г. обхваща в първата си регионална фаза над 50 000 студенти, учещи в около 3000 университета от повече от 100 държави.

В България първото състезания по информатика за ученици е осъществено през 1981 г. Националната олимпиада по информатика започва да се провежда ежегодно от 1985 г. Нашата страна е организатор на международно състезание за ученици през 1987 г., а през 1989 г. е основател на Международната олимпиада по информатика, проведена в Правец от 16 до 19 май 1989 г. Международната олимпиада по информатика за ученици продължава да се провежда ежегодно и през 2019 г. вече обхваща участници от над 80 държави.

Общото както за студентските, така и за ученическите състезания е, че на участниците се предлагат няколко задачи, за които състезателят трябва да напише решение. Решението е програма. За да бъде проверена написаната програма, най-често се използват тестови примери. Журито подготвя тестове, всеки от които се състои от двойка файлове – входен и изходен. В типичния случай програмата на състезателя трябва да прочете входния файл и да изведе резултат. Журито трябва да сравни резултата на състезателя с предварително приготвения изход. По-надолу ще опишем различни модификации на така представения класически начин на тестване.

При първите състезания процесът за проверка на програмата на състезателя, включващ нейното компилиране, подаването на входни данни и сравняване на по-

лучения резултат, се е извършвал ръчно. Това очевидно води до голяма продължителност на процеса особено когато е голям броят на задачите, броят на тестовете, както и при голям брой участници. Затова организаторите на състезанията са се обърнали към възможността този процес да бъде автоматизиран чрез създаване на подходяща софтуерна система.

Софтуерните системи, които се използват за целта, сега се наричат *системи за оценяване* или *съдийски системи* (*grading systems, judge systems*). Една от първите подобни, но не напълно автоматични системи, е системата за проверка, наречена PC^2, чието използване е започнало през 1989 г. при Международното студентско състезание ICPC. Системата е била написана на Турбо Паскал за MS-DOS и комуникацията между състезателите и журито се е извършвала с дискети.

При първите няколко издания на Международната олимпиадата по информатика не са използвани софтуерни системи за оценяване. Състезателите са предоставяли записани на дискети своите работи. Тези работи са били ръчно оценявани от журито и от ръководителите на отборите чрез извършване на компилиране, изпълнение и определяне на точки, съгласно подробни инструкции, дадени от Научния комитет. За първи път полуавтоматична система, макар и с пренос чрез дискети е приложена на Олимпиадата през 1994 г. в Швеция.

Система, при която преносът и оценяването са автоматични (макар и в несъвършен вид) за първи път е използвана на Международната олимпиада по информатика в 1999 г. в Анталия, Турция [5]. Като резултат времето за проверка е намалено на 2 часа в сравнение с около 14 часа при ръчна проверка на предишната Олимпиада в Сетубал, Португалия. Организаторите на следващите олимпиади – 2000 г. (Китай), 2002 г. (Република Корея), 2003 г. (САЩ), 2005 г. (Полша), 2007 г. (Хърватия) – използват свои специално разработени системи, а олимпиадите през 2001 г. (Финландия), 2004 г. (Гърция) и 2006 г. (Мексико) прилагат системата, разработена от САЩ.

От 2012 г., когато Олимпиадата е проведена в Италия и домакините имат собствена система CMS-IOI, тази система се утвърждава като предпочитана за почти всички следващи олимпиади [4]. Тя е с отворен код и се поддържа с разработване на нови версии [1].

Компонент на платформата за оценяване на решенията. Системата за оценяване трябва да осигурява:

– автоматично определяне без човешка намеса на точки за всяко решение на състезател;

– автоматично изпращане на решенията на състезателите по мрежова връзка;

– извършване на оценяването в реално време без видимо забавяне след изпращането на решение от състезателя с цел да се постигне публикуване на класиране в реално време „на живо“.

Системата за оценяване е подчинена на следните изисквания:

– Сигурност. Изолиране на състезателите помежду им и от външния свят, като все пак трябва да има точка на контакт между състезателя и системата за оценяване.

– Устойчивост. Грешки и критични състояния в част от системата не трябва да водят до срив в цялата система. Трябва да е осигурено безпроблемно заменяне на хардуерни и софтуерни компоненти по време на протичане на състезанието и да има

сигурно запазване на изпратената информация от състезателите във всеки момент на състезанието.

– Достъпност за използване. Системата трябва да бъде лесна за инсталиране или за онлайн използване от всички участници в състезанията – състезатели, треньори и ръководители: да е добре документирана и да има възможност за връзка с разработчиците при намиране на грешки във функционирането ѝ.

– Разширяемост. При появата на нови разновидности на задачи да има възможност за добавяне на съответни средства за тях в системата. Да не се ограничава само с един определен начин за подготовка на състезание и въвеждане на задачи.

– Гъвкавост. Лесно въвеждане на данни за състезания, състезатели и получаване на таблици с класиране: възможност за работа с голям брой състезатели чрез използване на няколко машини.

Основните сервизи в една система за оценяване на примера на системата CMS-IOI [4] са (фиг. 1):

– LogService – Получава, агрегира и показва всички лог-файлове в системата.

– Worker – Извършва компилация и изпълнение на програмите на състезателите в защитена среда.

– EvaluationService – Поддържа опашката от заданията за назначаване към Worker.

– ScoringService – Пресмята в точки за класирането получените резултати от оценяването и комуникира в реално време с програмата за създаване на ранкинг.

– Checker – Осъществява синхронизираща функция за всички сервизи.

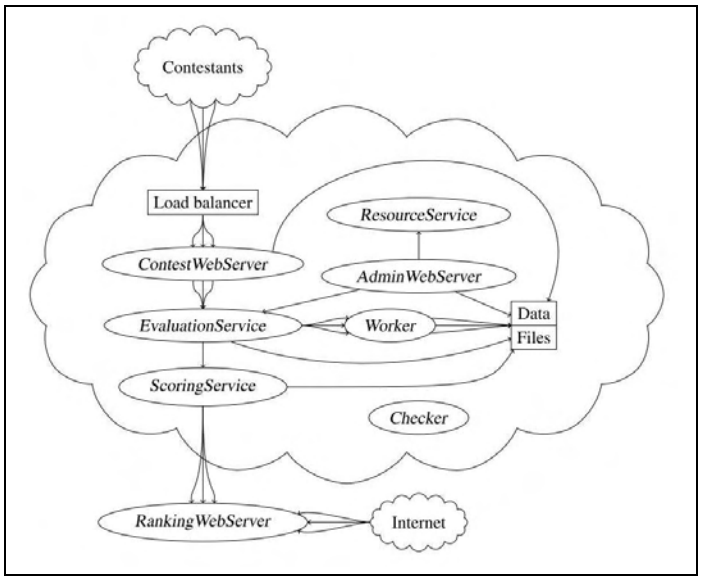
– ResourceService – Стартира сервизите в машината, в която работи, и събира информация за използване на ресурсите.

– ContestWebServer – Обслужва уеб-страницата, с която се прави връзка със състезателя, за да може той да изпраща решения и да получава обратна информация.

– AdminWebServer – Обслужва уеб-страницата, с която се прави връзка с администратора, за да може той да конфигурира и управлява състезанието.

Естеството на всяка система за оценяване включва изпълняване на *несигурна* програма, изпратена от състезателя, и ако не се вземат специални мерки за защита, възможно е понякога такава програма да доведе до частично или пълно компрометиране на цялата софтуерна оценяваща система. Затова цялостната работа с програмата на състезателя (извикване на изпълнимия код и даже компилирането) се извършва в защитена среда, наречена *sandbox*. За целите на състезателното програмиране една такава разработка за защитена среда е направена от Мартин Мареш [6].

Видове задачи. Най-разпространеният тип задачи са такива, при които програмата на състезателя трябва да прочете последователност от данни, записани в текстов файл чрез числа и знаци, следвайки точно определен формат, и да изведе друга последователност в текстов файл. Това са т. нар. задачи от тип *input/output*. Вместо записани във файловата система файлове, често се използва стандартен вход и стандартен изход. Входните и изходните файлове не са известни на състезателя, а е дадено само описание за техния формат. При задачи с еднозначен отговор проверяващата система трябва буквално да сравни изхода, получен от програмата на състезателя, със съответния изходен файл, подготвен от автора на задачата. При неединствен отговор, авторът на задачата трябва да приготви програма за проверка с по-сложен алгоритъм (т. нар. програма checker). При някои случаи е необходимо



Фиг. 1. Сервизи и тяхното взаимодействие в CMS-IOI. Всяка стрелка показва възможна заявка. Множествена стрелка означава, че съответният сервиз може да бъде извикан, така че да работи в повече от едно свое копие. Сервизите Checker и ResourceService взаимодействат с всички други сервизи и затова съответните стрелки не са показани

да се извърши групиране на тестове и вместо поотделно поставяне на точки за всеки успешно преминат тест, да се дават точки за цялата група само когато всичките тестове в групата са преминали успешно.

По-сложен вид задачи са *интерактивните задачи*. При тях програмата, написана от състезателя, взаимодейства многократно с програма, написана от автора на задачата. Типичен пример са игровите задачи, за които това взаимодействие съответства на последователност от редуващи се ходове на двама играчи – програмата на състезателя и програмата на журито.

Интересен пример за друг вид задачи са такива, при които състезателят трябва да изпрати само файл с решението, без да изпраща програма (т. нар. *output only* задачи.) При тези задачи за състезателя са известни входните данни и трудността при решаването е да бъде намерен начин за създаване на изходния файл чрез всички позволени средства при използване на осигурената за състезателя работна станция, или даже задачата да бъде решена по мисловен път.

Измерване на времето за работа на програмата. В състезателното програмиране много важен елемент от оценяването е точното измерване на времето, необходимо на програмата, за да произведе изходни данни. Задава се ограничение за това време и не са поставят точки за съответния тест, даже и когато произведените изходни данни са правилни, но програмата ги е изработила по-бавно. Причината това да бъде общоприето при състезателната информатика е, че чрез времето се оценява качеството на реализирания алгоритъм от състезателя. Финото време-измерване все още остава незадоволително решен проблем [6]. Друг проблем,

свързан с времето за работа, е, че при въвеждането или при извеждането на много големи по обем данни, част от времето за работа се изразходва за входно-изходни операции, което опорочава идеята да се гледа на времето за работа като на мярка за качеството на алгоритъма, с който по същество се решава задачата. Този проблем намира сполучливо решение, когато състезателят е инструктиран от условието на задачата да използва специално приготвени от журито функции за вход и изход, вместо стандартните средства от езика за програмиране за работа с файлове.

Компонент на платформата за жив архив със задачи. Първата онлайн система от този вид, която сега има голяма популярност, е основана през 1995 г. от Мигел Ревиля в Университета на Валядолид, Испания [6]. Тя е насочена за подготовка за Международното студентско състезание ICPC, защото за всяка задача системата дава обобщена информация дали всички тестове в съвкупност към задачата са успешно преминати от програмата на състезателя – една задача може да бъде или изцяло решена, или въобще нерешена. Различно е при задачите в стила на Международната олимпиада по информатика, където състезателят получава обичайно оценяване на своето решение в точки от диапазона 0 – 100, като точките основно зависят от броя успешно преминати тестове. Системата на Университета на Валядолид [10] е автоматична съдийска система, в която всеки желаещ от целия свят може да изпраща свое решение към избрана от него задача. Понастоящем задачите в системата са повече от 5 000, а регистрираните участници са над 250 000. Системата първоначално е била замислена за тренировка на потенциални състезатели за състезанието ICPC, но скоро се е превърнала в много добро средство за самообразование.

Таблица 1. Сайтове (активни към януари 2020 г.) с архиви от поне 2000 задачи за онлайн оценяване на изпратени решения и организиращи онлайн състезания (на англ. език) [11]

основан година	адрес	брой задачи	брой участници
1995	Uva Online Judge, `https://uva.onlinejudge.org/`	5 000	250 000
2001	TopCoder, `https://www.topcoder.com/`	5 200	4 000
2003	Peking University Judge Online, `http://poj.org/`	3 000	250 000
2004	SPOJ, `https://www.spoj.com/`	6 000	60 000
2006	e-olymp, `https://www.e-olymp.com/en/`	7 500	47 000
2010	Carribean Online Judge, `http://coj.uci.cu/`	2 700	28 000
2010	Codeforces, `http://codeforces.com/`	3 000	32 500

Системата MENDO [7], разработена в Северна Македония, има 13 000 регистрирани потребители, съдържа около 440 задачи в жив архив от национални и международни състезания и се използва за тренировка на състезателите. Към системата има разработени някои специфични допълнения [3]:

– Анализ на изпратения код, състоящ се в автоматично подсказване при допускане на някои синтактични, входно-изходни и други грешки.

– Възможност за поискване на достъп за някои тестове в тренировъчен режим. Това улеснява обучаването в редица случаи, когато състезателят не може да се

ориентира за грешката си. Даване на подсказки за особености при някои тестове.

– Автоматично създаване на виртуално състезание според персоналните особености на състезателя, изхождайки от неговите възможности за решаване на задачи.

От действащите у нас системи с характеристика на „жив архив" отбелязваме следните две:

– informatika.bg, поддържана от Александър Георгиев [13]. Там може да бъде намерена и много допълнителна и актуална информация за състезанията по информатика. Съдържа и много лекции, предназначени за състезатели.

– Maycamp arena [8]. В сайта редовно се въвеждат всички задачи от проведените национални състезания и се организират собствени състезания. Броят на задачите, достъпни за изпращане на решения към тях, е над 1200.

В съществуващия сега в България архив на сайта Инфос [12] се съхранява голям брой задачи от националните състезания в България. За всяка задача има текст на условието, авторско решение, пояснение към решението с описание на използвания алгоритъм, тестови примери, с които работите на състезателите са били проверявани в реалното състезание, всички решения, изпратени от състезателите по време на състезанието, и получените точки от състезателите.

Основната цел при разработването на жив архив е той да бъде използван от състезателите при подготовката им, като всеки желаещ да може, след като прочете условието на задача, да напише решение и да го изпрати към системата. След това автоматично да получи отговор – с колко точки е оценено решението му. Главните функционалности на такава система са:

– Възможност за въвеждане на нови задачи от администратор. Задачите трябва да бъдат от всички видове, които се срещат в реалните състезания.

– Автоматично определяне на ограниченията по време.

– Йерархична структура на задачите.

– Потребителски профили за учениците.

– Тагове за задачите и опит за автоматичното им определяне.

– Поддръжка на новите версии на езика за програмиране C++.

– Споделяне на линкове към изпратени решения.

– Дискусия към всяка задача и докладване на грешки в задачите.

– Възможност за организиране от учител на тренировъчно състезание, чрез съставяне на тема.

– Създаване на потребителски групи и школи.

Заключение. В България се извършва развитие на дейностите, описани в настоящето изложение. Добър прогрес е дадената поддръжка от страна на Министерството на образованието и науката към Българската академия на науките в рамките на програмата „Образование с наука" за 2019–2020 г. за проекта „Национална система за състезателна информатика в България".

ЛИТЕРАТУРА

[1] CMS, a Contest Management System. https://cms-dev.github.io/ (посетен на 20 януари 2020).

[2] International Olympiad in Informatics – Statistics. http://stats.ioinformatics.org/ (посетен на 20 януари 2020 г.)

[3] M. Jovanov, B. Kostadinov, E. Stankov, M. Mihova, M. Gusev. State Competitions in Informatics and the Supporting Online Learning and Contest Management System with Collaboration and Personalization Features MENDO. *Olympiads in Informatics*, **7** (2013), 42–54.

[4] S. Maggiolo, G. Mascellani. Introducing CMS: A Contest Management System. *Olympiads in Informatics*, **6** (2012), 86–99.

[5] K. Manev, M. Sredkov, T. Bogdanov. Grading Systems for Competitions in Programming. *Математика и математическо образование*. **38** (2009), 103–116.

[6] M. Mares. Perspective on Grading Systems. *Olympiads in Informatics*, **1** (2007), 124–130.

[7] MENDO System for Competitions in Informatics https://mendo.mk/ (посетен на 20 януари 2020 г.)

[8] Mycamp Arena. Състезания по алгоритми. https://arena.maycamp.com/ (посетен на 20 януари 2020 г.)

[9] M. A. Revilla, S. Manzoor, R. Liu. Competitive Learning in Informatics. The UVa Online Judge Experience. *Olympiads in Informatics*, **2** (2008), 131–148.

[10] UVa Online Judge https://onlinejudge.org/ (посетен на 20 януари 2020 г.)

[11] S. Wasik, M. Antczak, J. Badura, A. Laskowski, T. Sternal. A Survey on Online Judge Systems and Their Applications. ACM Computing Surveys (CSUR) January 2018 Article No. 3. https://doi.org/10.1145/3143560

[12] Инфос – сайт на Комисията за извънкласна работа по информатика при СМБ. http://www.math.bas.bg/infos/ (посетен на 20 януари 2020 г.)

[13] Сайт за алгоритми, състезателна информатика и програмиране. http://www.informatika.bg/ (посетен на 20 януари 2020 г.)

Емил Келеведжиев
e-mail: keleved@math.bas.bg
Тодор Брънзов
e-mail: tbranzov@math.bas.bg
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България

Петър Петров
e-mail: pppepito86@gmail.com
Марин Шаламанов
e-mail: shalamanov.marin@gmail.com
Олимпийци ООД
1000 София, България

BULGARIAN PLATFORM FOR COMPETITIONS IN INFORMATICS

Emil Kelevedjiev, Todor Branzov, Petar Petrov, Marin Shalamanov

A software platform for supporting competitions in informatics is presented. The platform is currently under development by the authors. Two main components are highlighted: a grading system for evaluating competitors' submissions and a system for archiving competition tasks with the grading ability for checking the received solutions for training purposes online. The status of similar systems worldwide is described and requirements they are expected to meet are specified.

СЕКЦИЯ А: МАТЕМАТИЧЕСКИ СТРУКТУРИ
СЕКЦИЯ Б: МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ И ИНФОРМАТИКА

SECTION A: MATHEMATICAL STRUCTURES
SECTION B: MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

USING ENTROPY OF CATEGORICAL DATA FOR CLUSTERING*

Chavdar Dangalchev

One of the most important tasks of cluster analysis is determining the number of clusters. In this article we suggest a method for it, using entropy of categorical data. Examples, illustrating the method, are given.

1. Introduction. Algorithms for clustering have been studied for a long time and there are many different algorithms [3]. Most of them are using only numerical data. If there is a categorical data, the well-known approach is to transfer it to numerical: if the values are in the same category then the distance is 0, otherwise it is 1. After that, the distance is multiplied by a weight, corresponding to the importance of the categorical data. There are several ways to do clustering only on categorical data. Some of them use entropy (e.g. [1]). Here we suggest another way to use categorical data – calculating the entropy of a category (or categories) in cluster sets with different number of clusters and selecting the set with minimal entropy. There are other algorithms for clustering of numerical data using entropy (e.g. [2]), but not for determining the number of clusters.

2. Algorithm. By using hierarchical clustering algorithm, we can change the threshold of the distance, in order to receive different sets of clusters. Another way is to have limit on the number of clusters or use elbow method [4] to determine the number of clusters. Similar considerations can be done if we use other algorithms, which produce different sets of clusters (e.g. DBSCAN) in which the number of clusters to be picked can be determined. Here we use the entropy of one or more categorical features:

– For every cluster we calculate the entropy as:

$$E = \sum_i \frac{N_i}{N} \log\left(\frac{N}{N_i}\right),$$

where N is the total number of points in the cluster and N_1, N_2, ... are numbers in each category.

– We take the sum of the entropy of the clusters, after weighting it by the number of points.

The problem of this simple approach is that when the threshold is 0 (every point is a separate cluster) then the entropy is also 0. We would like to select a set of minimal number of clusters while also keeping the entropy low. The number of clusters as a function of the threshold decreases; the entropy as a function of threshold increases.

*2020 **Mathematics Subject Classification:** Primary: 62H30, Secondary: 68T10.
Key words: clustering, entropy, number of clusters.

Both functions have different unit measures. To combine them we need to normalize them. We put a weight (W) for the number of clusters and calculate the score by adding the entropy. Here we suggest one possible way to select the weight of the number of clusters: the weight is calculated by assuming equal scores when clusters are N and 1:

– N clusters (when the threshold is equal to 0) the entropy is 0 and the score is $N * W$.

– One cluster with entropy E (when the threshold is the maximal one): the score is $W + E$.

– From $NW = W + E$ we receive:

$$W = \frac{E}{N-1}$$

and therefore when the clusters are N and 1 the scores S are equal:

$$S = \frac{NE}{N-1} = NW = W + E.$$

– We calculate the score $S(n)$ for every cluster set S_n with n clusters:

$$S(n) = nW + E(S_n)$$

and select the number of clusters n with the minimal score.

3. Examples. Let us have 12 points with coordinates on two numerical features (see Fig. 1):

$P_1 : (0, 2)$, $P_2 : (0, 3)$, $P_3 : (1, 2)$, $P_4 : (1, 3)$, $P_5 : (1, 0)$, $P_6 : (2, 0)$,
$P_7 : (3, 0)$, $P_8 : (4, 1)$, $P_9 : (4, 2)$, $P_{10} : (5, 2)$, $P_{11} : (5, 3)$, $P_{12} : (6, 3)$.

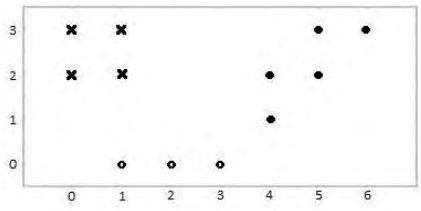


Fig. 1. Clusters count is 3

There are 4 different possible thresholds with Euclidean distance, respectively: 0, 1, 1.5 ($> \sqrt{2}$) and 2.

There are 12 clusters – every point is a cluster with threshold 0.

There are 3 clusters with threshold 1 (shown on Fig. 1):

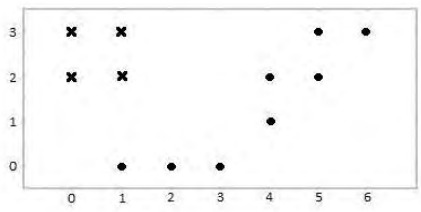


Fig. 2. Clusters count is 2

$C_1 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$; $C_2 = \{P_5, P_6, P_7\}$; $C_3 = \{P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}\}$.

There are two clusters: cluster 2 and cluster 3 from Fig. 1 merge into one cluster with threshold 1.5.

There is only one cluster with threshold 2. These are all possible cluster sets.

Now let us use the entropy. Let there be a category "Size": Cluster 1 (from Fig. 1) has Size = "Small", Cluster 2 has Size = "Medium", Cluster 3 has Size = "Big".

Using logarithms with base 2, the entropy with threshold 2 (only 1 cluster) is:

$$E = \frac{4}{12}\log\left(\frac{12}{4}\right) + \frac{3}{12}\log\left(\frac{12}{3}\right) + \frac{5}{12}\log\left(\frac{12}{5}\right) = 1.554585.$$

The weight for the number of clusters is:

$$W = \frac{E}{12-1} = 0.141326$$

The scores with thresholds 0 and 2 are:

$$S(12) = 12 * 0.141326 = 1.696; \quad S(1) = E + 0.141326 = 1.696.$$

Calculating the other two scores (thresholds 1 and 1.5), we receive:

$$S(3) = 3 * 0.141326 = 0.424 \text{ (the entropy in every cluster is 0).}$$

$$S(2) = 2 * 0.141326 + \frac{3}{8}\log\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{5}{8}\log\left(\frac{8}{5}\right) = 1.237.$$

By selecting the minimal score, we select the threshold 1 with 3 clusters.

We will receive the same result (3 clusters) even when the category "Size" does not strictly follow the 3 clusters distribution: e.g. P_3 is of size "Medium" and P_7 is of size "Big".

Let us create a new category "Age" from the old category "Size". Category "Age" has two values: "Kids" and "Adults". The "Kids" corresponds to size "Small". The value "Adults" combines sizes "Medium" and "Big". The calculations for clusters' scores are changing:

$$E = \frac{4}{12}\log\left(\frac{12}{4}\right) + \frac{8}{12}\log\left(\frac{12}{8}\right) = 0.918.$$

$$W = \frac{E}{12-1} = 0.08348.$$

$$S(12) = 0.08348 * 12 = 1.002; \; S(1) = 0.918 + 0.08348 = 1.002.$$

$$S(3) = 3 * 0.08348 = 0.250; S(2) = 2 * 0.08348 = 0.167.$$

The minimal score is when the threshold is 1.5 and has 2 clusters. Again, the same result is true if there are *small* changes of the categorical values.

4. Conclusion. Entropy of categorical data can be very useful in automation: for every data set we could have output cluster set, which follows the topology of the data and the category distribution. The number of clusters should not be given in advance. Yes, we can use different techniques to determine the cluster set (e.g. the elbow method), but this one is the method which can ensure synchronization with categorical data.

Acknowledgement. This work was done while the author was contracting for Microsoft (Azure BI) through Pactera Technology International Ltd. The idea and its verification occurred at the beginning of April 2016, patent documents (for Microsoft)

were submitted on 09.01.2017. At the end of March 2017, it was approved by Microsoft for patent application, but after the author's contract with Microsoft was finished the patent process was canceled and the permission for publishing the idea was granted by Microsoft lawyers. The permission to use real data has not been granted, and hence we use examples for demonstration.

The author would like to thank his colleagues from Microsoft Adeel Siddiqui and Preet Rihan and from Pactera Avinash Kamath for their comments and support of this work.

REFERENCES

[1] D. Barbara, J. Couto, Y. Li. COOLCAT: an entropy-based algorithm for categorical clustering. Proceedings of the Eleventh ACM CIKM Conference, 2002, 582–589.
[2] E. Aldana-Bobadilla, A. Kuri-Morales. A clustering method based on the maximum entropy principle. *Entropy*, **17**, (2015), No 1, 151–180.
[3] A. Jain, R. Dubes. Algorithms for Clustering Data. Prentice Hall, 1988.
[4] R. L. Thorndike. Who belongs in the family? *Psychometrika*, **18**, 4 (1953), 267–276.

Chavdar Dangalchev
18, Veliko Tarnovo
4000 Plovdiv, Bulgaria
e-mail: dangalchev@hotmail.com

ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЕНТРОПИЯ НА КАТЕГОРИЙНИ ДАННИ ЗА КЛЪСТЪРИЗАЦИЯ

Чавдар Дангалчев

Една от най-важните задачи при клъстърния анализ е определяне на броя на клъстърите. В тази статия предлагаме метод, който използва ентропия на категорийни данни. Прилагат се примери, илюстриращи този метод.
2020 Mathematics Subject Classification: Основен: 62H30, Вторичен: 68T10.
Ключови думи: клъстърен анализ, ентропия, брой на клъстърите.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

"HOT RELEASES" IN LEARNING MANAGEMENT SYSTEMS AND LEARNING CONTENT MANAGEMENT SYSTEMS *

Oleg Iliev

One of the major problems today's web-based systems are facing is the inability to update them in real time without affecting their performance. In other words, the time when the web-based system administrators could afford the luxury of shutting down the system (making it inaccessible to the users) so that they could release a new version, is gone. An additional challenge for the administrators is the need to provide an opportunity for parallel work on different parts of the system by independent teams. This problem is significant for the modern learning content management systems (LCMS) and the learning management systems (LMS). Given their web-based accessibility by multiple users, it would be impossible to determine an interval at which the system would not be used, so as to upgrade it. Furthermore, these systems are increasingly combining a number of features with completely independent business logic, which predisposes the linking of different teams to work on different parts of the system. At the same time, it is important for these teams to be completely independent and the system to be parallel release capable. This article introduces an original model for building and releasing new system versions that enriches the component-based software architectures.

1. Introduction. Modern LMS and LCMS provide ways to access huge amounts of data for multiple users, often at the same time. Usually they are web based, located somewhere in the "cloud", and are accessed internationally. There are two important issues to be faced by the professionals who develop and maintain them: 1. "How can we ensure the system's reliability, but at the same time, to release new versions as quickly as possible, following the principles of "continuous delivery" (CD) and "continuous integration (CI)?"; 2. "How can we increase the development performance by integrating different teams to deal with different parts of the business logic of systems?". The answers to these questions often involve the use of "load balancers" and some kind of service oriented architecture. However, these approaches require either the simultaneous work of a number of specialists during the release, which dramatically slows down the process, or results in overhead in the maintenance and development. This article presents the

* **ACM Classification:** D.2.11.
Key words: Learning Management System, Learning Content Management Systems, Component-Based Architecture.
This research is supported through the ICT in SES program of the Ministry of Education and Science of the Republic of Bulgaria.

so called *component-oriented architecture* in combination with a caching method that introduces the concept of "hot releases". Apart from reviewing the main advantages and drawbacks of this new approach for releasing a new version, an example of an architecture that can be directly embedded in an existing LMS or LCMS is provided.

2. "Cold" vs. "Hot" release in LMS/LCMS. The release process of a web based software goes through a number of steps. Most often, they involve the following: initially the new feature or defect is developed locally by the developer; then the change is tested in an isolated environment using a test database; lastly, a test on the production environment using the live database is performed. Ignoring the need to disrupt the system in order to release the new version, this process runs the risk of delivering features to the production environment that may have an unexpected effect on the system. For example, in an LMS, due to the use of a live database that contains a different configuration for the system, the result may be different from the one seen on the test environment. For this reason, web administrators have developed a process involving the use of the so-called "canary servers" [1]. These are servers that are actually used in a production environment, but are configured to be inaccessible by the users at the time of the release. Much like the canaries were used to detect the presence of gas from the miners in order to provide timely warning of the problem, these servers are intended to provide the ability to test on a real production environment. However, this environment cannot affect the users experience. The fact is that the modern web-based systems provide simultaneous operation of multiple instances of the same system through the so-called "load balancers". This provides the ability to extract part of the production servers from the "load balancer", making it possible to test a "canary server" [2]. Good practices show that it makes sense to split the servers into two – a group to be tested first, then to return the group to the "load balancer" from which to remove the second group. Only after testing on both groups of servers the release could be considered successful. This process may be called a "cold release".

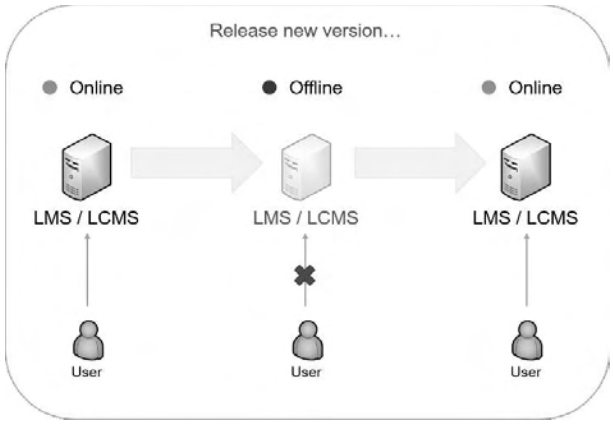


Fig. 1. A release process without a load balancer

The introduction of a "load balancer" in the architecture of LMS and LCMS can eliminate the need to interrupt the operation of the system in order to update its version.

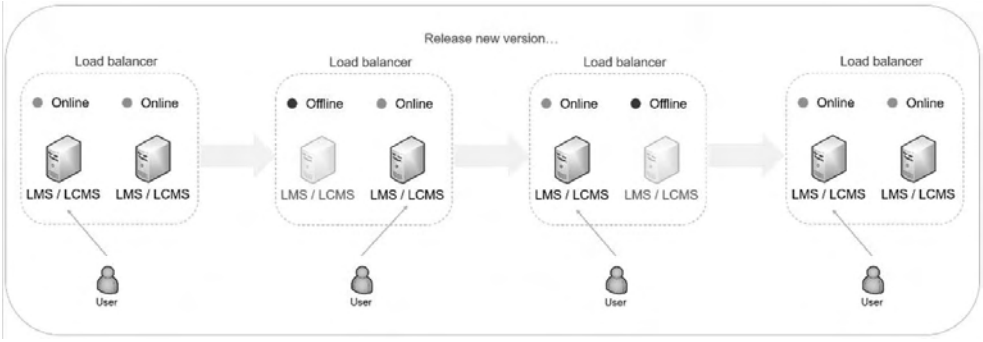


Fig. 2. A release process with a load balancer – "cold release"

The process outlined above, referred to in this article as a "cold release", is well known by the web specialists. It overcomes the system shutdown issues with a view to updating them that have been encountered until recently, but given the frequent availability of monolithic system architecture, releases remain a difficult and painstaking process. Even the slightest change to the system requires a new upgrade of the entire system. For example, changing the header used on each page would require a complete system release. Moreover, if more than one team is working on the system, their work must be well synchronized.

A process that allows the release of LCMS or LMS without necessitating the separation of system instance servers into two parts on "load balancer" level would provide additional flexibility for administrators. System administrators will no longer need to participate in the release process to manage the load balancers, enabling or disabling the public access to servers. This will already be a matter of configurations that can be made by a product manager, not by a person with strong technical background. Moreover, this process can be further developed by introducing "caching" on a HTTP level [3], which will allow the servers to restart in order to refresh their versions, but the content will still remain accessible by the users. This may be called a "hot release" of the system.

"Hot release" provides scalability and reliability of LMS and LCMS while providing the ability to work concurrently on different parts of a system. The backbone of the "hot release" is the so-called "component-based software engineering", as well as the existence of a mechanism for pre-compiling and caching the web pages served to the user. In addition to the highlighted advantages, the architecture proposed in this article can dramatically improve the performance of modern LMS and LCMS, thanks to the pre-compilation and then caching.

3. Component-based software architecture. Component-based software engineering, also called *component-based development*, is a branch of software engineering that defines the separation of problems with respect to the wide-ranging functionality available in a software system. This is based on an approach that allows the use of program logic, part of loosely coupled independent components. This approach is used to build a "component-based software architecture" [4].

Each constituent part of both LMS and LCMS can be considered a separate component. The level of granularity to be used depends on the software architect. For

example, the exam section in LMS can be a separate component, the student grading section is another component, the page header and footer would also be separate components. These components can be developed and maintained absolutely independently by multiple teams – in parallel.

Once the individual components have been developed, they must be "assembled" together. This logic is defined in another component – the main component of the system or, as it is called in this paper, tha "essence" that defines what components we expect to be loaded. Finally, the actual "assembly" process is handled by the so-called "bootstrapper", which processes the "essence" of the system where it may find the definition of the individual components. From there on the "bootstrapper" collects the pre-compiled components of which the system is composed and loads them into the solution without putting any additional logic. All business logic remains within the components themselves. The option of having different versions of the components is added to this architecture. Such an option is needed, for example, when we have a "student assessment" component that can have more than one version, because it was updated multiple times during the development process. Hypothetically, the first version may be different from the next ones by the absence of a timer that measures the time required for the student to complete the assessment.

The bootstrapper must take the appropriate version of each component as defined in the system configuration and only then assemble the components. This configuration that specifies which version of each component will be used to assemble the system is called a "manifest" in this article.

The product manager, but not the systems administrator, will be able to manage the manifests used by the system. By managing the manifests he will determine which version of the components to be used.

"How will we be able to make the release without not restarting the system and thus make it inaccessible for a certain amount of time?" is probably the most natural question here, because in order to reload the versions of the components the boostrapper requires to restart the system. In order to overcome this problem, the implementation of an HTTP level cache mechanism is provided in the architecture of the LMS or LCMS. In other words, every page that is called at least once is cached. Just the components with dynamically generated content are not fully cached. These are the components holding the data of the individual user. An example of components that are appropriate to be cached are: a "lesson" component, a "header" component.

In order to optimize the performance of LMS or LCMS, it is appropriate to automatically cache all reusable components. In other words, we do not need to wait for the user to request a component and then cache it, but we can do it upfront.

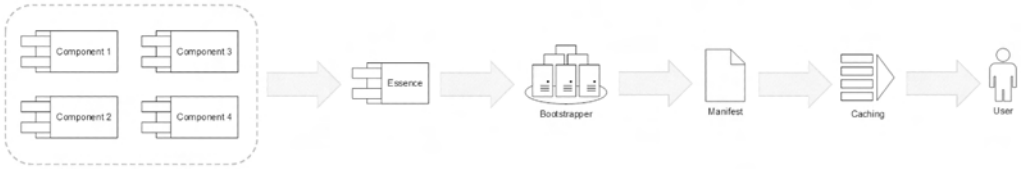


Fig. 3. Component-Based Software Architecture

The diagram (Fig. 3) describes a real architecture implemented in a prototype system for managing both learning content and learning process. It includes a number of small components, such as the header, footer, landing page, list of study materials, and more. In addition to the architecture is added one main component – "Essence". As explained above, the components are assembled together using the bootstrapper, and finally the contents are cached. Thus, in addition to the flexibility and independence of the individual components, we can provide much higher performance.



Fig. 4. Component-Based Software Architecture: Implementation Process

Figure 4 describes the process of creating a component, how to use it as part of the system, and finally, the process of caching. The component is first developed, then it is compiled, then it is added to a manifest, which is read by the bootstrapper, and finally, the assembly is cached on HTTP level.

4. Components vs. Micro-services. The architecture presented in the article outlines the question, "Since it is important to have a weak link between individual components that implement independent business logic to be able to make "hot releases" and also provide an easy way to cache and increase the performance, why don't we go directly to using a micro-service architecture?" Micro-service architecture is the closest in ideology to component-based software architecture [5]. The main difference is that micro-services are separate server instances, operating independently of each other, having their own database and communicating with each other only through HTTP requests. In contrast, the components are parts of a rather "monolith" or service-oriented architecture (SOA) that do not always use their own databases and are being accessed internally, as part of a whole. We can apply component-oriented architecture directly to SOA, but for micro-services that is not necessary, because the full autonomy has already been achieved for them.

At first glance, micro-services provide the same flexibility, reliability, and scalability that we can provide with component-oriented architecture and even their architecture and implementation is often superior to component-oriented architecture. However, there are a few things to keep in mind:

1. The software architecture of LMS or LCMS based only on micro-services is not typical, even the largest learning management and learning content management systems do not offer such a solution. The rule usually followed when building a software solution is to go from monolithic architecture, through SOA, and then only export parts of business logic to micro-services
2. Micro-services are relatively expensive to administrate and maintain. They have separate databases and are presented through completely autonomous software instances, the responsibility for maintaining them having been dramatically increased. Instead of maintaining one primary database and one instance of the software application that can be multiplied by the use of load balancer, multiple

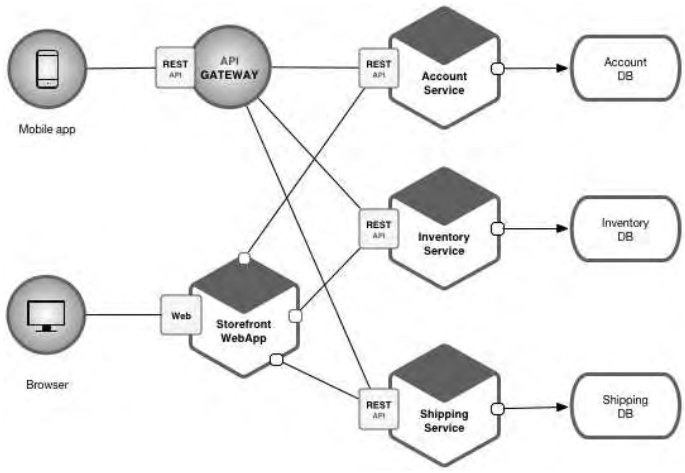


Fig. 5. Micro-service architecture

databases, multiple servers and network connections between them must be maintained.

5. Conclusion. Each web based system reaches a stage of its evolution, when the time for releasing new version that requires a downtime of the system becomes critical. Usually this is directly proportional to the number of users who use it and the number of locations from where the system can be accessed. For example, a system that has 5,000 users using it from 3 continents has no suitable time for a downtime, and in extreme cases, the downtime should be limited to a few minutes. LMS and LCMS are no an exception of this statement. Moreover, during their evolution LMS and LCMS suggest the simultaneous work of several independent teams participating in the development process. In this case, administration specialists offer "cold release" as the primary solution, followed by the migration to micro-service architecture. However, this is a relatively difficult to maintain and costly process. At the same time, component-based architectures, in combination with a special caching mechanism, provide the so-called "hot release" approach that seems to be a promising solution to all problems and challenges LMS and LCMS are facing.

REFERENCES

[1] J. Sondow, T. Ariel. Progressive deployment and termination of canary instances for software analysis. United States: Netflix Inc., 2014

[2] M. Bowman-Amuah. Load balancer in environment services patterns. United States: Accenture Global Services Ltd.

[3] S. Michel, K. Nguyen, A. Rosenstein, L. Zhang, S. Floyd, V. Jacobson. Adaptive web caching: towards a new global caching architecture. *Computer Networks and ISDN Systems*, **30** (1998), No 22–23, 2169–2177.

[4] H. Mei, F. Chen, Y. Feng, J. Yang. (2002). An architecture-based approach for component-oriented development. Proceedings 26th Annual International Computer Software and Applications, 450–455, DOI: 10.1109/CMPSAC.2002.1045042.
[5] R. Perrey, M. Lycett. (2003). Service-oriented architecture. Proceedings of Symposium on Applications and the Internet Workshops SAINT'2003, 2003, 116–119.

Oleg Iliev
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: iliev.oleg@gmail.com

„ГОРЕЩО“ ОБНОВЯВАНЕ НА ВЕРСИЯТА ПРИ СИСТЕМИ ЗА УПРАВЛЕНИЕ НА УЧЕБНОТО СЪДЪРЖАНИЕ И СИСТЕМИ ЗА УПРАВЛЕНИЕ НА ОБУЧЕНИЕТО

Олег Илиев

Един от основните проблеми, пред които се изправят съвременните уеб-базирани системи, е невъзможността за тяхното обновяване в реално време, без това да се отрази на работата им. С други думи, отмина времето, когато администраторите на уеб-базирани системи можеха да си позволят „лукса“ да изключат системата (правейки я недостъпна за потребителите), за да могат да обновят версията ѝ. Към този проблем може да се добави и допълнително предизвикателство пред администраторите – осигуряване на възможност за паралелна работа по различни части на системата от независими екипи. Този проблем е силно застъпен в модерните системи за управление на учебно съдържание (СУУС) и системите за управление на обучението (СУО). Предвид тяхната уеб-базираност и възможността за достъп на множество потребители едновременно от различни точки би било невъзможно да се определи интервал, през който системата няма да бъде използвана с цел да се обнови. Нещо повече, този тип системи все по-често комбинират редица функционалности с абсолютно независима бизнес логика, която предразполага обвързването на различни екипи за работа по отделните части на системата. В същото време е важно тези екипи да са напълно независими, без да се налага един екип да изчаква промените на друг, за да може да се направи едновременно обновяване на системата с по-малко нейни прекъсвания. В тази статия е представен оригинален модел за създаване и обновяване на системните версии, надграждащ компонентно-базираните софтуерни архитектури.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

VERIFICATION OF USER IDENTITY AND DATA SECURITY IN THE CONTEXT OF LMS AND LCMS*

Oleg Iliev, Radoslav Yoshinov, Georgi Tsochev

Modern education offers a variety of methods and tools for online learning. Nowadays, learning management systems are a tool that facilitates modern learning. That is why the security of these systems in terms of user authentication and verification is an important element. This raises the issue of providing data security at an extremely high level and also obliges the system to provide a way of verifying users identity. The article presents opportunities to meet these requirements through a combination of cryptographic algorithms, the use of flexible software architecture, and a user identification model.

Introduction. At present, information systems are an essential component in our everyday life. Central to the entire information and communication infrastructure are the computer networks, which are crucial for delivering many services for people and businesses: web applications, e-learning, e-commerce and others information society service [1]. The advent of the Internet is a major concern and alongside with it is the network and information security. Common security issues occur when creating a new system from basic browser authentication to physical access to servers. The authors of e-learning systems place more emphasis on functionality than the security when building such systems and this is why this document focuses on common security issues when developing new information systems.

The Learning Management Systems (LMS) and the Learning Content Management Systems (LCMS) must be constantly adapted to the evolution of technology, they must provide the most accurate information to the learners, tailored to their personal preferences and presented in the most attractive way possible. Moreover, these systems are no longer available just locally within one university, but accessible from anywhere in the world. This will either turn them into huge monolithic applications whose support will require enormous efforts and where the security remains a weak link, or seek a more appropriate and modern way to create a flexible, scalable, reliable and secure software architecture. E-learning course contains sensitive information, user data, and other content that must be kept from unauthorized access [3]. The paper presents exactly the kind

* **2020 Mathematics Subject Classification:** 68N19, 94A62, 94A60.
Key words: learning management systems, security, authentication, authorization, cryptographic algorithms.
This research is supported through the ICT in SES program of the Ministry of Education and Science of the Republic of Bulgaria.

of architecture that focuses on outsourcing responsibility for user authentication and authorization to a single service using Service Oriented Architecture (SOA), securing user data, and verifying user identity, as a must in a system where participants cannot be identified directly.

Extracting the responsibility for user authentication and authorization. Sharing multiple responsibilities from one system leads to its overload, lack of flexibility and scalability. The main business logic that is expected to be addressed in LMS and LCMS is related to the context of learning. Adding logic that deals with user authentication and authorization would unnecessarily complicate the system. Moreover, the protection of this module becomes much more difficult as it goes through to ensure maximum protection of the whole system. In other words, instead of concentrating on a small part of the system, the computer scientists have to deal with the whole system. This kind of a software architecture design has a huge drawback – releasing a new version of the learning-related business logic requires a release of the authentication and authorization system and vice versa [4]. The solution to this problem is to extract the logic to an autonomous service that will run and will be maintained independently of the entire system. In addition to dealing with the aforementioned problems, the use of an independent system that communicates with the core system enables the use of this system from more than one application. A good way to achieve independence between different parts of the system is to introduce SOA, as shown in the graph below (Fig. 1).

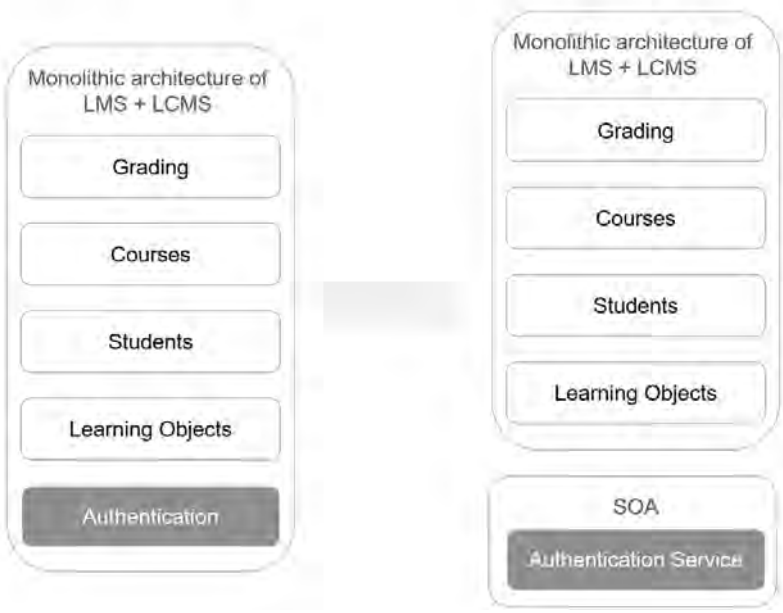


Fig. 1. Extracting the authentication logic into SOA

The SOA architecture provides many advantages of the system, such as flexibility, scalability and reliability [2]. It also makes it easy to configure a continuous the delivery (CD) and continuous the integration (CI) process.

Creating an authentication and authorization system for users from scratch involves a lot of work and the risks of not keeping the latest software trends for maximum security. Instead, an open source based solution could be used in the face of Identity Server. This is a web based service that integrates seamlessly with any web based software system, enables management of user roles and privileges from a centralized location, and provides a single sign-on (SSO) entry point [5].

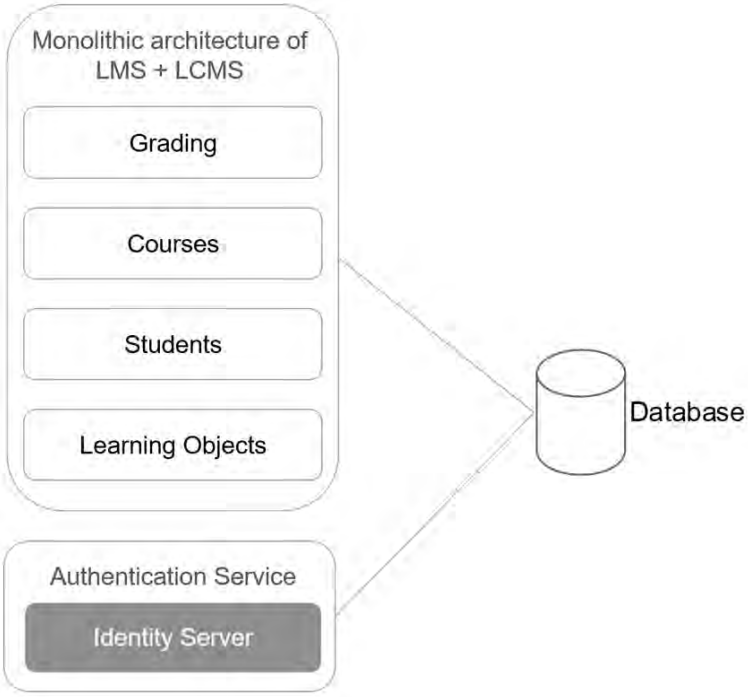


Fig. 2. Integrating Identity Server into LCMS + LMS architecture

Thanks to the Identity Server, one could easily provide the support of an external source of user authentication, such as a Facebook or a Google user account. This is achieved by the common user authentication standard OAuth2 (Fig. 2).

User authentication is handled by a central point and then a token is generated in the form of a Globally Unique Identifier (GUID) that represents the user to any individual applications part of the architecture. In other words, unlike Basic Authentication (where by principle the username and password are sent, encrypted or formatted, to the server, along with any requester) here only a GUID is sent, which means nothing to a malicious person who can "sniff" the traffic generated by the app. This GUID is verified by the Identity Server and applications gain access to a variety of user claims through which they can authenticate the user to individual parts of the system.

Ensuring the security of user data. Extracting the logic related to user authentication is a very important condition for maximum security in LMS and LCMS, but not sufficient is the user data protection is concerned. To compromise the security of this

system would mean to get access to the users' passwords stored in the database. The easiest way to protect them or other data that would allow the unauthorized use of the user account (account cracking), such as the answer of a secret question, is by hashing this secure data. Many systems do this by encrypting the data instead of hashing it, thus breaking the encryption key could break the security of all data encrypted with it. At the same time using the key is necessary by the system's architecture to ensure a two-way "unlocking" and "locking" the data. The systems that use hashing often use the MD5 algorithm, which is well known and has already been cracked by the so-called "brute force" attack and the use of a dictionary of potential password values in the hashed and non-hashed versions.

Ensuring maximum data security requires a combination of cryptography and hashing algorithms. One of the most secure algorithms at the moment is the Password-Based Key Derivation Function 2 (PBKDF2), which uses a key to hash and further encrypt data with SHA-512 (Secure Hash Algorithm). It almost completely eliminates the possibility of using brute force attack to crack the protected data. It requires the use of a key, so the computer specialists must again be careful, since if the key is breached by "malicious person" this would lead to complete compromise of the data protected by it. For this reason, it is important to select the most secure key. The use of so-called cryptographic "salt" that provides randomly generated data used as a key can be a solution to this problem. The developed data protection mechanism presented in this article assumes that generation of *salt* is based on a GUID which is then coded to the Base64 and finally stored in the database, as shown in the graph below.

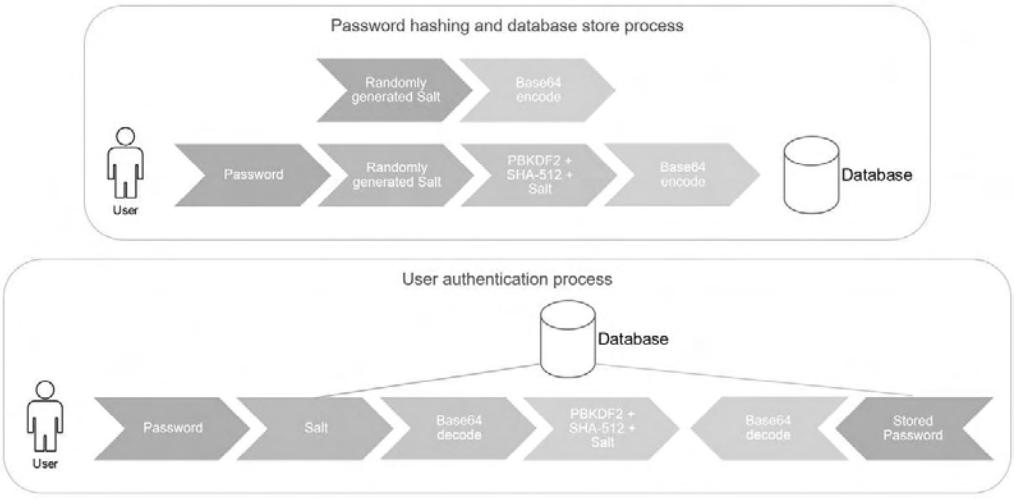


Fig. 3. Process of user registration and further authentication

The authentication process goes through the creation of a user account with a password encrypted with PBKDF2 in combination with SHA-512 and using a different *salt* per each user. After the account is created, the user's provided password is being hashed during the authenticated process, as it was done when the account was created, and this result is compared with the password saved in the database, without the need to "unlock"

the password stored into the database. In other words, even the system administrator of the LMS and LCMS will not be able to understand the user's password.

Verification of user's identity. The modern learning and content management systems offer a virtual environment in which the user (teacher or student) consumes learning materials, generates content, assesses his/her knowledge, and also has the opportunity to obtain a certificate attesting to his/her completed training course. In other words, these types of systems aim to completely replace the conventional method of offline training, whereby all participants in the learning process meet in person and the verification of their personalities becomes easy and direct (the learner is introduced to

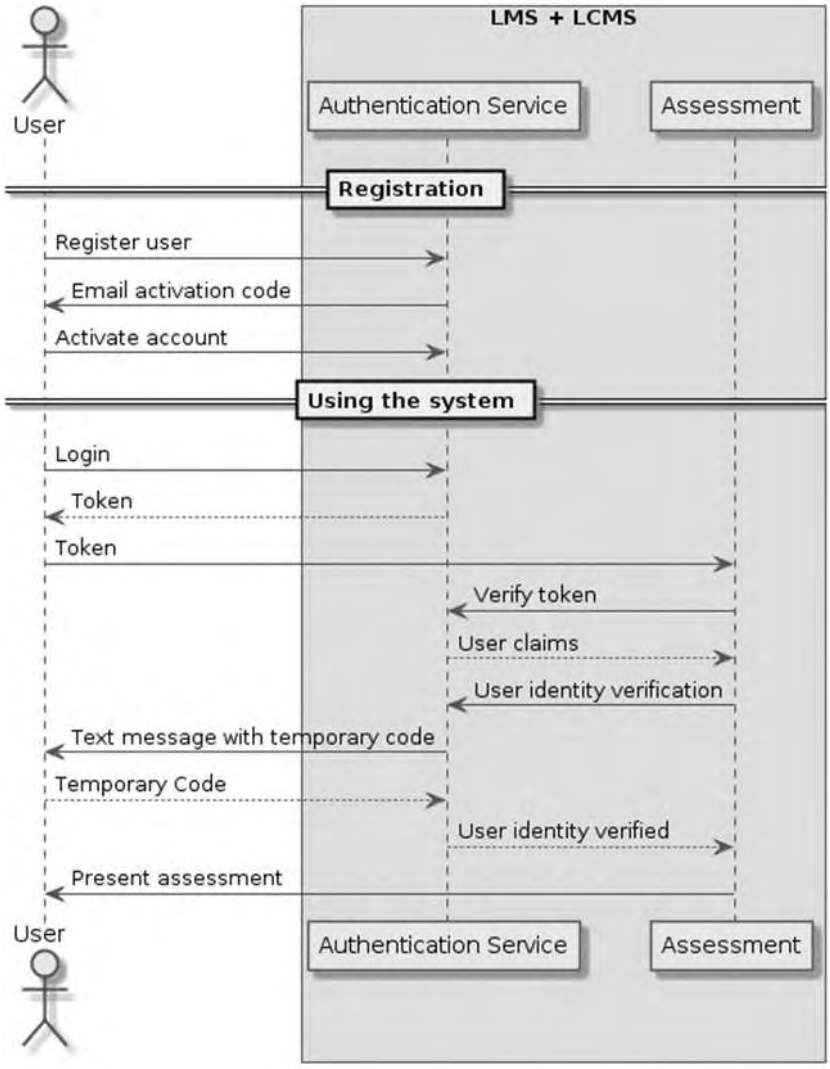


Fig. 4. User authentication and identity verification

the teacher and both know each other), with one in which the connection between all participants in the process is virtual (authentication and verification of individual participants in the process is necessary for them to present themselves to the system and from there – to the other participants). For this reason, it is absolutely necessary to ensure that the consumer identity can be verified.

Even with the provision of a highly reliable service for a user authentication and authorization, the human factor runs the risk of compromising the process. Users can be expected to be careless when storing or using their passwords. This raises the question: "How can we be sure that the user posing as a teacher is indeed the one and not someone using the teacher's account maliciously?". The same question is applicable also for the students, who have the opportunity to receive a certificate at the end of a course.

According to the General Data Protection Regulation (GDPR) [6], binding to more than one user authentication method ensures that consumer identity is fully identified. In other words, the combination of a username and a phone number is a sufficient way of verifying a user's identity [7]. Following this idea, various services are now available over the Internet to enable third party verification of the user's identity instead of using well-known electronic signatures. For example, the DocUSign system provides the ability of having a fully legitimate and legally enforceable contracts signed remotely by the users. With LMS and LCMS it is possible to simultaneously associate email, username and phone number.

During the registration process into the LMS or LCMS the user chooses a username that makes it unique to the system, then he/she is required to enter an email to use to communicate with him/her and confirm his/her registration by going to the address cited in an automatically generated email to activate the account. This provides the system with the ability to link the personal email address of the user with a unique identifier for the system in the face of the username. Further, if a code is sent to the user's phone number as part of a text message during any user's attempt to interact with the system, such as when starting an exam or when generating a learning content, one can be assured that the system provides verification of the user's identity. It is not possible for a malicious person to impersonate the user since even "stealing" the password is not enough to interact with the system.

Conclusion. The migration of any individual part of a system to SOA has many advantages, such as providing scalability, reliability and flexibility to the individual modules that are expected to have higher load than the others. At the same time, the system business logic can be separated in order to completely differentiate responsibilities. The user authentication service is a suitable module to be exported when we talk about LMS and LCMS. In this way, the system can retain the learning-related logic at its core, and authenticate the users with another system that can even be used by several systems at the same time.

Following this idea, it should also consider the actual protection of user data that is stored in the database and which could potentially compromise the users' accounts. Furthermore, in the case of real security breach, the system must provide a way to verify user's identity, as a prerequisite for a system where individuals cannot be identified directly. The paper offers a software architecture, a direct example of its integration into an LMS or LCMS, and a modern way of verifying user's identity, which is a promising solution to such problems.

The use of advanced training also brings many security concerns, such as social engineering and hacking. They will always participate and the only thing that can be done is to try to the tighten security not only through software and hardware solutions, but also by introducing an additional measure. Future work includes deeper investigation of the verification of the user, more specifically – by creating user profile and monitoring its activity based on different technologies, such as microservice architecture or agent based technology.

REFERENCES

[1] R. Graziani, A. Johnson. Routing protocols and concepts. Indianapolis, IN 46240 USA, Cisco Press, 2008.

[2] M. Conde-González, F. García-Peñalvo, M. Guerrero, M. Forment. Adapting LMS architecture to the SOA: an Architectural Approach., 322–327, 10.1109/ICIW.2009.54, 2009.

[3] K. El-Khatib, L. Korba, Y. Xu, G. Yee. Privacy and Security in E-Learning. *International Journal of Distance Education Technologies* **1**, *4* (2003), 1–19, doi: 10.4018/jdet.2003100101.

[4] A. Baier, T. Bernoulli, T. Braun, C. Graf, U. Ultes-Nitsche. Case Study of the Usage of an Authentication and Authorization Infrastructure (AAI) in an E-Learning Project. Proceedings of the ISSA 2006 from Insight to Foresight Conference, 5–7 July 2006, Sandton, South Africa, 10 pp.

[5] R. Vasiu, A. Ternauciuc, M. Onita, B. Dragulescu. Single Sign-On Solutions for Moodle. Conference proceedings of "eLearning and Software for Education", issue:01, 2009, 217-224.

[6] Regulation (EU) 2016/679 of the European Parliament and of the Council of 27 April 2016 on the protection of natural persons with regard to the processing of personal data and on the free movement of such data, and repealing Directive 95/46/EC (General Data Protection Regulation), `https://eurlex.europa.eu/legal-content/en/TXT/?uri=CELEX%3A32016R0679`, Accessed 2019-06-27.

[7] D. Amo et al. GDPR security and confidentiality compliance in LMS' a problem analysis and engineering proposal. A: International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality. TEEM'19: Proceedings of the Seventh International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality: León, Spain, October 16–18, 2019. New York: Association for Computing Machinery (ACM), 2019, 253–259.

Oleg Iliev
e-mail: ilievo@cc.bas.bg
Institute of Mathematics and Informatics
and
Laboratory of Telematics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Block 8
1113, Sofia, Bulgaria

Radoslav Yoshinov
e-mail: yoshinov@cc.bas.bg
Georgi Tsochev
e-mail: gtsochev@cc.bas.bg
Laboratory of Telematics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Block 8
1113, Sofia, Bulgaria

ВЕРИФИКАЦИЯ НА ИДЕНТИЧНОСТТА НА ПОТРЕБИТЕЛЯ И СИГУРНОСТТА НА ДАННИТЕ В КОНТЕКСТА НА LMS И LCMS

Олег Илиев, Радослав Йошинов, Георги Цочев

Модерното образование предлага достатъчно разнообразни методи и средства за онлайн обучение. В днешно време системите за управление на обучението са едно от основните средства в помощ на съвременното образование. Именно и затова сигурността на тези системи, от гледна точка на потвърждение за автентичност и удостоверяване на идентичността на потребителя, е важен елемент. Това повдига въпроса за осигуряването на сигурност на данните на изключително високо ниво и също така задължава системата да осигури начин за проверка на идентичността на потребителите. Статията представя възможности за изпълнение на тези изисквания чрез комбинация от криптографски алгоритми, използване на гъвкава софтуерна архитектура и модел за идентификация на потребителя.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

MULTI-COMPONENT INFORMATIZATION MODEL FOR THE SUCCESSFUL TRANSFORMATION OF THE EDUCATIONAL PROCESS*

Orlin Kouzov

The widespread digitalization of the society poses serious challenges to traditional activities and economic sectors, forcing them to evolve in different forms and, at times, to be completely transformed in order to be adequate to the new trends in the social development. One of the most important sectors, accompanied by such a key change, is the education, where the impact of the information and communication technologies (ICT) is complex and long-term, changing many of its traditional characteristics. In this article, I consider such a multi-component complex impact model, whose individual elements are linked and combined, creating a qualitatively new standard for education and training..

1. Introduction. The dynamic development of the technology and innovation creates preconditions for a qualitative leap in the economic development of the modern societies. Countries that succeed in recognizing and integrating in a timely manner the basic tenets of the so-called "knowledge economy" are moving upwards and playing an increasingly important role in the global world, and the newly created products and services are becoming an increasingly important part of the modern man's life. Genomic, quantum and nano technologies, autonomous drones, artificial intelligence or smart cities are just part of the huge arsenal of innovative improvements that make life more manageable, safe and attractive and contribute to raising the well-being and the satisfaction of the citizens. The upward development of all these products and services, however, presupposes a dynamic, relevant and constantly improving education, which already requires qualitatively new features that are not inherent in the "analog" educational model so far. The digitization, or more precisely the informatization of the education, by no means simply equips the traditional way of education with digital means of technology but represents a key change in the way the education has evolved so far. The traditional public education model, designed and outlined in the industrial age suddenly turns out to be extremely imperfect and inadequate to an age, in which the knowledge is already a key resource and at the same time an end product reflecting publicly recognized added values. So is changed the way we acquire and multiply knowledge and skills and such change is inevitable in order to maintain the growth rates.

*2020 **Mathematics Subject Classification:** G.2.2, E.1.
Key words: informatization model, knowledge economy, digital innovation, virtual classroom, educational transformation.

In Section 2 of this paper, I discuss the main features/modules of the change that is necessary for the successful transformation of the educational model, and what arguments the need to implement each of them. Section 3 describes the relationships between the individual modules and validates the need to integrate them in a complex and synchronous manner, while Section 4 explains how the informatization aspects of each of these lead to those qualitative changes that are necessary to achieve the desired net effect and ultimately – to get an improved and transformed educational model that is adequate to the modern realities. Section 5 outlines the pedagogical framework of this model, and the last section (6) summarizes the conclusions and main findings of the development and outlines a consistent plan for launching and implementing the change.

2. Key features of the change. It is not an exaggeration to say that modern education is in fact a kind of revolution, provoked by the technology penetration. Its main features can be synthesized as follows:

• *Raising attention and commitment to the process.* In the contemporary ocean of information (audio, video, 3D, etc.), it is becoming more challenging and time-consuming to attract young people's attention to the educational content and the essence of knowledge, so this content must be increasingly attractive, dynamic and mind engaging, since at the end it is not the teacher, but the brain of the student that makes the learning successful.

• *Extending the classroom beyond school boundaries / ubiquitous learning.* The modern technologies, which I will refer to in the next sections, allow the learning process to go outside the classroom and be introduced into the student's personal time, allowing him/her to study at home, on the tram, while on vacation or even while having fun with friends. In this way, the learning process becomes continuous, in line with the continuously accelerated concept of lifelong learning, and the activity itself becomes more informal and natural, such as breathing or drinking water, unobtrusively raising the student's competences and knowledge.

• *Learning as fun and empathy.* In line with the positional breakthrough of the educational process, it is changing in qualitative aspect as well – modern learning can in many respects also be considered as a type of entertainment requiring a different level of empathy, judgment, and often critical thinking on behalf of the student. Much of the serious educational content could be turned into game situations, engaging students to solve a scientific problem, find a practical solution, or just look at the problem from a different angle. At the same time, they cultivate communication skills, dialogue, criticality, teamwork and rational judgment, which are especially important in the context of the educational change in order to meet the needs of the knowledge-based economy. Serious games can play important roles in modern day education by combining appropriate content with interactivity and reflecting both the current state of technology and learners' social profiles [2].

• *Learning at various speeds.* Also known as *individualized learning*, learning at various speeds is a rational interpretation of the fact that all people are different and the circumstance that several children are the same age does not make them identical in terms of skills, assets or interests. After all, each individual represents a whole separate universe, and if we want to take the best out of him as a potential and results, we obviously need to approach him/her individually, taking into account his/her strengths and weaknesses. Our long-term goal, beyond a relatively modest educational minimum,

which should be covered by everyone, is to leave students alone to draw the boundaries of their potential, developing in an educational or professional field as they wish, not just following the desires of the teacher, the parents or the society.

• *Engaging parents.* Given the ubiquitous nature of the modern education and the fact that the learning process continues in the student's home, the need to involve parents in this process naturally arises, and they need to support their children in an important niche where the teacher has no real opportunity to intervene directly – the self-study. The parent can, on one hand, exercise some control over the child's homework while at the same time assist him or her with a particular subject or simply encourage him/her appropriately – for example, a promise of a reward when reaching certain learning outcomes, excellent grades, successful tests, etc.

3. Complex implementation of the transformation modules. It is important to analyze the already described characteristics of the modern educational model in order to argument why it is so important to consider them in parallel. Above all, they successfully complement each other. For example, it is not possible to imagine education as an out-of-class process without engaging parents who should assist us in securing a significant portion of the student's time (staying home) or engaging the sustained attention of the adolescents without considering their individual characteristics. Hypothetically, modern education can be equated with an **endless educational space** in which the student develops not linearly but organically – the skills he receives are complex, reflecting various life aspects, not just a narrow educational framework, often incomparable with personal biases, needs or interests. In many ways, the modern educational model is much more adaptable to life in the knowledge-based economy and prepares competitive individuals, because the knowledge they receive is not any more an abstraction or an ideal mathematical model. The contemporary students, trained in the transformed educational environment, could feel the empathy and engage in critical comprehending of the reality in search of specific practically oriented solutions. At the same time, the need for more active communication – with teachers, parents and classmates, is a natural development of the model, as the multidimensional nature and the increasing complexity of the surrounding educational ecosystem provoke many questions and, respectively, require many more answers and involvement at all levels. It is no exaggeration to conclude that the collaboration of participants in the process is a key necessity, as long as the new model goes far beyond the traditional frameworks and understandings of school education (special building/classroom, designated teacher and fixed teaching hours with clear targets). In this way the identification and engagement off all the potential stakeholders of the educational process is the only way to positively tackle the challenges. Particularly, important ally in this endeavor are the informatization and capabilities of the new ICTs, since in many cases they are the only working mechanism for achieving the preset goals and the ambitious tasks, and they tend to be not just a catalyst, but also a consequence of the change, as the increased needs constantly require newer and better technologies.

4. Digital and informatization aspects of the new educational model. Let's look at how the individual "modules of change" can be realized with the means of ICT, and how the individual aspects of computerization would affect one or another part of the new educational revolution. Without neglecting the fact that a digital technology can have multiple layers and affect all aspects of transformation, I will briefly describe which key innovations directly affect specific changes. For example, multimedia edu-

cational resources, 3D animations and interactive learning content directly affect the attention-grabbing and engaging aspects of learning as they are a natural environment for contemporary young people and a qualitative change compared to traditional paper textbooks. Rich digital content is a powerful way of providing today's students with high quality, relevant and up-to-date instructional materials [5]. Our education can become extremely attractive, modern and efficient if we take advantage of information technology and make a qualitative transformation of the educational process, using these advantages [3]. Extending the classroom beyond the school boundary and the concept of ubiquitous learning are successfully implemented through cloud technologies with adjacent distributed data centers with information and services, augmented reality resources and high penetration of mobile technologies and devices within the society (high-speed optical and mobile Internet, WiFi, smart phones and tablets). Modern distance learning methodologies now include technologies such as virtual classroom, which not only delivers course materials to the learners, but also provides a live, contextual and interactive environment for them [4]. Considering the learning as a fun and empathy can be successfully identified with the so-called "gamification" (the opportunity for learning content to be presented in the form of a game and the participant to reach the educational output through the process of discovery). There are hundreds of educational games, especially in the field of cultural and historical heritage and the research of the past, but it is no exception to include any other subjects (like math games, virtual physics and chemistry labs, etc.). Traditional teachers, equipped with appropriate technologies such as AI, automated knowledge assessment systems, and questionnaires with interactive questions, now have the ability to evaluate students' knowledge and skills much more thoroughly and comprehensively and mentor them according to their interests and needs. In line with the above, we should considerably appreciate the availability of a suitable ICT infrastructure (PC or smart mobile device) for literally anyone, thus allowing the training to be conveyed online without the limitations of the traditional classroom where everyone is forced to learn the same material with the same speed no matter how smart he is. Involvement of parents, on the other hand, is already quite possible through various educational portals, e-journals, video conferencing systems (Skype, Google Hangouts, etc.), social networks such as Facebook and Twitter, e-mail and more ICT based communication systems. In Fig. 1 I have illustrated the multicomponent information model, which gives a clear idea of the main modules that inspire the educational revolution.

5. A pedagogical framework for the change. There are various definitions of a *pedagogical framework*, but according to one of the most common it actually represents the integrated set of philosophical considerations, teaching preferences, and learning values that informs and motivates the instructor in designing and facilitating a learning experience. Obviously, the framework itself also has several components that secure the elements of the change. However, my enumeration does not follow any prioritization or emphasis, but provides guidance for the symbiosis that must be built in order to have the optimum educational effect and includes:

• *Technology culture* – extremely important in terms of the context and entry of innovation into the knowledge economy, because it provides the basic skills needed to operate technology in a modern society. This component has a direct impact on the management of the technology ecosystem and the driving attention module, but it also has a significant impact on the other elements of the multi-component model – participation/gaming, etc.

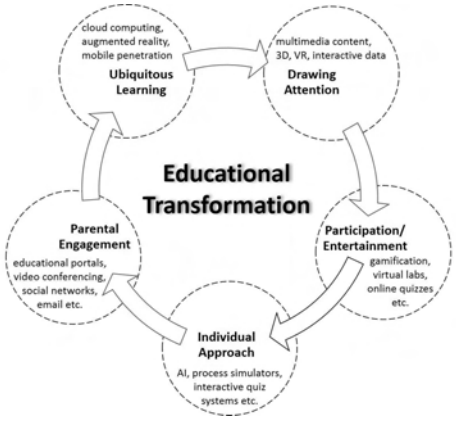


Fig. 1. Multicomponent Informatization Model of the Educational Transformation

• *Distance teaching and communication skills* – represent a qualitative leap over the traditional communication skills, as long as some basic social assets are no longer available or objectively suppressed (e.g. body language or the hierarchy in the classroom), while others have a significant impact (such as time flexibility or effective involvement in offline activities). These skills have a significant impact on the individualized learning as well as on the parental involvement.

Dialogue and interactivity – breaking the frame of the typical broadcast manner of teaching, as long as listening to the students' opinions is a key component in the modern education and a basis for promoting a critical thinking, which helps students to empathize with and actively participate in the learning process.

• *Creativity and imagination development* – going beyond the curriculum and tolerating the transformation of the theoretical knowledge into life skills in line with the needs of the society and with the concept of lifelong learning. Creativity is also an important component in creating and evaluating attractive educational materials thus engaging students' attention to learning.

• *Team and community building skills* – although learning itself remains a strictly individual process, we still need a friendly ecosystem that includes a wide range of players – classmates, other teachers, parents. The ability to create and maintain such ecosystem is reflected in the team-building skills of each teacher and brings the success of his/her students.

6. Conclusions and recommendations. The contemporary education faces tremendous challenges as the dynamics of the social development predetermines the need for its radical transformation in order to be successful in the new digital economy. We can safely conclude that "the emergence of the knowledge economy poses a new challenge for education" [1]. The main characteristics of this new type of education are related to encouraging the development of individuals in a much more multidimensional and dynamic environment, where empirical knowledge is inferior to the need for practical life skills, creativity, critical thinking and enhancing the learner's personal potential. Linear education is transformed into an organic process covering all the aspects of life, involving

a much wider range of stakeholders (parents, classmates, society), which is impossible without harnessing the potential of the new information and communication technologies and a consistent and purposeful informatization of the learning process. It would include building an adequate digital infrastructure – cloud services, high-speed information networks, multimedia educational content for all subjects, and launching national campaigns for individual access to a computer or mobile device for each learner, use of social networks and video conferencing services to promote communication between parent and teachers. The national governments should support appropriate teacher training programs for the development of suitable educational scenarios and teaching them in an attractive and game-resembling manner to the students, thus catching their attention. Such strategy should help making learners not just feel empathy to the learning process but also be active participants in it, which will guarantee lasting educational results and successful realization of the future labor market. The timely implementation of such a multicomponent model with a suitable pedagogical framework, facilitating the transformation of learning and education as a whole, is of paramount importance for the a successful realization of the societies in the new digital reality.

REFERENCES

[1] D. Guile. The Learning Challenge of the Knowledge Economy, The Knowledge Economy and Education, Vol. 3, Sense Publishers, 2010, ISBN Paperback: 978946091257.

[2] Z. L. Márkus, D. Paneva-Marinova, D. Luchev. Towards Effective Understanding of Ancient Thracian Civilization by Serious Game. Proceedings of the 24th Conference of Multimedia in Education (http://www.mmo.njszt.hu/), Budapest, Hungary, 2018, 223–227, ISBN:978-615-5036-13-2, DOI:10.26801/MMO.2018.1.024.

[3] D. Pavlova. Illusions about ICT in Education. *Education and Technology: Innovations in Training and Cognitive Development*, **6**, (2015), 307–310 (in Bulgarian), http://www.itlearning-bg.com/magazines/Spisanie2015/resources/spisanie_e_book_2015.pdf

[4] N. K. Subramaniam, M. Kandasamy. The virtual classroom: A catalyst for institutional transformation. In: ICT for accessible, effective and efficient higher education: Experiences of Southeast Asia (eds K. S. Hong, K. W. Lai). Australasian Journal of Educational Technology, **27** (Special issue,*8*) (2011), 1388–1412, http://www.ascilite.org.au/ajet/ajet27/subramaniam.htm.

[5] R. Yoshinov, D. Pavlova, M. Kotseva. Specifications for centralized datacenter serving the educational cloud for Bulgaria. XII International Conference on Electronics, Telecommunications, Automatics & Informatics (ETAI), Ohrid, Macedonia, (2015), No 10-2.

Orlin Kouzov
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
e-mail: okouzov@cc.bas.bg

МНОГОКОМПОНЕНТЕН ИНФОРМАТИЗАЦИОНЕН МОДЕЛ ЗА УСПЕШНА ТРАНСФОРМАЦИЯ НА ОБРАЗОВАТЕЛНИЯ ПРОЦЕС

Орлин Кузов

Повсеместната дигитализация на обществото поставя сериозни предизвикателства пред традиционни дейности и икономически отрасли, като под различна форма ги принуждава да еволюират, а понякога и тотално да се трансформират, за да са адекватни на новите тенденции в общественото развитие. Сред особено важните сектори, съпътствани от подобна ключова промяна, е и образованието, като въздействието на информационните и комуникационни технологии (ИКТ) върху него е комплексно и дългосрочно, променяйки много от традиционните му характеристики. В настоящата статия разглеждам именно един такъв многокомпонентен комплексен модел на въздействие, доколкото отделните му елементи се съчетават и комбинират, създавайки качествено нов модел на образование и обучение.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

TOWARDS PERSONALIZED CONTENT OBSERVATION IN AN ANCIENT HISTORY VIRTUAL MUSEUM*

Detelin Luchev, Lilia Pavlova, Maxim Goynov

For a long time, cultural heritage has been maintained in museums, galleries, libraries and research laboratories, where not everyone was able to access this wealth. Digital technologies that have been developed during the past couple of years introduced new solutions of documentation, maintenance and distribution of huge amounts of collected material. Among these new technologies are virtual museums, which have already proven their worth as a contemporary conceptual solution for access to and attractive presentation of cultural archives. This article aims to present the virtual museum, an advanced system managing diverse collections of digital objects that are organized in various ways by a complex specialized functionality. However, these systems often suffer from the lack of tools for improved content observation and enhanced learning experience. The paper present some solutions for effective usage in this context of virtual museum content for learning purposes.

1. Introduction. The development of the technologies during the last years provides new functionalities and advanced services to contemporary virtual museum (VM) transforming their static complex structures to environment with a *dynamic federation of functional units* [1]. This change resulted from the needs of the market, the emergence of new technologies, and especially from the request for wider use of the museum resources and adapting VMs content and services to the needs of different user groups.

Some key research questions, raised during the design and the development of these systems in the context of their usage for education, are:

- How to present the selected resources in a given context and to determine the conditions and use cases – cognitive or educational goals, analysis, creative use?
- How to help the user not just to view, but to also gain knowledge?
- How to provide knowledge in the most suitable way and form?
- How to adapt the offered information content for each individual user or group in order to achieve their learning goals and tasks?
- How to choose the most suitable resources for a specific situation and the method of introduction to the domain, which is subject to research?

* **ACM Classification:** J.5, H.4.
Key words: Virtual Museum, Ancient History, Digital Technologies.
This research is partially supported by the Bulgarian Ministry of Education and Science under the National Research Programme "Cultural heritage, national memory and development of society" approved by DCM No 577/17.08.2018 and by the Bulgarian Scientific Fund under the research project No DN02/06/15.12.2016 "Concepts and Models for Innovation Ecosystems of Digital Cultural Assets".

The difficulties in solving these research issues are related to the lack of common model and working solutions regarding the basic and the extended functionality, and synchronizing the solutions with the existing standards and regulations in the e-learning area; provision of functionality for learning analysis, understanding and better interpretation of digital cultural content; context-dependent use of digital cultural resources; increase and generalization of visitor experience, contextual techniques for personalizing visitor experience, etc. [2].

This paper aims to demonstrate some solutions for effective usage of virtual museum content for learning purposes through services to improved content observation and enhanced learning experience. Main factors, related to the VMs user experience and content usability issues are considered. Users' cognitive needs, goals, preferences, and interests have been carefully studied and have become the starting point for the new functionality. The paper tracks some services for improved content observation and enhanced learning experience, which could be applied in a virtual museum. Special attention is paid on the personalized content usage in the VM environment.

2. Virtual museum kernel. The virtual museum mainly contains service panels for *Museum content management, Museum content presentation, Administrative services* (see Fig. 1), jointed to a *Media repository* and a *User data repository* [3].

The *Museum content management* module refers to the activities related to basic content creation: add (annotating and semantic indexing), store, edit, preview, delete, group, and manage multimedia digital objects; manage metadata; search, select (filter), access and browse digital objects.

The *Museum content presentation* module supports objects and collections display. It also provides collections creation (incl. search, select/browse and group multimedia digital objects according to different criteria and/or context of usage), visualization, status of collection display.

Content presentation module aims to provide access to all virtual museum services through wide range of contemporary technologies and devices – not only desktop PCs, but mobile phones, tablets, TVs, VR devices, *etc.* Interactive media technologies are used to provide best user experience within the content of the virtual museum.

The *Administrative services* panel mainly provides user data management, data export, tracking and analysis services.

For every object all semantic and technical metadata are saved in the *Media repository.* These metadata are represented in catalogue records that point to the original media file/s associated to every object.

The *User profile repository* manages all user data and their changes.

3. User experience and content usability issues. When the VM user is a learner, or has learning purposes in the environment, "one size fits all" solutions are not enough to satisfy his/her needs. Different users have different learning needs and preferences that (should) affect the learning function outcome. Learners expect from the system a "personal facilitator" and not a "classroom" behavior, in which their personality and needs are known and taken into account. Based on [4] in *learning personalization* is most generally defined as an adaptation of the learning process and its content to the personal characteristics and preferences of the learner, as much as possible.

There are several benefits of thinking about and trying to understand learning preferences [5]:

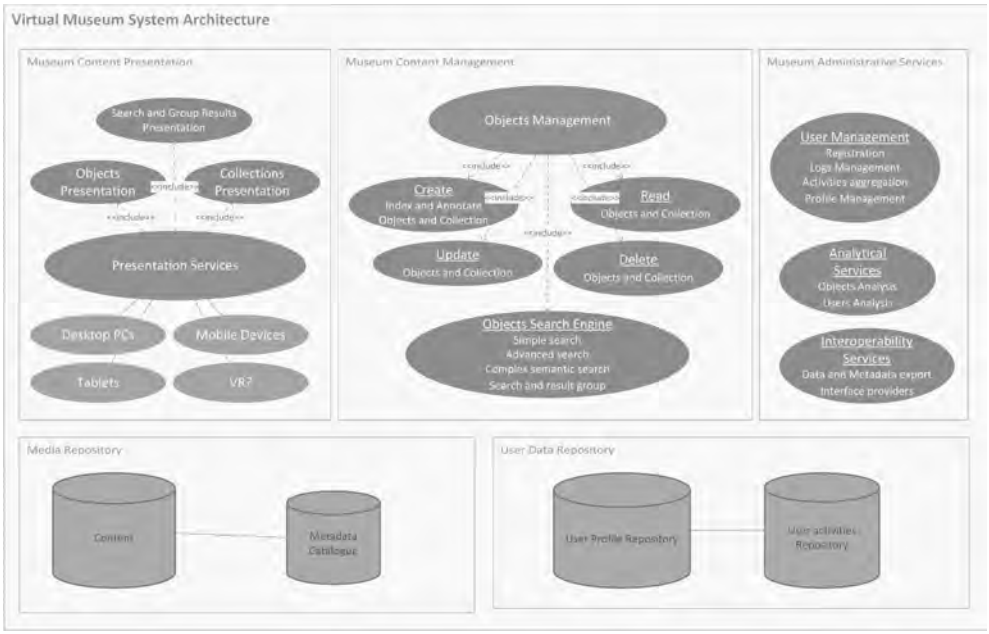


Fig. 1. The functional units of the VM System Architecture

- People learn most effectively when the strategies used are closely matched with their preferred learning style.
- Sometimes we can improve our learning by knowing what our strengths are and then doing more of what we're good at.
- Often we can improve our learning by knowing what our weakness are and trying to enhance our skills in these areas.
- Different situations and learning environments require different learning strategies, so it's best to have a large repertoire from which to draw.

But which are these educational needs and preferences that essentially should be considered as input parameters in personalization processes and what is their role in the construction of a learning plan and the selection of appropriate learning resources [6]? Authors of [6] identify and analyze a number of factors that can influence the extent and outcome of learning such as the learning style, learner goals/objectives, previous knowledge, educational level and difficulty, technical and other preferences (*e.g.* language, *etc.*).

Our research practices point to various factors that should affect even more the learning activities and selection and usage of the VM content for learning, such as:

- The space in which learning takes place, its aesthetics and athmosphere, user interfaces, visual elements, input devices, interaction with other learners/mentors, options of dynamic changing of the learning place, even its realism.
- Interactivity and immersion learning.
- The "interplay" between the learner and the learning's narrative or the learning place as a whole.

- The *learnativity content model* – the concept of assembling content into higher-level objects, as it is defined by Wagner [7].
- The set of challenges the learner will face within the learning space; synchronization of the challenges with the ability of the learner.
- Keeping interests by: a) implementation of multiple difficulty settings for the different learners, and b) usage of non-trivial learning objects – applied games, puzzles, stories, conundrums, *etc.*
- Transforming the boring learning activities in adventures. The quality of the learner experience – whether learners enjoy working with the e-system, or find it frustrating.
- Setting awards for the efforts – reward the learners for skill, imagination, intelligence and dedication.
- Enhancing the motivation by encouragement, diversity, and extended curiosity.
- Eventually, conscious awareness of the learning as a key engine for the future success.

The provision of creative experiences, learning-by-doing and role-playing scenarios could be also mentioned.

Moreover, a key factor to define the model of the proper learner: the "who", or the degree of specialization in defining who is modeled and what the learner history is; the "what", or the cognitive goals, plans, attitudes, capabilities, knowledge, and beliefs of the learner; "how" the model is to be acquired and maintained and the "why", including whether to elicit information from the learner, give assistance, provide feedback, or interpret the learner's behavior [8]. Callan et al. [9] commented in their paper that the user models should take into account also the overall information space – the context – including:

- Cognitive abilities, e.g. learning styles, perception.
- Individual differences, e.g. experience, education, age, gender.
- Individual and group behavior patterns and history.
- Subject domains.
- Work tasks, e.g. writing an essay, choosing a movie, planning a holiday.
- Work environments, and
- How all of the above change over time.

Callan et al. (ibid.) emphasized on investigating methods for building more robust, flexible and portable models of the complexity of users, tasks and contexts to inform the diverse possibilities for personalization. Targets for learner personalization include developing implicit rather than explicit methods for learning user preferences which form the user models as well as user models portable across applications, devices and systems. Perhaps the biggest challenge in this area will involve the development of user models that will drive personalization and recommender systems, that are rich enough to capture as much of the user's task environment (context, task, situation), history, contribution to communities and individual preferences as possible while conforming to a person's privacy choices.

Major problems appear during the design of the software solutions (services, components, *etc.*), closely capturing the above discussed factors. Some of the problems concern the communication between the user and the software environment. Other are related with the formal presentation of the subjective issues such as learner skill, imagination,

motivation, intelligence, dedication, *etc.* Moreover, in order to provide effective forms of personalized learner experiences the focus must be on the design of the interaction per se as an integral part of the whole system. There is a need to develop multi-modal mixed initiative interfaces that draw on a range of user information seeking models. The requirement is thus for research to develop theories of interaction which underpin the design of applications and vice versa, and which go beyond issues of simple elicitation, presentation and feedback [10].

4. Services for improved VM content observation and enhanced learning experience. A very important trend of the future is that any learning content from any source (virtual museums, digital libraries and repositories with digital objects, knowledge grids, *etc.*) will be available anywhere at any time – via natural interaction – on any interactive learning platform, in any format desired by the user, which implies that a specific attention should be paid to services for learning content delivery, creation (production), adaptation, personalization, storage, *etc.* In a world where content on demand is available everywhere from any providers, *finding appropriate learning content for the user needs (for short – discovery)* becomes of most importance. Discovery can be both of specific pieces of content and also packages of related content. The discovery engine should have some intelligence, remembering previous choice selected and that information to steer new searches. The usual current use of *discovery* is for a search to be conducted, followed by the subsequent download of the information being sought. This is the way most people expect discovery in a search context to be used. An alternative view is that the VM search service could be based on an example or based on searches one has made previously (based on a profile that could be stored in the network or in the learning platform) or on some consensus view.

The mission of VM developers should be to facilitate the *production of new audiovisual content* that takes maximum advantage of the new technological capabilities. The production of interactive learning content will become the most important element of content production. The learning content will requires contributions from individuals, and individuals will wish to personalize and adapt content to their needs. The main requirement is the realization of more economical and more easily usable tools for content production. It is therefore crucial that content developers have better access to technology that enables them to create content and implicitly opens the way to distribution channels.

Content adaptation is the ability to tailor content to the current circumstances of the user. Content adaptation is related to content personalization, which is concerned with tailoring content semantically to the user's requirements. Several international research efforts are focused on the design and implementation of middleware infrastructures for content adaptation. Most of those proposals tend to adopt an adaptation approach based on static content selection, some research activities have already addressed real-time content production, and only a few research efforts consider dynamic binding to resources and service components (e.g. [8]). The promising vision is that: (a) the adaptation should be autonomous and on-the-fly one, with no human intervention; (b) adapters should be capable of self-description; and (c) a pervasive support infrastructure should take the appropriate context-based adaptation decisions, without affecting the design and implementation of multimedia servers and client applications.

Content personalization is the ability to tailor the content to the user's preferences

as well as the context of usage. This type of personalization is a means of meeting the user's needs more effectively and efficiently by making interactions faster and easier. Furthermore, content personalization is closely related to knowledge management, data mining, and learning objects annotation and indexing.

User experience personalization will be effective when the users receive highly relevant content available exactly when they want – any type of media available at anytime and in the most efficient way.

This 'context awareness' is much more than location awareness alone, or merely the immediate situation.

A very important objective in the field of personalization is the development of a system that is aware of the user's situation. Such a system will interpret the contextual information in the light of preferences previously declared by the user or choices previously made to supply appropriate 'tagged and targeted content'.

A support service infrastructure should be able to properly aggregate data about the context, in order to distil a context view at the proper level of abstraction depending on who/what is in charge of taking decisions on the basis of that view. Sometimes, those context data should be migrated, possibly proactively, with the learner they apply to, depending on user movements during the service session [11].

5. Conclusions and future work. The further investigations in the above-discussed domain point to a wide variety of directions:

- To create of workable methods and tools, aiming to increase and generalize the visitor experience in the virtual museum. Moreover, creative user experiences will support the effective on-line learning through VMs.
- Contextual techniques for personalizing its experience in these platforms.
- To develop of new digital and transmedia storytelling solutions for learning purposes, creation of interactive virtual exhibitions, gaming and gamification, virtual worlds, live simulations, animations, interactive media previews.
- Multimodal interfaces and intelligent visualization of complex information relying on enhanced user experience and usability (incl. user-centric visualization and analytics, real-time adaptable and interactive visualization, real-time and collaborative 3D visualization, dynamic clustering of information, *etc.*), *etc.*

Moreover, the design and improvement of the learner' experience in the changing cases would not be restricted by the available technologies, platforms and tools. The field has great potential for innovations especially in our world of active imposition of e-devices, e-literacy, and e-content. The focus will be in the research and exploitation of new or emerging technologies (e.g. 3D, augmented and virtual reality, visual computing, smart world, environments and devices, media convergence, social media, *etc.*) for the development of innovative products, tools, applications, and services for creative digital content production, usage and management. The aims is to transform and customize the valuable parts of mankind's cultural and historical ancestry into digital assets, whose integration and reuse through research-lead methods has high commercial and non-commercial potential for learning and cultural institutions, tourism, creative and media industries.

REFERENCES

[1] P. Arapi, D. Paneva-Marinova, R. Pavlov, S. Christodoulakis. Techniques to Personalized Observation and Improved Learning Experience in Digital Libraries. Proceeding of the International Conference on e-Learning'16, September 2016, Bratislava, Slovakia, 2016, ISSN 2367-6698, 94–100.

[2] D. Paneva-Marinova, R. Pavlov. Improving Learner Experience within Educational Nooks in Digital Libraries. In:Learner Experience and Usability in Online Education (eds I. Bouchrika, N. Harrati, P. Vu), Hershey, PA, USA: IGI Global, 2018, 174–193.

[3] D. Paneva-Marinova, J. Stoikov, M. Goynov, D. Luchev, R. Pavlov, L. Pavlova. Intelligent Data Curation in Virtual Museum for Ancient History and Civilization. Digital Presentation and Preservation of Cultural and Scientific Heritage, Sofia, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, 2019, 131–144.

[4] L. Cronbach, R. Snow. Aptitudes and instructional methods: A handbook for research on interactions. New York, Irvington Publishers, 1997.

[5] Centre-Student-Development. `https://www.uwo.ca/sdc/learning/selfhelp/skill{\_}building{\_}handouts/PDFs/Memory{\%}20and{\%}20Thinking{\%}20Skills/Learning{\%}20Styles.pdf` Retrieved October 20, 2019

[6] P. Arapi, N. Moumoutzis, M. Mylonakis, G. Stylianakis, G. Theodorakis, S. Christodoulakis. Design, implementation and experimental evaluation of a pedagogy-driven framework to support personalised learning experiences. 2th LOGOS Workshop "Cross-Media and Personalised Learning Applications with Intelligent Content" in conj. with AIMSA2008 Conference, 2008, 7–25.

[7] E. Wagner. Steps to creating a content strategy for your organization. *The eLearning developers' journal*, (2002), 1–9, `www.elearningguild.com/pdf/2/102902mgt-h.pdf` (Retrieved October 20, 2019).

[8] D. Paneva. Ontology-based student modeling. Fourth CHIRON Open Workshop "Ubiquitous Learning Challenges: Design, Experiments and Context Aware Ubiquitous Learning", 2006, 17–21.

[9] J. Callan, A. Smeaton, M. Beaulieu, P. Borlund, P. Brusilovsky, M. Chalmers et al. Personalisation and recommender systems in digital libraries. 2003, `www.ercim.eu/publication/ws-proceedings/Delos-NSF/Personalisation.pdf` (Retrieved October 20, 2019).

[10] D. Paneva-Marinova, J. Stoikov, L. Pavlova, D. Luchev. System Architecture and Intelligent Data Curation of Virtual Museum for Ancient History. SPIIRAS Proceedings, **18**, *2* (2019), 444–470, doi:10.15622/sp.18.2.444-470.

[11] R. Pavlov, D. Paneva, N. Moumoutzis, P. Arapi, E. Ovcin, G. Morrone, Z. Markus. Analysis of innovative learning services in Web, interactive TV and mobile applications for non-formal settings. Sofia, Bulgaria, Demetra Ltd., 2007.

Detelin Luchev
e-mail: dml@math.bas.bg
Maxim Goynov
e-mail: goynov@gmail.com
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria

Lilia Pavlova
e-mail: pavlova.lilia@gmail.com
Laboratory of Telematics
Bulgarian Academy of Sciences
Acad. G. Bonchev Str., Block 8
1113 Sofia, Bulgaria

КЪМ ПЕРСОНАЛИЗИРАНО РАЗГЛЕЖДАНЕ НА СЪДЪРЖАНИЕТО ВЪВ ВИРТУАЛЕН МУЗЕЙ ЗА ДРЕВНА ИСТОРИЯ

Детелин Лучев, Лилия Павлова, Максим Гойнов

Дълго време културното наследство се е съхранявало в музеи, галерии, библиотеки и изследователски лаборатории, където не всеки е имал достъп до него. Дигиталните технологии, разработени през последните няколко години, дадоха нови решения за документиране, поддръжка и разпространение на огромни количества събран материал. Сред тези нови технологии са виртуалните музеи, които вече са доказали своята стойност като съвременно концептуално решение за достъп и атрактивно представяне на културни архиви. Тази статия има за цел да представи виртуалния музей като усъвършенствана система за управление на разнообразни колекции от цифрови обекти, които са организирани по различни начини чрез сложна специализирана функционалност. Тези системи обаче често страдат от липсата на инструменти за подобрено наблюдение на съдържанието и подобрен опит в образованието. В този контекст в настоящата статия са предложени някои решения за ефективно използване на виртуално музейно съдържание за учебни цели.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ABOUT OpenMP AND SOME COMBINATORIAL ALGORITHMS*

Maria Pashinska, Iliya Bouykliev

In the current work, we present Open Multi-Processing programming interface (Open MP) and its capabilities for programming parallel algorithms using CPU. We use an example to illustrate how parallelism is achieved. We examine the accomplished speed-up and present a way of using OpenMP for work with accelerators – an offload model of work.

Introduction. The invention and the mass usage of multi-core processors make parallel computing a viable and preferable option for many algorithms. One way to achieve parallelism using the traditional Central Processing Unit (CPU) is with OpenMP. In the current work, we present basic information about OpenMP and ways to use it for achieving parallelisation using CPU. Then we present an example of the way we have used it in our work for parallelising a computable "heavy" part of an algorithm for determining automorphism group and canonical form of a binary matrix. Here we also present experimental results. The last part of the current work presents information about using OpenMP and accelerators. According to the Avitohol supercomputer user's guide using OpenMP is the more practical way to work with the Intel Xeon Phi's accelerators.

1. OpenMP basics. OpenMP is an API (Application Programming Interface) that supports multi processing programming. It is available since 1997 and is firstly developed by IBM and Intel. In the following years more tech companies such as AMD and Nvidia are included in the project. OpenMP is based on the shared memory systems represented by multi-core CPUs. It is included in most C/C++ compilers (GCC, Clang, CCE, XL, etc) and Fortran (CCE, Flang, XL, etc) compilers and there is no additional software to be installed. Two things needed to use OpenMP are including the library and some compiler directives for achieving parallelisation. The following is the mandatory compiler directive used for OpenMP programming:

```
#pragma omp
```

*2020 **Mathematics Subject Classification:** 65Y05, 05E18.
Key words: parallel programming, OpenMP, accelerators.
The research of the second author was supported, in part, by a Bulgarian NSF contract DN02/2-13.12.2016. The research of the first author was supported, in part, by the Bulgarian Ministry of Education and Science by Grant No. DO1-221/03.12.2018 for NCHDC, a part of the Bulgarian National Roadmap on RIs.

The '-fopenmp' flag needs to be included for compiling in the IDE software application. It works on most operating systems and hardware. The main goal is OpenMP programs to be easy to write and to work on every system.

OpenMP works with the fork-joint model. At the start of the program there is only one working thread called *master*. This thread corresponds to one working CPU. When a parallel region (denoted by *#pragma omp parallel*) is reached we generate threads and every thread is given part of the work. Threads work on different CPU cores. Thus work is shared between the cores. We can explicitly tell how many threads to be generated according to what is needed in the algorithm. By default the number of threads is equals to the number of cores. Only the master thread remains at the end of the parallel region. Since we are using shared memory systems threads have access to all the variables declared in the program. There also can be declared private variables visible only by the owner thread. Private variables are destroyed at the end of the parallel regions. There are different ways of using OpenMP for parallel algorithms on the CPU. Here are shown three of the more popular ways:

- Functional parallelism – every thread executes different functions.
- Tasking – units of work are generated dynamically and may be generated and executed by different threads at runtime.
- For cycles – each cycle has a number of iterations. Each thread is assigned a number of iterations of the loop.

In the rest of the article we will only look at the for cycles because it is the most practical and popular type of parallelism in OpenMP. The key part here is the way loop iterations are divided by the threads. This is called *scheduling*. There are 3 types of scheduling – static, dynamic and guided.

- In the static scheduling threads get work in a round robin model. This means that when the iterations are assigned to the number of threads, every thread gets work according to its number. This is best to be used when the amount of the work is the same for each thread. You can explicitly tell how many iterations a thread to get at a time if needed in the algorithm – this is called *chunk size*. The following table shows the difference between this type of division and the default one.

Number of iterations = 1 000 000				
	Thread 1	Thread 2	Thread 3	Thread 4
static (default)	[0, 249 999]	[250 000, 499 999]	[500 000, 749 999]	[750 000, 999 999]
static, chunk = 1	0, 4, 8, ..., 999 996	1, 5, 9, ..., 999 997	2, 6, 10, ..., 999 998	3, 7, 11, ..., 999 999

- In the dynamic scheduling each thread gets work as it is generated. You can again specify a chunk size. After that the next chunk of iterations is given to the thread that finishes first.
- The guided type of scheduling is a combination of the static and the dynamic ones. Here the work is given at runtime. However chunk size is equal to the number of loops divided by the number of threads. The number of iterations left after the initial divide is again divided by the number of threads. Thus chunk size decreases to better handle load imbalance between iterations.

2. Calculation of pseudo-orbits. Here we present an algorithm used to partition the set of columns of the matrix into subsets containing one or more orbits with respect to automorphism group of the matrix. These subsets are called *pseudo-orbits*. We use this to determine automorphism groups and canonical forms of symmetrical and pseudo-symmetrical structures (Hadamard matrices and combinatorial designs). The concept of pseudo orbits, invariants and how they are used for calculating canonical forms and determining automorphism groups can be found in [4].

Let us consider the following problem:

We have a square binary matrix M_{nxn}. Our task is to calculate an n-dimensional vector A using the given algorithm – for every three different columns i_1 i_2 i_3 we calculate b using the elements of the matrix in the following formula:

$$b(i_1, i_2, i_3) = \sum_{j=1}^{n} (m_{ji_1} + m_{ji_2} + m_{ji_3})^2.$$

For vector A we accumulate $a_i = a_i + b$, where $i = i_1, i_2, i_3$.

The traditional realization of this problem has n^4 iterations. It uses 3 loops for generating i_1, i_2, i_3 and one loop to pass through all rows in the matrix for every different combination. The total number of iterations is $(n * C_3^n)$. There are a few things that we need to consider when trying to parallelise this algorithm. Firstly, OpenMP gives the opportunity to collapse perfectly nested loops (of which we have 3) into one linear loop using *#pragma omp parallel for collapse(it)*, where the variable *it* is the number of the nested loops. The following table shows in practice how this is done. Here k represents the iterations of the linear loop and x is the total number of iterations of j.

$i \in [0,2]$ and $j \in [0,3]$				
	Thread 1	Thread 2	Thread 3	Thread 4
(i, j)	(0,0); (0,1); (0,2)	(0,3); (1,0); (1,1)	(1,2); (1,3); (2,0)	(2,1); (2,2); (2,3)
$k = i * x + j$	0, 1, 2	3, 4, 5	6, 7, 8	9, 10, 11

As seen from the table above the total number of iterations must be known before the runtime.This is why using the *collapse* option is not applicable in our case. A more important thing that needs to be considered is the memory access. When using CPU and OpenMP the threads have access to everything in the memory. It turns out that when two threads attempt to read from the same memory there are no issues. However, when more than one thread attempts to write in the shared memory at the same time the result cannot be predicted. This is called *data racing*. This issue can be resolved with the *#pragma omp critical* – only one thread can execute the critical region at a time. This means that a thread reaches critical section it has to wait its turn to write in the shared memory. This is called a *barrier* and significantly slows down the execution. The following is an example of implementing the algorithm with OpenMP and *critical* section.

```
#pragma omp parallel for private (temp) schedule (dynamic)
for (int i=0; i<n-3; i++){
  for (int j=i + 1; j<n–2; j++){
    for (int k=j+1; k<n–1; k++){
```

```
temp = 0;
for(int row = 0; row < n; row++){
int b = mat [row] [i] + mat [row] [j] + mat [row] [k];
temp = temp + b*b;
}
#pragma omp critical {
a [i] = a [i] + temp;
a [j] = a [j] + temp;
a [k] = a [k] + temp;
}}}}
```

To avoid the critical section that slows down the execution we transform the vector to a matrix where the number of columns equals the number of threads (int a [n] [24]). Every thread has id which we can access with the function *omp_get_thread_num()*. This returns an integer – the number of the thread. Thus every thread writes in its own column and the conflict is avoided. After the parallel portion of the program is executed we need to combine the results of all threads. For every row of the result we summarize the columns into the first (0) column of the resulted matrix. This only takes $n * (\textit{thread count})$ and does not result in a significant slowdown.

Another way to achieve parallelism is when you have to apply this algorithm for many matrices. The idea for every thread to get one matrix. In this implementation the time for calculation depends only on the dimensions of the matrices. This implementation is best to apply when the input includes many matrices of the same size. The elapsed time remains constant and is equal to the time needed for sequential realization where the input is one matrix. It does not depend on the number of the matrices if enough threads are available.

We have tested the program on a Linux machine with Intel Xeon processor where the total number of threads is 24. With the second version (no critical clause) we achieve speedup between 2 and 10 times with both gcc and clang compilers. This difference is due to the amount of work for each thread – for small matrices (40×40) the total number of operations is approximately $37^3 * 40$. The first 24 iterations of the first loop will be spread across the threads of the CPU. The thread that cares for $i = 0$ will do approximately $37^2 * 40$ operations and the thread that cares for $i = 23$ will do approximately $14^2 * 40$. It is obvious that the operations cannot be divided symmetrically amongst the threads for this particular matrix. However, for 200×200 matrix the total number of iterations is over 10^9 and after initial division of the iterations there will still be a large number of operations to be divided amongst the threads. In [3] the achieved speedup for matrix multiplication using OpenMP and CPU with 24 cores is only 8 times compared the sequential realization.

As you can see in the following table there is no difference in the speedup for the different compilers – both clang and gcc achieve the same speedup. However, the clang compiler gives better results in general for both sequential and parallel versions. Both here and in [3] the speedup stays constant for bigger matrices.

3. Using OpenMP with accelerators. Another important feature of OpenMP is the ability to program heterogeneous systems. A computer system is heterogeneous when it has different types of devices – one host which is the traditional CPU and one

Matrices dim.		40	60	80	100	120	140	160	200
gcc	s	$0.220s$	$0.170s$	$0.768s$	$2.434s$	$6.244s$	$14.313s$	$31.972s$	$95.401s$
	p	$0.014s$	$0.056s$	$0.152s$	$0.470s$	$1.040s$	$2.231s$	$3.858s$	$10.644s$
clang	s	$0.018s$	$0.150s$	$0.674s$	$2.151s$	$5.533s$	$12.869s$	$27.402s$	$89.641s$
	p	$0.009s$	$0.053s$	$0.165s$	$0.440s$	$0.964s$	$1.708s$	$3.178s$	$8.891s$

or more accelerators (computational unit with different structure). There are two different types of accelerators – GPU (graphics processing unit) and MIC (many integrated cores). The Avitohol system has Intel's Xeon Phi accelerators that are easily used with offload model of work. The intention here is to offload computationally heavy part of the program to the accelerator. In OpenMP this is achieved with *#pragma omp target teams*. We implemented the offload model of work with Nvidia Titan Pascal GPU. To accomplish this you need to install additional compiler and libraries. For Nvidia GPUs Cuda is also mandatory. The two compilers, the libraries and the Cuda platform need to be linked in the environment that is used for writing the code and this action is different for the different operating systems. Our results show that OpenMP has limitations when using Nvidia GPUs. Since OpenMP is developed to work on many system the control over the GPU's memory access and thread count is limited or non-existent. There are many researches that compare OpenMP offload model working with GPU with other programming models for GPUs. Comparisons between different implementations of parallel algorithms on CPU and GPU using both OpenMP and CUDA can be found in [1], [2], [3]. The conclusion based on our experience, these and other sources is that for programming GPU it is best to use different platform (OpenCL, Cuda, etc).

4. Conclusion. OpenMP gives easy to implement way for parallel programming. It works on many operating systems and different hardware. The achieved speedup is highly dependant on the algorithm that is to be implemented, the hardware and the division of the work amongst the threads. Different types of accelerators can be used with OpenMP. However, the GPU gives significantly better results when it is programmed with platforms, more specified for the architecture.

REFERENCES

[1] A. Hayashi, J. Shirako, E. Tiotto, R. Ho, V. Sarkar. Performance evaluation of OpenMP's target construct on GPUs. International Journal of High Performance Computing and Networking, **13**, *1* (2019), 54–69.

[2] J. Larkin. OpenMP on GPUs, First Experiences and Best Practices, GPU technology conference, 2018.

[3] K. Thouti, S. R. Sathe. Comparison of OpenMP & OpenCL Parallel Processing Technologies. International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA), **3**, *4* (2012), 56–61.

[4] М. Джумалиева-Стоева. Алгоритми за изследване на комбинаторни структури, Докторска дисертация, София, 2015.

Maria Pashinska
e-mail: mariqpashinska@math.bas.bg
Iliya Bouyukliev
e-mail: iliyab@math.bas.bg
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
P. O. Box 323
Veliko Tarnovo, Bulgaria

ИЗПОЛЗВАНЕ НА OpenMP В НЯКОИ КОМБИНАТОРНИ АЛГОРИТМИ

Мария Пашинска, Илия Буюклиев

В тази статия е представено как приложният програмен интерфейс OpenMP може да се използва за разпаралелване на работата на някои алгоритми, като се използва централният процесор. Разгледан е конкретен пример, чрез който са показани някои от особеностите на OpenMP. Оценено е полученото ускорение и е представен начинът на използване на OpenMP за работа с ускорители.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ON THE EXTENSION OF A PARTIAL SOLUTION OF d SPREADS TO A PARALLELISM*

Stela Zhelezova

A parallel algorithm for enumeration of parallelisms invariant under a predefined automorphism group is proposed. It is a parallelization of the sequential exhausted backtrack search algorithm used in [20]. The algorithm is implemented using MPI and the C++ language. It is applied for the construction of some of the parallelisms of $PG(3,4)$ possessing an automorphism group of order 2.

1. Introduction. For the basic concepts and notations concerning spreads and parallelisms of projective spaces, refer, for instance, to [8], [9] or [15].

A *t-spread* in $PG(n,q)$ is a set of distinct t-dimensional subspaces which partition the point set. A *t-parallelism* is a partition of the set of t-dimensional subspaces by t-spreads. Usually 1-spreads (1-parallelisms) are called *line spreads* (line parallelisms) or just *spreads* (parallelisms). There can be line spreads and parallelisms if n is odd.

Two parallelisms are *isomorphic* if there exists an automorphism of the projective space which maps each spread of the first parallelism to a spread of the second one.

A subgroup of the automorphism group of the projective space which maps each spread of the parallelism to a spread of the same parallelism is called *automorphism group* of the parallelism. Assuming non-trivial automorphisms is a popular approach, because the search space is reduced since the object must be a union of complete orbits of the predefined group.

The classification problem for parallelisms is the problem of determining a set of representatives for the isomorphism classes of parallelisms with definite parameters. To construct parallelisms with respect to specific additional conditions usually a backtrack search is used. Generally speaking this is a tree search problem. An internal node corresponds to a partial solution (with d spreads if the level of the node is d) and a leaf corresponds to an entire parallelism. An algorithm for the extension of a partial solution of d spreads has to explore the entire tree starting from the level d, so as to enumerate all parallelisms corresponding to the leaves.

Recently multi-processor systems have become popular. The parallelisms classification problem is well suited for a parallel computation. The extension of a partial solution to a complete solution for parallelism with given parameters can be done simultaneously

*2020 Mathematics Subject Classification: 05B25, 05B40, 05E20.
Key words: Projective space; parallelism; automorphism; parallel algorithm.
We acknowledge the provided access to the e-infrastructure of the NCHDC – part of the Bulgarian National Roadmap on RIs, with the financial support by the Grant No D01-221/03.12.2018.

on different processing devices. Development of parallel algorithms for solving combinatorial problems is of theoretical and practical significance.

Our goal is to speedup a given algorithm for combinatorial parallelisms classification by using a particular strategy of parallelization in order to achieve classification for a wider range of parameters.

There are general constructions of parallelisms. In $PG(n,2)$ they are known due to Zaicev, Zinoviev and Semakov [22] and independently by Baker [1], and in $PG(2^i-1,q)$ by Beutelspacher [6]. For all $i \geq 2$ the case $i = 2$ was proved independently by Denniston [7]. There are two infinite families of regular cyclic parallelisms in $PG(3,q)$ for $q \equiv 2(mod\ 3)$ by Penttila and Williams [12].

All parallelisms of $PG(3,2)$ are known. All parallelisms of $PG(3,3)$ were recently classified by Betten [2]. To obtain all parallelisms in other projective spaces is currently impossible. There are many classification results which rely on an assumed group of symmetries. In $PG(3,5)$ the cyclic parallelisms are classified in [13], the regular parallelisms with automorphisms of order 3 – in [19] and the parallelisms with automorphisms of order 13 – in [21].

By now $PG(3,q)$ are the most studied projective spaces and among them $PG(3,4)$ is the smallest space whose parallelisms are not classified. Parallelisms of $PG(3,4)$ have been subject of different computer-aided constructions supposing some automorphisms. All automorphisms of odd prime orders have been considered – of orders 7 [17] and 3 [20] by Topalova and Zhelezova, and 5 [18] by Topalova and Zhelezova, and independently [3] by Betten.

Some of the parallelisms with automorphisms of order 2 have been classified too, namely those which are invariant under the Baer involution [4] and the cyclic groups of order 4 [5]. The problem of the classification of the remaining parallelisms with automorphisms of order 2 is still open. We seek for approaches that will improve the given algorithms for classification of parallelisms of projective spaces possessing a particular automorphism group. One such possibility is to make algorithms faster using parallelization.

Parallel algorithms for backtrack search have been studied intensively, and in particular most of them balance the load of node explorations among the available processors [14]. Algorithms in [11] and [23] parallelize sequential backtrack search performing depth-first explorations of sub-trees locally at each processor. In [10] a deterministic algorithms for backtrack search is given which runs on an n-node mesh. In this paper we use a simple strategy to speedup a backtrack search algorithm for extending to a parallelism of a partial solution of d spreads using the work pool parallel model.

2. Sequential algorithm. Let's consider $PG(3,q)$ with $(q^4-1)/(q-1)$ points and $(q^2+1)(q^2+q+1)$ lines. There are q^2+1 lines in a spread and q^2+q+1 spreads in a parallelism. We use the method described in [20] to construct the nonisomorphic parallelisms with definite parameters invariant under a particular automorphism group.

At first the action of the chosen automorphism group on the lines of the projective space is examined. Next all the possible spread orbits are constructed in advance, and then a backtrack search is applied on them. Isomorphism testing is applied at several stages within the search. For this purpose the normalizer of the considered automorphism group is used as explained in [16].

3. Parallelization strategy. The problem under consideration has to be divided into sub-problems. If the sub-problems have a data dependence among them, a communication between the processors is needed. It can happen that the communication is more expensive than the computation itself (this depends on the particular hardware too). Splitting algorithms across many processes may result in a communication cost that causes the program to run slower than it runs in serial. So we try to divide the problem into sub-problems in such a way that there is no data dependency among them, and thus the processors do not need to communicate with each other.

For the parallel algorithm being proposed the work pool model (Fig. 1) is used.

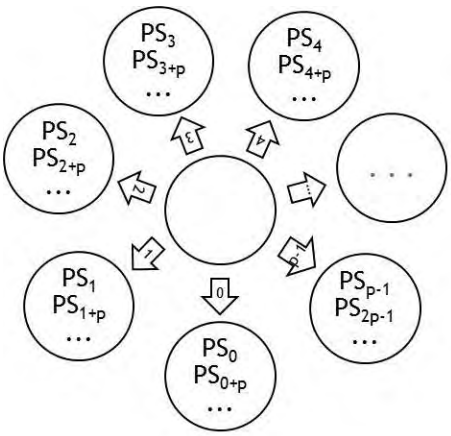


Fig. 1. A model of extension of the partial solutions

There is some additional information needed for the proper work of the algorithm, such as line and spread orbits under the action of the considered group. At first this information is read by each process. The partial solutions are enumerated and saved in advance. Next the different partial solutions are consequently assigned to different processes for balancing the load. Let p be the number of processes and m – the number of partial solutions to extend. Each process reads all partial solutions, but tries to extend only m/p of them. Distributing the work as shown in Fig. 1, the process with rank 0 will extend partial solutions with indices $0, p, 2p, \ldots$ and so on. The load-balancing depends on whether m/p is an integer, or not. If it is not, then different processes might extend a different number of partial solutions. A bigger source of imbalance, however, is the fact that different partial solutions may need a different time to be processed. After a parallelism is constructed the process writes it in its own file. At the end p files are obtained and have to be combined.

4. Some experimental results. To study the behavior of the implemented parallel algorithm we consider the construction of parallelisms of $PG(3,4)$ invariant under an automorphism group of order 2. In $PG(3,4)$ there are 85 points and 357 lines, 17 mutually disjoint lines are needed to obtain a spread, and 21 spreads make a parallelism.

We have all spreads of the projective space constructed in lexicographic order. As it is shown in [5] the Sylow subgroup of order 2 of the full automorphism group of $PG(3,4)$ has three conjugacy classes of elements of order 2. We consider an automorphism group

Table 1. Dependence of the execution time on the number of processes

p	time (sec.)	ratio
1	12284	–
4	5057	2.43
8	2573	4.77
16	1952	6.29

of order 2 which fixes 5 points and 21 lines and partitions the remaining lines in 168 orbits of length 2 ($G_{2_{21}}$). Since there are fixed lines, there must be fixed spreads too. So with respect to the action of $G_{2_{21}}$ on spreads we obtain two types of spread orbits. A spread orbit of length 1 (fixed spread) is made of some fixed lines and several whole line orbits. A spread orbit of length 2 consists of spread lines from 17 different line orbits (under $G_{2_{21}}$).

As initial data for our algorithm we construct by the sequential algorithm the first 32 partial solutions of $d = 6$ spreads in the chosen lexicographic order. They include five fixed spreads and a spread orbit of length 2. We need the line and spread orbits under $G_{2_{21}}$ too. The extension of these partial solutions by the two algorithms (sequential and parallel) lead to 80 parallelisms of $PG(3, 4)$ invariant under $G_{2_{21}}$. The comparison of the algorithm work time depending on the number of the involved processes is given in the Table 1. The results are obtained on high-performance computing system Avitohol (`http://nchdc.acad.bg/en/resources/iict/avitohol/`) which has Intel Xeon E5-2650 v2 2.6 GHz processors. The obtained data show that the considered algorithm for the extension of a partial solution of d spreads to a parallelism achieves a very good scalability.

REFERENCES

[1] R. Baker. Partitioning the planes of $AG_{2m}(2)$ into 2-designs. *Discrete Math*, **15** (1976), 205–211.

[2] A. Betten. The packings of $PG(3, 3)$. Des. Codes Cryptogr., **79**, *3* (2016), 583–595.

[3] A. Betten. Spreads and Packings – an Update. Booklet of Combinatorics 2016, Maratea (PZ), Italy, 29th May–5th June, 2016, 45.

[4] A. Betten, S. Topalova, S. Zhelezova. Parallelisms of $PG(3, 4)$ invariant under a Baer involution. Proceedings of the 16th International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Svetlogorsk, Russia, 2018, 57–61.

[5] A. Betten, S. Topalova, S. Zhelezova. Parallelisms of $PG(3, 4)$ invariant under cyclic groups of order 4. In: Algebraic Informatics. CAI 2019. (eds M. Ciric, M. Droste, J. E. Pin) Lecture Notes in Computer Science, vol. **11545**, 2019, 88–99.

[6] A. Beutelspacher. On parallelisms in finite projective spaces. *Geometriae Dedicata*, **3**, *1* (1974), 35–45.

[7] R. Denniston. Packings of $PG(3, q)$. *Finite Geometric Structures and Their Applications*, Edizioni Cremonese, Rome, (1973) 193–199.

[8] J. Eisfeld, L. Storme. (Partial) t-spreads and minimal t-covers in finite projective spaces. Lecture notes from the Socrates Intensive Course on Finite Geometry and its Applications, Ghent, April 2000.

[9] N. Johnson. Combinatorics of Spreads and Parallelisms. Iowa City, CRC Press, 2010.
[10] C. Kaklamanis, G. Persiano. Branch-and-bound and backtrack search on mesh-connected arrays of processors. *Theory of Computing Systems*, **27** (1994), 471–489.
[11] K. Richard, Y. Zhang. Randomized Parallel Algorithms for Backtrack Search and Branch-and-Bound Computation. *Journal of the ACM*, **40**, *3* (1993), 765–789.
[12] T. Penttila and B. Williams, Regular packings of PG(3,q), *European Journal of Combinatorics* 19 (6) (1998) 713–720.
[13] A. Prince. The cyclic parallelisms of $PG(3,5)$. *European Journal of Combinatorics*, **19**, *5* (1998), 613–616.
[14] P. Sanders. Better algorithms for parallel backtracking. In: LNCS (eds A. Ferreira, J. D. P. Rolim), vol. **980**, 1995, 333–347
[15] L. Storme. Finite Geometry. In: The CRC Handbook of Combinatorial Designs, CRC Press, second edition, 2006, 702–729.
[16] S. Topalova. Conjugates for finding the automorphism group and isomorphism of design resolutions. *Serdica Journal of Computing*, **10**, *1* (2016), 79–92.
[17] S. Topalova, S. Zhelezova. On transitive parallelisms of $PG(3,4)$. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, **24**, *3–4* (2013), 159–164.
[18] S. Topalova, S. Zhelezova. On point-transitive and transitive deficiency one parallelisms of $PG(3,4)$. *Designs, Codes and Cryptography*, **75**, *1* (2015), 9–19.
[19] S. Topalova, S. Zhelezova. New Regular Parallelisms of $PG(3,5)$. *Journal of Combinatorial Designs*, **24** (2016), 473–482.
[20] S. Topalova, S. Zhelezova. New parallelisms of $PG(3,4)$. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **57** (2017), 193–198.
[21] S. Topalova, S. Zhelezova. Types of spreads and duality of the parallelisms of $PG(3,5)$ with automorphisms of order 13. *Designs, Codes and Cryptography*, **87** (2019), 2–3.
[22] G. Zaicev, V. Zinoviev, N. Semakov. Interrelation of Preparata and Hamming codes and extension of Hamming codes to new double-errorcorrecting codes. Proc. of Second Intern. Symp. on Information Theory, (Armenia, USSR, 1971), Budapest, Academiai Kiado, 1973, 257–263.
[23] Y. Zhang. Parallel Algorithms for Combinatorial Search Problems. EECS Department, University of California, Berkeley Technical Report No. UCB/CSD-89-543, 1989.

Stela Zhelezova
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
p.o.box 323, 5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria
e-mail: stela@math.bas.bg

РАЗШИРЯВАНЕ НА ЧАСТИЧНО РЕШЕНИЕ ОТ d СПРЕДА ДО ПАРАЛЕЛИЗЪМ

Стела Железова

Предложен е паралелен алгоритъм за построяване на паралелизми, инвариантни спрямо предварително зададена група от автоморфизми. Той представлява паралелизация на последователния алгоритъм за търсене с връщане, използван в New parallelisms of $PG(3,4)$ (от Топалова и Железова, в Electronic Notes in Discrete Mathematics, **57**, (2017) 193–198). Алгоритъмът е реализиран с помощта на MPI и езика C++. В статията е тествана работата му при използване на различен брой процеси и при конструиране на някои паралелизми на $PG(3,4)$, притежаващи група от автоморфизми от ред 2.

СЕКЦИЯ В: ОБРАЗОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

SECTION C: EDUCATION IN MATHEMATICS AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

TEACHING CATEGORY THEORY TO UNDERGRADUATES

Alexander Ganchev

With this short note I would like to promote a discussion on the teaching of category theory to undergraduate students and share my experience. I will argue that it is due time to introduce category theory in the undergraduate mathematics curriculum as an elective course.

1. Introduction. Mathematics is one of the most conservative disciplines and for a good reason. The proof of Hippasus[1] that $\sqrt{2}$ is irrational 2500 years ago is still valid and will be valid 'until the end of the Universe'. Thus, mathematics operates on grand scales and many mathematicians will be reluctant to include the category theory, which was born 74 years ago in the undergraduate mathematical curriculum. I will try to argue that it is time to overcome this reluctance.

In order to make my point I will recall very briefly the story of Linear Algebra. From the two millennia old Chinese text *Nine Chapters of Mathematical Art*, through the work of Leibnitz, Gauss, and many more, what constitutes now Linear Algebra was a scattered collection of results. It was put in a form that is close to what we know today in the book of G. Peano in 1888 following the work of H. Grassmann. It was not till the 50's and 60's of 20th century that Linear Algebra entered the undergraduate math curricula in the USA. It is well known that W. Heisenberg in 1925 when he invented Quantum Mechanics was surprised to find that he needed a non commutative operation and it was M. Born and P. Jordan who told him that he was doing matrix multiplication. At present Linear Algebra together with Calculus forms the groundwork of any mathematics curriculum. The reason is that both are not only mathematically important but have vast applications.

Category theory was born in 1945 and the first textbooks appeared in the late 60's and early 70's (some of the early textbooks are [6, 39, 45, 8, 32, 2, 22]) while the journal Cahiers[2] devoted to category theory was founded in 1958 by C. Ehresmann, a student of E. Cartan. Fifty years have past. The pace of time is accelerating so the period 1971–2019 in fact is much longer than the period 1888–1960. Why category theory is considered as too abstract, not relevant for applications, even harmful for young people, absurd to enter the curriculum on an equal par with linear algebra? There are subjective, purely human hate-love attitudes[3] to category theory similar to the attitudes towards Grothendieck,

[1] The legend attributes the proof to Hippasus of Metapontum, around 520 BC. He was a member of the Pythagorean school. The legend says that he lost his life for this discovery.

[2] *Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques* `http://cahierstgdc.com/`.

[3] See the discussion 'unpopularity of category theory' `https://nforum.ncatlab.org/discussion/1927`. The fact that the excellent journal 'Theory and Applications of Categoreis' is in practice ignored by the AMS is commented in the n-Lab entry about TAC.

the greatest mathematician of all times for some or an evil genius for others, who had big impact on the development of category theory in the 60's to the 80's. Another reason why it is taking category theory much longer than linear algebra to enter the curriculum is that category theory is doing a paradigm shift in mathematics and such shifts never go smoothly. Set theory also took a while to catch on but all of us today are brought up with a set theoretic mind set. Yes, set theory provides a very economical means based only on one relation 'is-an-element-of' but the shift of emphasis to functions/morphisms/arrows and category theory equips us from the start with a structural approach and most of mathematics is the study of structures. Another reason is that even though the impact of category theory on pure mathematics is momentous this is not the case for areas of mathematics such as differential equations, optimization theory, industrial and engineering mathematics (with the exception of computer science) while in all of these areas linear algebra is crucial. A lively discussion "categories-first-or-categories-last-in-basic-algebra" related to this note can be found at `https://mathoverflow.net/questions/41057/`. One of the arguments against teaching category theory early is that one needs examples from all of pure mathematics (as in the book of MacLane) thus first learn all of (pure) mathematics and then study category theory. But this is absurd – the very fact that category theory permeates and forces us to rethink all of (pure) mathematics, which is a great feature, is used against the teaching of category theory. Because linear algebra is applied in functional analysis should we study first functional analysis and only then linear algebra? The question is absurd but isn't the previous argument absurd too? The definition of a category is simpler than the definition of a vector space hence developing categories axiomatically is not more difficult then developing vector spaces axiomatically. (An intuition for vectors comes from physics but how many of todays math students have a good command of physics?)

I will give a lightning overview of the history of category theory and its application, followed by resources and ways of teaching it, and end with a conclusion.

2. Very short and incomplete history of category theory. Category Theory originated in 1945 with the publication [15] by Sanders Mac Lane and Samuel Eilenberg. The notion of 'adjoint functors', accepted as the most important mathematical notion coming from category theory, one on an equal footing with 'continuous function', was introduced in 1958 by Daniel Kan [25]. In the same year Kan introduced the concept of (co)limit. Category theory was born because of the needs of algebraic topology and homological algebra, thus it is not surprising that the first major development of category theory was the theory of abelian categories by A. Grothendieck and his school in the 1950's. Grothendieck reworked all of algebraic geometry in the 50's and 60's in the language of category theory. Another major development of the 60's and 70's is topos theory. Topoi were introduced by Grothendieck, coming from geometry and topology, and by W. Lawvere, coming from set theory, logic, and foundations of mathematics. In 1963 MacLane introduced monoidal categories – the categories with the biggest potential in applied mathematics. In the 70's P. May introduced operads as a generalization of the work on A_∞ algebras by J. Stasheff in the 60's. In the 80's and 90's and further one sees a flurry of activity in higher category theory and categorification (from Grothendieck's "Pursuing stacks" and the homotopy hypothesis, through the Baez-Dolan hypothesis, to Khovanov's categorification of knot polynomials and Lurie's higher topoi, etc). For much more see the Wikipedia article "Timeline of category theory and related mathematics".

Besides the development of category theory itself category theory has become the language of most of contemporary mathematics. Algebraic topology is the study of functors from topological to algebraic categories. Some fundamental dualities such as Gelfand duality or Stone duality are best expressed in categorical language as equivalence of appropriate categories. Some important developments that cannot even be formulated without category theory are for example, Morita equivalence, quantum groups (Drinfeld et al.), deformation quantization and mirror symmetry (Kontsevich), topological quantum field field theories [50] (Segal, Atiyah 1988, Witten 1980's). Studying representations of groups in isolation is not much use while from the category of representations one can reconstruct the group (Tannaka-Krein reconstruction). Sheaf theory has practically merged with category theory. In the late 2010's S. Awodey and coworkers and V. Voevodski independently have introduced Homotopy Type Theory as a new foundation for mathematics.

3. Applied category theory. Many of the applications of category theory to physics could be viewed also as development of pure mathematics, thus besides the already mentioned quantum groups, deformation quantization, and topological field theory, one should not miss the Doplicher-Roberts reconstruction theorem in algebraic quantum theory, braid statistics in 2-dimensional conformal field theory and braided tensor categories, the Fuchs-Runkel-Schweigert theorem on rational 2d conformal field theory.

The development in categorical quantum mechanics initiated by S. Abramsky and B. Coecke has evolved to a very active area of research (e.g. the book of Coecke and Kissinger [13] and the very recent one of Heunen and Vicary [21]). Contextuality is one of the most important quantum properties, probably the main reason for the exponential speedup of quantum computers. The work of Abramsky and coworkers on a sheaf theoretic interpretation of contextuality in quantum mechanics is very promising. Motivated by the Kochen-Specker theorem (a manifestation of contextuality) the topos approach to quantum mechanics was developed by Isham-Butterfield-Doering and Heunen-Landsman-Spitters (e.g., [29]). A different category theory based approach to the foundation of quantum mechanics and quantum logic is effectus theory developed by B. Jacobs and coworkers [11].

The pioneer in the application of category theory to biology is R. Rosen [41, 44]. His ideas have been continued by A. Cornish-Bowden, T. Haruna, Y. Gunji, J.-C. Letelier, A.H. Louie, T. Nomura, etc. A recent categorical language for genetics is developed in [49]. The book [20] gives a categorical view on neurobiology. A categorical approach to cognition and neuroscience is being developed by S. Phillips and W. H. Willson. The collection of works of A. Ehresmann and P. Vanbremeersch, e.g., [14] deserves a special mention. They view live, neurobiology, and cognition as hierarchical categories evolving via functorial dynamics. The colimits[4] play a key role in their approach.

The works on applications of category theory to (theoretical) computer science are so many that even a long overview cannot do them justice. One can say that category theory is becoming the main mathematical tool in computer science. The observation that Cartesian closed categories provide a semantics for the simply typed lambda calculus is a key result of J. Lambek [27]. Thus no wonder that a functional programming language such as Haskel from its conception relies crucially on notions and results of category

[4]The colimits are the categorical way to build by 'gluing' more complex structures from simpler ones.

theory. In particular, following the very influential paper of E. Moggi [37] the nontrivial categorical notion of a monad takes a prominent role in Haskel. I will only mention a few textbooks [4, 17, 36, 40, 51]. Haskel code and an ordinary text take turns in the very popular blog-style lecture series on category theory by B. Milewski (the book [36] is a byproduct). Programming languages are only one example of synergy between computer science and category theory but there are many others. For instance, monoidal categories give a language for concurrency [38]. Category theory provides a unified formalism for data bases (e.g., see works of D. Spivak). In bidirectional transformations, e.g., synchronization of databases, lenses and more generally optics play a prominent role [43]. Categorical coalgebras are central for the development of the calculus of infinite structures, e.g. streams, [23].

Philosophy and category theory go very well along: in some of his papers Lawvere starts with a philosophical motivation, Awodey is at the Philosophy Department of CMU, Corfield (one of the founders of n-category-cafe) is a philosopher. A few recent books on the subject are [26, 34, 28]. There is a growing body of work on linguistics and monoidal categories associated with the names of B. Coecke, M. Sadrzadeh, etc. One should not miss the four volumes of G. Mazzola on the Topos for Music [35].

An important development in the last decade which, will bring category theory into engineering, learning, and economic applications, is the study of open 'things' (networks, dynamical systems, games, learning, etc.). Driving forces in this are Baez and his coworkers, Spivak, Fong, Hedges, etc. Some examples of this can be seen in the recent book [18][5].

The categorical approach to probability theory started, as so many other things, by Lawvere with his 1962 secretive manuscript[6] where one finds the origins of the Giry monad [19]. Independently a categorical approach to statistics was developed by N. N. Cencov [10]. Recently such developments have been carried by P. Panangaden, E. E. Doberkat, B. Fong, B. Jacobs, K. Sturtz, A. Sokolova, T. Avery, K. Adachi, Y. Ryu, F. Dahlqvist, V. Danos, I. Garnier, T. Fritz, etc.

One of the last bastions of mathematics resisting the advances of category theory are differential and integral calculus, optimization, differential equations. These are subjects of major importance for applications and applied mathematics constitutes the bulk of publications, financing, and people in mathematics. Hence, no wonder that the sentiments against category theory are popular in math departments. Things are changing here also. An example of such developments on the side of pure mathematics is the 'universal property of the unit interval' due to P. Freyd and Leinster ([42]). In applied and computational mathematics automatic differentiation plays a key role.[7] The recent papers of C. Elliott [16] gives a categorical account of automatic differentiation. A different, but again related to differentiation, development by R. F. Blute, R. Cockett,

[5]Some of most recent developments can be followed in conferences on Applied Category Theory (see the home page of Baez) or the Symposium on Compositional Structures SYCO 1-5 http://events.cs.bham.ac.uk/syco/strings3-syco5/. In particular, note the talk of D. Ghica "Teaching category theory in primary school". This is a nice experiment but I am not advocating it.

[6]Now available at https://ncatlab.org/nlab/files/lawvereprobability1962.pdf

[7]In machine learning and deep networks the key algorithm is backpropagation which is based on a reverse mode automatic differentiation.

G. S. H. Cruttwell, J. S. P. Lemay, R. A. G. Seely, etc., gives a categorical semantics of differential lambda calculus (e.g., [12]).

4. Resources for teaching category theory. In chronological order first comes the list of textbooks from the 1970's [6, 39, 45, 8, 32, 2, 22] of which one should single out MacLanes text – the 'bible' of category theory. The three volumes of Borceux [7] cover more than MacLane but are what the title says – a 'handbook' not a textbook. Again from the 1990's one has the textbooks on category theory and computer science such as [4, 51, 40] which could also be used as a main text or as a supplementary material. In the last decade several excellent texts appeared [3, 46, 31, 42] and to this list I will add the future book by P. Smith available in almost final form from `https://www.logicmatters.net/categories/`. The book [48] provides a much needed recent addition of an introductory textbook aimed at students with little mathematical background while [18] gives further examples of recent applications of category theory in the sciences.

The book [30] deserves a special mention. W. Lawvere (one of the driving forces in categry theory) and S. Schanuel taught a course on category theory to high school students and the book is the delightful result of this course. A book on the subject addressing the general public is [9] based on the understanding that (monoidal) categories are ubiquitous because processes are ubiquitous and an example of a composing process in time and space is cooking. A big advocate of monoidal categories as describing processes is B. Coecke (the book [13] has the ambition to introduce quantum theory with a graphical language (string diagrams for dagger categories) that should be accessible to a very large audience).

A very nice example of the way category theory starts to enter into standard undergraduate courses is the 2009 book of P. Aluffi with the provokative title *Algebra: Chapter 0* [1]. This is a textbook intended to cover the material of a first course in abstract algebra where in parallel are introduced also the relevant categorical concepts. As such it can be used also to teach/study category theory.

I will mention quickly the electronic resources for category theory that one can use in a course. The *Wikipedia* though controversial and uneven has plenty of very well written articles on category theory. The main venue for discussing category related topics (and not only) is the *n-category cafe*. It started as a community blog of J. Baez, U. Schreiber, and D. Corfield and now has ten hosts. Baez's Azimuth project contains plenty of stuff on category theory related to 'real applications' like networks or control. A very important side product of the 'cafe' is the wiki 'nLab' devoted to all aspects of category theory and its applications in physics and computer science. The articles are not introductory but nevertheless this wiki has established itself as a basic reference for category theory. One should also have in mind the Q&A sites `https://math.stackexchange.com/` and `https://mathoverflow.net/`, the first being open to students and professionals while the second addresses mainly research questions. Young people love to watch videos so having the course 'The Catsters' (E. Chang and S. Willerton) at YouTube is a wonderful resource. A big list of resources can be found in P. Smith's logicmatters.net/categories/ and on the 'Category Theory Mailing List' `https://www.mta.ca/~cat-dist/`. A valuable addition is the course of B. Milewski `https://bartoszmilewski.com`.

5. Teaching category theory. I have taught three times category theory at AUBG. The first time was in 2007 using the textbook [51]. During the first accreditation of

the mathematics program[8] members of the accreditation team voiced unofficially strong disapproval of teaching categories to undergraduates[9]. I got the message and did not offer it again but in 2016 and in 2019 students asked that I teach it and I happily responded.

I am targeting an audience of math majors (some doing a double major also in computer science) in their third or fourth year. As a prerequisite I ask for Linear Algebra and strongly advise them to have taken some abstract course, e.g., Introduction to Abstract Algebra. But some of the students are only computer science majors or second year students (this is not uncommon at a liberal arts university) and they manage better than part of the forth year math majors. In 2016 and 2019 I based the course on the book of Leinster [31]. This book is very appropriate for such a course providing the basic minimum of categorical concepts 'adjoints', 'representables', and 'limits'. For additional reading I recommend Simmons [46], Awodey [3], and Spivak [48] while Riehl [42] and MacLane could be texts for deeper involvement. The text of Simmons is great for a very first introduction, with plenty of relatively easy exercises, but it lacks the Yoneda Lemma and representables. Since this lemma is a basic pillar of category theory I would not consider basing a course on [46] alone. The course does not cover Kan extensions, ends and coends, and regrettably there is not much time left in one semester to develop more seriously the monoidal categories. One of the properties of category theory is that every one of the basic notions (co)limits, representables, adjoints, or Kan extensions subsumes the rest. Leinster follows the sequence adjoints-representables-limits but I prefer to start with (co)limits thus I don't follow the book verbatim. Students have seen examples of (co)limits in concrete situations elsewhere and it is good to begin with something familiar. Moreover all limits/colimits can be expressed as terminal/initial objects in appropriate categories and a terminal/initial object is probably the simplest notion[10]. Exercises are extremely important and the books I use together provide a big pool but of course one has to come up with new exercises.[11] The student evaluations on the course were positive.

6. Conclusion. Category theory is a paradigm shift in mathematics of grand proportions. It has reorganized first the closest areas such as homological algebra, algebraic geometry, representation theory, etc., and has spread its influence to most of abstract mathematics, large portions of theoretical physics, and much of theoretical computer science. In recent years we see categorical thinking and methods entering economics, linguistics, engineering, etc.

The time has come category theory to be considered not as something exotic but as something normal for the undergraduate curriculum. It should be taught as an elective course to 3rd or 4th year undergraduates with a prerequisite of linear algebra and some abstract mathematical course (e.g., abstract algebra). The resources are available (introductory textbooks, numerous lecture notes, many electronic resources). It took Moses

[8] AUBG has both an American and a Bulgarian accreditation and the second requires separate accreditation of each major. The math major at AUBG was established in 2001.

[9] I thank the referee for pointing out that courses on category theory were given at Sofia University by I. Prodanov., G. Dimov, and S. Petkova. To the best of my knowledge this has happened more than 3 decades ago.

[10] An object is terminal if from *every* other object to the terminal there *exists a unique* arrow.

[11] It is in every book that the limit of a diagram with only two objects (not mentioning the identity arrows) is the product but what is the limit on a diagram with a single object? You never see this question because the answer is not interesting but some students are taken aback by it.

and the Israelites 40 years wandering in the desert before reaching the Promised Land. It is time after 75 years to accept the changes category theory brought to science and mathematics. My short answer to the question "why teach category theory to undergaraduates" is: it is mathematically important; it has its own important results and at the same time it gradually permeates most of mathematics, creating a common structure and reversing the trend of compartmentalization; it is interesting for application; pedagogical textbooks exist; young people are enthusiastic about it.

Acknowledgements. I would like to thank my colleagues at the Mathematics and Science Department of AUBG for not opposing the teaching of category theory and giving me the opportunity to do it and the students for their captivating enthusiasm. I would like to thank AUBG for a sabbatical leave and my colleagues at INRNE for having to endure a number of my seminars related to category theory. Discussions with P. Dalakov and H. Ganchev are acknowledged.

REFERENCES

[1] P. Aluffi. Algebra: Chapter 0. Providence RI, AMS, 2009.
[2] M. Arbib, E. Manes. Arrows, structures, and functors: The categorical imperative. Cambridge MA, Academic Press, 1975.
[3] S. Awodey. Category Theory Oxford, Oxford University Press, 2010.
[4] M. Barr, C. Wells. Category theory for computing science. New York, Prentice Hall, 1990.
[5] G. Bergman. An invitation to general algebra and universal constructions. Berlin, Springer, 2015.
[6] I. Bucur, A. Deleanu. Introduction to the Theory of Categories and Functors. Hoboken NJ, John Wiley & Sons, 1968.
[7] F. Borceux. Handbook of Categorical Algebra, Vol. **1**–**3**. Cambridge, Cambridge University Press, 1994.
[8] M. Sh. Calenko, E. G. Shulgeifer. Lectures on category theory. Moscow, MGU, 1970, (in Russian).
[9] E. Cheng. How to Bake Pi: An Edible Exploration of the Mathematics of Mathematics. New York, Basic Books, 2015.
[10] N. N. Cencov. Statistical decisions rules and optimal Inference. Moscow, Nauka, 1972 (in Russian); English Translation edited by Lev J. Leifman: Translations of Mathematical Monographs, **53**, Providence RI, AMS, 1982.
[11] K. Cho, B. Jacobs, B. Westerbaan, A. Westerbaan. An introduction to effectus theory. arXiv preprint arXiv:1512.05813, 2015.
[12] R. Cockett, G. Cruttwell, J. Gallagher, J. S. P. Lemay, B. MacAdam, G. Plotkin, D. Pronk. Reverse derivative categories. preprint arXiv:1910.07065, 2019.
[13] B. Coecke, A. Kissinger. Picturing quantum processes. Cambridge, Cambridge University Press, 2017.
[14] A. Ehresmann, J.-P. Vanbremeersch. Memory evolutive systems; hierarchy, emergence, cognition. Amsterdam, Elsevier, 200).
[15] S. Eilenberg, S. MacLane. General theory of natural equivalences. *Trans. of AMS*, **58** (1945), 231–294.
[16] C. Elliott. The simple essence of automatic differentiation. preprint arXiv:1804.00746, 2018.
[17] J. L. Fiadeiro. Categories for software engineering. Berlin, Springer, 2005.

[18] B. Fong, D. Spivak. Seven Sketches in Compositionality: An Invitation to Applied Category Theory. Cambridge, Cambridge University Press, 2019, available at arXiv:1803.05316.
[19] M. Giry. A categorical approach to probability theory. In: Categorical aspects of topology and analysis, Lecture Notes in Math. **915**, Berlin, Springer, 1982, 68–85.
[20] J. Gomez-Ramirez. A New Foundation for Representation in Cognitive and Brain Science. Category Theory and the Hippocampus. Berlin, Springer, 2014.
[21] C. Heunen, J. Vicary. Categories for Quantum Theory: an introduction. Oxford, Oxford University Press, 2019.
[22] H. Herrlich, G. Strecker. Category theory: an introduction. Berlin, Heldermann, 1979.
[23] B. Jacobs, J. Rutten. A tutorial on (co) algebras and (co) induction. *Bulletin-European Assoc. for Theor. Computer Sci.*, **62** (1997), 222–259.
[24] P. Johnstone. Sketches of an elephant: A topos theory compendium, Vol. **1–3**. Oxford, Oxford University Press, 2002.
[25] D. Kan. Adjoint functors. *Trans. AMS*, bf 87 (1958), 294–329.
[26] R. Kromer. Tool and object: a history and philosophy of category theory. Berlin, Springer, 2007.
[27] J. Lambek, P. Scott. Introduction to higher-order categorical logic. Cambridge, Cambridge University Press, 1988.
[28] E. Landry (ed.) Categories for the Working Philosopher. Oxford, Oxford University Press, 2017.
[29] K. Landsman. Foundations of quantum theory: from classical concepts to operator algebras. Berlin, Springer, 2017.
[30] W. Lawvere, S. Schanuel. Conceptual Mathematics: a first introduction to categories. Cambridge, Cambridge University Press, 2009.
[31] T. Leinster. Basic category theory. Cambridge, Cambridge University Press, 2014, preprint arXiv:1612.09375.
[32] S. Mac Lane. Categories for the Working Mathematician. Berlin, Springer, 2013, the first edition is from 1971.
[33] S. MacLane, I. Moerdijk. Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory. Berlin, Springer, 2012.
[34] J-P. Marquis. From a geometrical point of view: a study of the history and philosophy of category theory. Berlin, Springer, 2008.
[35] G. Mazzola. The topos of music, vol. **1–4**. Berlin, Springer, 2018.
[36] B. Milewski. Category Theory for Programmers, 2018 (`https://bartoszmilewski.com`).
[37] E. Moggi. Notions of computation and monads. *Information and computation*, **93** (1991), 55–92.
[38] M. Nielsen, G. Winskel. Models for concurrency. In: Handbook of Logic in Computer Science. Oxford, Oxford University Press, 1995, 1–148.
[39] B. Pareigis. *Categories and functors* (Cambridge MA, Academic Press, 1970).
[40] B. Pierce. Basic category theory for computer scientists. Cambridge MA, MIT Press, 1991.
[41] R. Rosen. The representation of biological systems from the standpoint of the theory of categories. *Bulletin Math. Biophys.*, **20** (1958), 317–341.
[42] E. Riehl. Category theory in context. Mineola NY, Dover Publications, 2017.
[43] M. Riley. Categories of optics. preprint arXiv:1809.00738, 2018.
[44] **R. Rosen.** Life itself: a comprehensive inquiry into the nature, origin, and fabrication of life. New York, Columbia University Press, 1991.
[45] H. Schubert. Categories. Berlin, Springer, 1972, the German edition is from 1970.
[46] H. Simmons. An introduction to category theory. Cambridge, Cambridge University Press, 2011.
[47] P. Smith. Category Theory. A Gentle Introduction, 2018 (`https://www.logicmatters.net/`).

[48] D. Spivak. Category theory for the sciences. Cambridge MA, MIT Press, 2014.
[49] R. Tuyeras. Category theory for genetics. preprint arXiv:1708.05255, 2017.
[50] V. Turaev, A. Virelizier. Monoidal Categories and Topological Field Theory. Basel, Birkhauser, 2017.
[51] R. F. C. Walters. Categories and computer science. Cambridge, Cambridge University Press, 1991.

Alexander Ganchev
American University in Bulgaria
Blagoevgrad, Bulgaria
e-mail: aganchev@aubg.bg

Current address
INRNE-BAS
Sofia, Bulgaria
e-mail: ganchev@inrne.bas.bg

ПРЕПОДАВАНЕ НА ТЕОРИЯ НА КАТЕГОРИИТЕ НА БАКАЛАВРИ

Александър Ганчев

С тези кратки бележки искам да започна обсъждане на въпроса за включване на курс по теория на категориите в бакалавърските програми и да споделя своя опит. Ще приведа аргументи, че е настъпило времето курсове по теория на категориите да се включат като избираеми предмети в бакалавърски програми.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ДИАГНОСТИЧЕН ИНСТРУМЕНТАРИУМ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА РАВНИЩЕТО НА ФОРМИРАНИТЕ УМЕНИЯ У ОБУЧАВАНИТЕ ПО ТЕМАТА „ОБИКНОВЕНИ ДРОБИ“*

Десислава Георгиева

Настоящият доклад представя авторски диагностичен инструментариум по темата *Обикновени дроби*, който може да бъде директно използван или да послужи като шаблон за разработване на нови инструментариуми за прогимназиален и гимназиален етап на основното образование. Посочени са основните стъпки на технологията за конструиране на задачи за висшите когнитивни равнища. Попълнена е *Таблица на спецификациите*, която отразява *процесуалното знание* и *метазнанието*. Разработени са *методически насоки* и *индивидуална бланка за оценка на изследваните умения*. Предоставен е *диагностичният критериален тест*, както и част от решенията и варианти на допълнителни въпроси към последната задача. Една от задачите съдържа решение, в което учениците трябва да открият грешките и да се обосноват. С последната задача се проверяват комплекс от умения за съставяне на математически модел, попълване на таблица, разчитане и коригиране на диаграма, разграничаване на съществена от несъществена информация и съставяне на нови задачи.

Въведение. С цел разработване на диагностичен инструментариум за определяне на равнището на формираните умения са анализирани различни научни източници, свързани с разглежданата проблематика [2, 3, 4, 6, 8]. Използвана е разработената от Х. Милър, Р. Уилямс и Т. Халадина технология за конструиране на задачи за висшите когнитивни равнища [8], която включва следните основни стъпки: подбор на учебното съдържание; формулировка на основната идея; определяне на съответното когнитивно равнище; избор на нова ситуация (стимул); конструиране на тестовите задачи.

Съгласно *Учебната програма по математика за пети клас* (МОН), темата *Обикновени дроби* включва няколко области, но поради ограниченото време на учебния час не могат да бъдат включени отделни задачи за всяка от тях, затова са подбрани обобщаващите – тези които съдържат предходни области. Затова разработеният авторски диагностичен инструментариум обхваща: четирите аритметични действия с дроби; рационално пресмятане на числови изрази; намиране на неизвестно число; задача от ниво *оценка* (от таксономията на Блум), включваща неизвестно,

Ключови думи: diagnostic instrumentarium, higher cognitive levels, methodological guidelines, diagnostic test, problem posing.

участващо в израз, четирите аритметични действия, превръщане в смесено число; решаване на текстова задача, която включва намиране на число по даден процент от него и обработка на информация, зададена с диаграма, и попълване на таблица.

Диагностичният инструментариум включва 10 авторски задачи, разделени в два теста с еднаква степен на сложност. Задачите с номера $1 \div 3$, 5 са с конструируем (свободен) отговор с ограничена свобода [4], а задачите с номер 4 са с предварително дадено решение, чиято вярност трябва да се провери и обоснове. Част от задачите с номер 5 са с *напълно свободен отговор* – обучаваните трябва да генерират допълнителни въпроси. Използвани са задачи със свободен отговор, защото те позволяват *измерването на висшите когнитивни процеси, комплексни умения и творчески способности* [4, 8]. Изключва се възможността за случайно налучкване на верния отговор, с което се повишава валидността на разработените тестове.

Тъй като проведеното изследване е насочено към определяне на равнището на формираните умения, то в Таблица 1. по модела на Л. Андерсън и Д. Кратхол [1] са отразени *процесуалното знание* и *метазнанието*. Попълнени са номерата на задачите и подточките, измерващи конкретни умения и съответните когнитивни равнища. С $4.i$ (Табл. 1) е означен съответният i-ти ред от изложеното в теста решение на Задача 4, което подлежи на оценка и корекция. С първите букви са означени съответните равнища в познавателния процес: З – запомняне, Р – разбиране, П – прилагане, А – анализ, О – оценка, С – синтез.

Тестовете са придружени от методически насоки за използването им [4, 8].

Методически насоки за използване на разработения критериален тест. Тестът по математика е предназначен за ученици от пети клас през втория учебен срок. Разработен е в два варианта с еднаква степен на сложност на задачите.

Измерват се степента на формиране на учебни математически умения по темата *Обикновени дроби* и степента на формиране на надпредметни математически умения.

Тестът е предназначен за цял учебен час. На всеки ученик се предоставя индивидуален тест, върху който той записва решението. Състои се от пет задачи с отворени отговори. Задачи 1 и 3 измерват низшите когнитивни равнища, а задачи 2, 4, и 5 – висшите когнитивни равнища. Чрез първа задача се измерват уменията да извършват четирите аритметични действия с обикновени дроби и смесени числа. Втора задача проверява дали прилагат рационални подходи. Трета задача е за намиране на неизвестен делител и неизвестен множител. Четвърта задача съдържа решение, в което умишлено са допуснати по-често срещаните в решенията на учениците грешки. На всеки ред от решението те трябва да запишат дали действията са извършени вярно, или грешно. Там, където не е правилно, кратко да се обосноват и да запишат вярното.

Решението на пета задача е с най-голям обем, изисква изграждане на математически модел и измерва най-много умения (табл. 1). Тя включва намиране на число по даден процент от него, намиране на част от число, попълване на таблица [5], разчитане и коригиране на диаграма. Задачата умишлено съдържа излишни данни, за да може да се прояви важното за съвременното общество *умение за отсяване на съществената от несъществената информация*. Поради ограниченото време не се изисква да се състави изцяло нова задача, а да се генерират допълнителни въпроси (подзадачи) към дадената [7].

Таблица 1. Таблица на спецификациите

		Познавателен процес					
	Умее да:	З	Р	П	А	О	С
Процесуалното знание	събира дроби с равни знаменатели	1 а)	1 а)				
	събира дроби с различни знаменатели	1 б)		1 б)		4.4	
	изважда дроби с равни знаменатели	1 в)	1 в)				
	изважда дроби с различни знаменатели	1 г)		1 г)			
	умножава обикновени дроби	1д), 3а)	1 д)			4.2	
	дели обикновени дроби	1е) 3а)	1 е)				
	пресмята със смесени числа		3 б)	2 б)			
	правилно пресмята числена стойност на израз с обикновени и десетични дроби				2б)		
	прилага ред на действията в изрази, съдържащи скоби	1 ж)		1 ж)			
	намира неизвестно			3 а)		4.3	
	намира неизвестно, участващо в израз					4.1	
	намира правилно част от число				5		
	записва процентите като дроби				5		
	решава основните задачи, свързани с понятието процент				5		
	попълва таблица						5
	интерпретира информация, зададена с диаграма				5	5	5
Метазнание	отделя съществената от несъществената информация					5	
	разграничава даденото и търсеното				5		
	изгражда математически модел						5
	интерпретира получения резултат и го оценява					4.5	
	рационално събира и умножава					2	
	прилага рационални подходи за решаване на текстови задачи						
	творчески формулира допълнителни въпроси към дадена задача						5
	аргументирано преценява вярност или погрешност на дадено решение					4	
	използва правилно математическата символика	1–5					
	оформя решението ясно и естетично			1 –5			

Използва се тристепенна скала за оценка на всяко умение: 0 – не умее да извърши дейността; 1 – недостатъчно умела дейност; 2 – умее правилно да извърши дейността.

Проверяващият нанася резултатите в индивидуална бланка (табл. 2), като срещу всяко умение записва кодирано – 0, 1 или 2.

Критериалните тестове са предназначени за трикратно тестиране [4] в етапите: *Констатираща диагностика* (входящ контрол), *Контролен експеримент* (непосредствено след приключване на педагогическото взаимодействие) и *Отсрочена проверка*.

Тестовете съдържат следните задачи и празни полета, в които ученикът да записва решенията.

Таблица 2. Индивидуална бланка за оценка на изследваните умения

	КЛАС №	код
	Умее да:	
1	събира дроби с равни знаменатели	
2	събира дроби с различни знаменатели	
3	изважда дроби с равни знаменатели	
4	изважда дроби с различни знаменатели	
5	умножава обикновени дроби	
6	дели обикновени дроби	
7	пресмята със смесени числа	
8	правилно пресмята числена стойност на израз с обикновени и десетични дроби	
9	прилага ред на действията в изрази, съдържащи скоби	
10	намира неизвестно	
11	намира неизвестно, участващо в израз	
12	намира правилно част от число	
13	записва процентите като дроби	
14	решава основните задачи, свързани с понятието процент	
15	попълва таблица	
16	интерпретира информация, зададена с диаграма	
17	отделя съществената от несъществената информация	
18	разграничава даденото и търсеното	
19	изгражда математически модел	
20	интерпретира получения резултат и го оценява	
21	рационално събира и умножава	
22	прилага рационални подходи за решаване на текстови задачи	
23	творчески формулира допълнителни въпроси към дадена задача	
24	аргументирано преценява вярност или погрешност на дадено решение	
25	използва правилно математическата символика	
26	оформя решението ясно и естетично	

Първи вариант Име: ..... № ..... клас .....

1 зад. Пресметнете:

а) $\frac{3}{7}+\frac{6}{7}=$ б) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$ в) $\frac{14}{11}-\frac{5}{11}=$ г) $\frac{11}{12}-\frac{3}{8}=$

д) $\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{25}=$ е) $\frac{5}{9}:\frac{20}{3}=$ ж) $\left(5\frac{2}{3}-3\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{3}\cdot 1\frac{3}{4}\right)=$

2 зад. Пресметнете рационално:

а) $2\frac{1}{7}+3\frac{5}{12}+7\frac{6}{7}+6\frac{7}{12}=$ б) $5\frac{3}{11}\cdot 0{,}33-5\frac{3}{11}\cdot 0{,}22=$

3 зад. Намерете x. Направете проверка.

а) $\frac{1}{3}:x=2$ б) $2\frac{1}{7}\cdot x=\frac{5}{7}$

4 зад. Правилно ли е решена следната задача? На всеки ред от решението запишете *вярно* или *грешно* е пресметнато спрямо предходния ред. Там, където е грешно, **обяснете защо** и **напишете вярното**?

$\left(x+\frac{1}{3}\right):\frac{4}{5}=3$

$x+\frac{1}{3}=3.\frac{4}{5}$

$x+\frac{1}{3}=\frac{12}{5}$

$x=\frac{12}{5}+\frac{1}{3}$

$x=\frac{13}{8}$

$x=2\frac{5}{8}$

5 зад. Собственик на малък хранителен магазин закупил ягоди, банани и 48 кг череши от борсата, като заплатил 480 лв. Черешите са 30% от общото количество плодове. За бананите, които са три четвърти от останалото количество плодове, заплатил 168 лв. Колко килограма ягоди е закупил? Попълнете таблицата. Съответства ли диаграмата на решението? Ако не, как може да се коригира? Поставете допълнителни въпроси.

плодове	череши			общо
дадено по условие				
килограми				



Втори вариант Име: .....№ ..... клас .....

1 зад. Пресметнете:

а) $\frac{5}{9}+\frac{8}{9}=$ б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{7}=$ в) $\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=$ г) $\frac{7}{6}-\frac{3}{10}=$

д) $\frac{4}{9}\cdot\frac{27}{20}=$ е) $\frac{7}{8}:\frac{21}{4}=$ ж) $\left(2\frac{2}{3}\cdot 1\frac{2}{5}\right):\left(2\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=$

2 зад. Пресметнете рационално:

а) $2\frac{1}{8}+5\frac{3}{5}+7\frac{7}{8}+6\frac{2}{5}=$ б) $13\frac{2}{9}.5{,}4-11\frac{2}{9}.5{,}4=$

3 зад. Намерете x. Направете проверка с получения резултат:

а) $\frac{7}{6}:\ x=7$ б) $\frac{5}{6}\cdot x=1\frac{2}{3}$

4 зад. Правилно ли е решена следната задача? На всеки ред от решението запишете *вярно* или *грешно* е пресметнато спрямо предходния ред. Там, където е грешно, **обяснете защо** и **напишете вярното**?

$\left(x+\frac{1}{3}\right):\frac{5}{6}=4$

$x+\frac{1}{3}=4.\frac{5}{6}$

$x+\frac{1}{3}=\frac{29}{6}$

$x=\frac{29}{6}+\frac{1}{3}$

$x=\frac{28}{6}$

$x=5$

5 зад. Собственикът на малък хранителен магазин закупил моркови, краставици и 24 кг домати от борсата, като заплатил 380 лв. Доматите са 20% от общото количество зеленчуци. За краставиците, които са пет шести от останалото количество зеленчуци, заплатил 160 лв. Колко килограма моркови е закупил? Попълнете таблицата. Съответства ли диаграмата на решението? Ако не, как може да се коригира? Поставете допълнителни въпроси.

зеленчуци	домати			общо
дадено по условие				
килограми				



Решенията на първите три задачи са елементарни и тривиални, затова ще разгледаме само части от решенията на 4 и 5 задача:

4 зад. За първите два реда проверяват и записват *вярно*, а за следващите обясняват:

$x = \frac{12}{5} + \frac{1}{3}$ грешно – неизвестно събираемо $x = \frac{12}{5} - \frac{1}{3}$

$x = \frac{13}{8}$ грешно – първо привеждаме под общ знаменател

$x = 2\frac{5}{8}$ грешно - $13 : 8 = 1\frac{5}{8}$

5 зад. Последователно намират и попълват таблицата:

30% от $x = 48$ кг ... $x = 160$ кг. Всички плодове са 160 кг.

$\frac{3}{4}$. $(160 - 48) = 84$ кг банани

$160 - (48 + 84) = 160 - 132 = 28$ кг ягоди. Собственикът на магазина е закупил 28 кг ягоди.

Попълваме таблицата с получените данни.

плодове	череши	банани	ягоди	общо
дадено по условие	48 кг 30% от x	$\frac{3}{4}$ (x – черешите)		x
килограми	48 кг	84 кг	28 кг	160 кг

На диаграмата бананите са между 40 кг и 60 кг, а ние получихме 84 кг, следователно диаграмата не съответства на решението. Между 40 кг и 60 кг са черешите, следователно те съответстват на първия стълб. Втория стълб над 80 кг показва количеството банани. Третият стълб над 20 кг съответства на ягодите (28 кг). На диаграмата трябва да се разместят етикетите: *череши*, *банани*, *ягоди*.

Допълнителни въпроси:

Каква част са ягодите от бананите? Каква част са ягодите от черешите? Каква част са ягодите от общото количество? Колко процента са ягодите от общото количество? Колко процента от общото количество са бананите и черешите? Колко процента от общото количество са бананите и ягодите? ...

В задачата това, което е заплатил, е излишна информация. За да не е излишна, можем да добавим въпросите: Колко струва килограм банани? Колко струва килограм плодове? Колко струват черешите и ягодите? Ако добавим цена на килограм череши 4,00 лв., можем да търсим колко струва килограм ягоди. Кой от плодовете е с най-висока или с най-ниска цена? Можем да добавим нови редове към таблицата с надписи: *цена за килограм* и *плодовете струват*.

Заключение. Разработеният тест измерва уменията**,** заложени в *Учебната програма по математика за пети клас* и *уменията, необходими за успешната реализация в съвременното общество*, които са изследвани в предходни публикации на автора. Първите три задачи са с конструируем отговор с ограничена свобода, четвърта задача е с предварително дадено решение, чиято вярност трябва да се провери и да се даде предложение за корекция. Последната задача включва изграждане на математически модел, попълване на таблица, разчитане и коригиране на диаграма, разширяване и трансформиране на поставената задача, за това чрез нея се измерват висшите когнитивни равнища.

Диагностичният инструментариум е апробиран с ученици от пети клас, след което е извършен статистически анализ, който доказва неговата надеждност и валидност. Той може да бъде директно използван или да послужи като пример за разработване на други такива.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Anderson, D. Krathwohl. A taxonomy for learning, teaching, and assessing. A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives. Longman, 2001.

[2] E. Velikova, R. Vasileva-Ivanova. The modernization of mathematics education in Bulgaria. Proceedings of the XV international scientific conference "Orientations and ventures in education", Chlewiska, Poland, 2017.

[3] М. Андреев. Процесът на обучението – Дидактика. София, Университетско издателство „Св. Климент Охридски", 1996.

[4] Г. Бижков, В. Краевски. Методология и методи на педагогическите изследвания. Шесто преработено и допълнено издание. София, Университетско издателство „Св. Климент Охридски", 2007.

[5] С. Гроздев, Д. Деков. Експериментални задачи в средното училище с помощта на компютърни таблици. *Математика и информатика*, **4** (2013), 351–367.

[6] С. Гроздев, П. Кендеров. Изучаване на математиката с нови средства за комуникация. *Математика и математическо образование*, **42** (2013), 167–171.

[7] С. Гроздев, Д. Стефанова. Мотивация при решаване на задачи чрез преформулировка на условията. *Математика и информатика*, **4** (2014), 416–421.

[8] Ф. Стоянова. Тестология за учители. София, Атика, 1996.

Десислава Георгиева
Факултет по математика и информатика
Великотърновски университет
бул. „Арх. Георги Козаров" № 3
5000 Велико Търново, България
e-mail: dmgeorgieva2@gmail.com

DIAGNOSTIC ASSESSMENT TOOLS FOR DETERMINING THE LEVEL OF LEARNERS' FRACTION SKILLS

Desislava Georgieva

This article presents an author's diagnostic toolkit on the topic of *Fractions*, which can be used directly by teachers of mathematics or to serve as a template for the development of new tools for secondary and upper primary stage of education. The main steps of the technology for constructing tasks for higher cognitive levels are outlined. A specification table has been completed to reflect the procedural knowledge and metacognition. Methodological guidelines have been developed for teachers to use the developed criterion test. The first variant of the diagnostic test is provided together with ъ a part of the solutions and variants of additional questions to the last task.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ГЕОДЕЗИЧНИ ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО ПРОГРАМИРАНЕ

Владимир Заблоцкий, Светлана Василева

Представена е учебна програма за студенти картографи и геодезисти, изучаващи основи на програмирането на език C++, а също и ученици, обучаващи се в профил математика и интересуващи се от науките за Земята. В примера се изчисляват плоски правоъгълни координати на търсена точка чрез обратно геодезично засичане с допълнителна контролна точка (задача на Потено[1]). В програмния фрагмент задачата се решава чрез свеждане до задачата за пряко засичане с използване на формулите на Деламбр[2]. Програмата изчислява и извежда на стойностите на декартовите координати на търсената точка, ако разминаването между абсцисите и ординатите на двете решения удовлетворява правилото за „трите сигми“. В примера са използвани технологиите за процедурно програмиране, което прави подобни задачи подходящи за учебни проекти в часовете по Програмиране (C++) за профил *математика* (*информатика*).

Увод. Информатиката стана много популярна дисциплина, преподавана както в средното (и началното училище), така и във висшите училища. Това, което различава информатиката от другите научни дисциплини, е, че се появи сравнително неотдавна и няма дълбоки исторически корени, характерни за почти всички академични науки. В днешно време става очевидно, че съществените изменения в методите за обучение са свързани с внедряването на новите информационни технологии в образователния процес. Компютърните мрежи направиха дистанционното образование много по-достъпна форма за придобиване на знания. Използването на мултимедийни проектори и интерактивни дъски в университетските и училищните аудитории, на персонални и мобилни компютри в лабораторните зали също способства за промените в начините на преподаване на информатиката. Ако преди преподавателят е трябвало да пише на (тебеширената) дъска само отделни програмни фрагменти, то днес с помощта на мултимедиен проектор, на обучаемите се демонстрира целия програмен код. Освен това използването на демонстрационен софтуер позволява да се покаже на аудиторията работата на програма в реално време.

Обикновено студентите и учениците изучават програмиране по учебници, предназначени за обширна аудитория („за подпомагане на обучението по информатика“). Такива учебници, например за езика C++, има много: класически учебници – преводни (на С. Прата [1] и много други), български и руски (на В. Подбельский [2], М. Тодорова [3] и много други); самоучители (като този на Дж. Либерти

[1] известна още като задача на Снелиус-Потено (Snellius-Pothenot Problem) – бел. ред.
[2] Jean-Baptiste-Joseph Delambre (1749—1822) – френски математик и астроном – бел. ред.

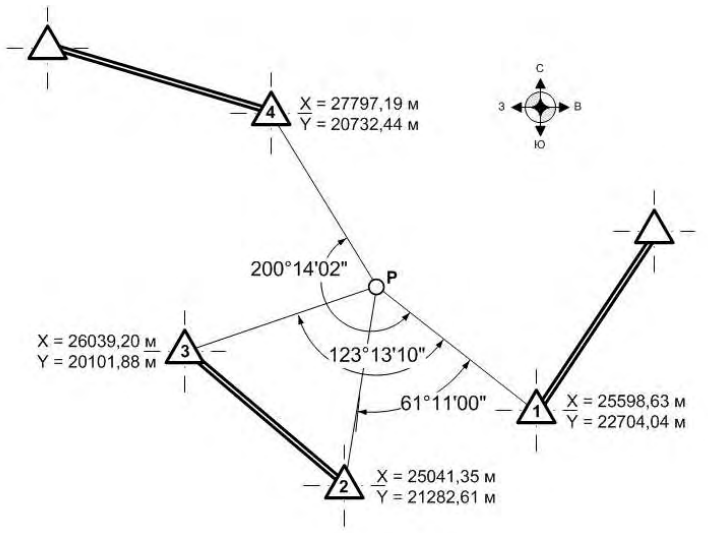
[4] и други); учебници по информатика (за 9. клас, Програмиране на C++ [5] и други). Но всички тези издания са за широк кръг читатели и затова в тях няма програми и примери, специализирани за профилирани паралелки в средното училище или профилни инженери, например картографи и геодезисти. Целенасоченото и специализирано обучение по програмиране трябва да отчита направлението на подготовката на учениците и студентите, за да им даде знания, които ефективно ще прилагат в практиката си. Авторите предлагат обучението по програмиране да бъде свързано с тематичната насоченост на бъдещите специалисти: например, да се обучават студентите картографи и геодезисти на основата на едни компютърни програми и задачи, а например студентите и учениците (профил *физика*) – с други задачи и компютърни програми, машиностроителните специалности – по трети тип и т.н.

Целта на работата е да предложи тип геометрични – геодезични задачи [6], които могат да бъдат част от обучението по информатика за студенти и ученици (11.–12. клас, обучаващи се в профил *математика*) – алгоритмично програмиране и евентуално визуално програмиране. Такива задачи, но по информационни технологии, са реализирани в [7]. Показаният примерен тип задачи подпомага студенти (бъдещи инженери геодезисти и картографи) в решаването на специфичните професионални проблеми ([8], [9]) много по-ефективно, отколкото общите типови задачи, с които се изучава програмиране.

Решаване на задачата за обратното геодезично засичане с помощта на контролна точка. Представената компютърна програма за студенти картографи и геодезисти, демонстрира решението на обратното ъглово засичане по метода на Деламбр на езика за програмиране C++ (изучаван в много университети в България, Русия и много други европейски държави).

Геодезична постановка на задачата: Необходимо е да се определят координатите на точка $P(x_P, y_P)$, ако са известни декартовите координати на три начални точки и координатите на четвърта контролна точка. Предполага се също, че се използва ъглов измервателен прибор (теодолит), намиращ се в точката, чиито координати трябва да се определят. Тази задача е била формулирана и решена за първи път от френския математик Потено, затова определянето на координатите на точка по метода на обратното засичане се нарича *задача на Потено*. В днешно време има публикувани много алгоритми за решаване на задачата на Потено, един от които е методът на Деламбр. Същността на алгоритъма се състои в привеждането на решението на обратното засичане към решението на прякото засичане по формулите на Гаус. За тази цел е необходимо по началните входни данни да се определят дирекционните ъгли на лъчите от началните точки към определяната точка. В работата се разглежда съставената авторска C++ програма за решаване на задачата на Потено по метода на Деламбр.

Формулировка на задачата, определяне на началните стойности и означения. Нека координатите на началните точки са: $1(x_1, y_1)$, $2(x_2, y_2)$, $3(x_3, y_3)$ и $4(x_4, y_4)$ (фиг. 1). Трябва да се определят координатите на точка $P(x_P, y_P)$. Измерени и известни са също и три хоризонтални ъгъла: ъгъл β_1 между лъча към точка 1 и лъча към точка 2, ъгъл β_2 между лъча към точка 1 и лъча към точка 3 и ъгъл β_3 между лъча към точка 1 и лъча към точка 4. На фиг. 1 е показана схемата на обратното ъглово засичане с допълнителна контролна точка.



Фиг. 1. Схема на обратното ъглово засичане: опорни точки 1, 2, 3, допълнителна контролна точка 4, търсена точка

Изчисляването на координатите x_P и y_P на определяемата точка P се извършва по схемата, описана с формули (1)–(9). Отначало се изчислява α_1 – дирекционният ъгъл на началната посока от точка P към точка 1 по формула (1) [8] и [9].

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{(y_2 - y_1)\operatorname{cotg}\beta_1 + (y_1 - y_3)\operatorname{cotg}\beta_2 - x_2 + x_3}{(x_2 - x_1)\operatorname{cotg}\beta_1 + (x_1 - x_3)\operatorname{cotg}\beta_2 - y_2 + y_3} \tag{1}$$

След това се изчисляват дирекционните ъгли на направленията от началните точки 1, 2 и 3 към точка P по формули (2)–(5) [8] и [9]:

$$\alpha_{1-P} = \alpha_1 \pm \pi, \tag{2}$$

$$\alpha_{2-P} = \alpha_{1-P} + \beta_1, \tag{3}$$

$$\alpha_{3-P} = \alpha_{1-P} + \beta_2, \tag{4}$$

$$\alpha_{4-P} = \alpha_{1-P} + \beta_3, \tag{5}$$

където α_{1-P}, α_{2-P}, α_{3-P}, и α_{4-P}, са съответно дирекционните ъгли от началните точки 1, 2, 3 и 4 към точка P.

След това координатите на търсената точка P се определят в два екземпляра по формули (6), (7) и (8), (9) [8] и [9]:

$$x'_P = \frac{x_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_{1-P} - x_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_{2-P} + y_2 - y_1}{\operatorname{tg}\alpha_{1-P} - \operatorname{tg}\alpha_{2-P}}, \tag{6}$$

$$y'_P = y_1 + (x'_P - x_1) \cdot \operatorname{tg}\alpha_{1-P}, \tag{7}$$

където x_1, x_2 са абсцисите на точки 1 и 2, y_1, y_2 – ординатите на точки 1 и 2.

$$x''_P = \frac{x_3 \cdot \operatorname{tg}\alpha_{3-P} - x_4 \cdot \operatorname{tg}\alpha_{4-P} + y_4 - y_3}{\operatorname{tg}\alpha_{3-P} - \operatorname{tg}\alpha_{4-P}}, \tag{8}$$

(9) $$y''_P = y_4 + (x''_P - x_4) \cdot \operatorname{tg} \alpha_{4-P},$$

където x_3, x_4 са абсцисите на точки 3 и 4, y_3, y_4 – ординатите на точки 3 и 4, $\operatorname{tg} \alpha_{3-P}$.

При изчисляването на координатите на точка P се прилага правилото, при което изходните точки се номерират по часовниковата стрелка, отчитайки, че наблюдателят се намира в точка P. В изчисленията се получават две двойки декартови координати. Разликите между абсцисите и ординатите на тези стойности трябва да удовлетворяват неравенството, наречено „правило на трите сигми“ [9] (формули (10)–(11)).

(10) $$r = \sqrt{(x''_P - x'_P,)^2 + (y''_P - y'_P)^2} < 3M_r,$$

където

(11) $$M_r = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

Стойностите на M_1 и M_2, средноквадратичните грешки за положението на точка P, определено по четирите изходни точки (1, 2, 3 и 2, 3, 4), се изчисляват по формули (12) и (13):

(12) $$M_1 = \frac{d' \cdot m_\beta}{\rho \sin(\varphi'_1 + \varphi''_2)} \sqrt{\frac{d_1^2}{a^2} + \frac{d_2^2}{b^2}},$$

(13) $$M_2 = \frac{d'' \cdot m_\beta}{\rho \sin(\varphi'_1 + \varphi''_2)} \sqrt{\frac{d_1^2}{a^2} + \frac{d_2^2}{b^2}},$$

където: m_β е средноквадратичната грешка при измерване на ъгъла; φ'_1, φ'_2 и φ''_1, φ''_2 – ъглите при точки 1 и 3 и съответно при точки 2 и 4; d', d'' – разстоянията от точка P до точки 2 и 3; a и b – разстоянията от точка 1 до точка 2 и съответно от точка 2 до точка 3.

Когато има допустими разминавания между координатите, крайните стойности на координатите на точка P се изчисляват като средноаритметично от двете стойности.

Програма за определяне на неизвестните координати по метода на Деламбр. На фиг. 2 е даден основен фрагмент от учебната програма за определяне на неизвестните координати на точка с обяснения за значението на сегментите. Използвани са стандартните математически функции за тангенс `tan` и за аркустангенс `atanl` (с увеличена точност) и е написана функция за изчисляване на котангенс `1/tan`.

Грешката в положението на точка P се определя чрез разстоянията, изчислени в масив `distance[i]`.

(14) $$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 -, y_2)^2},$$

(15) $$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

06–07: *Функция PythagorasFormula* – пресмятане на разстояния по Питагоровата формула.
Ако във функцията се предават четири параметъра, т.е x_1, y_1 – координати на първата точка и x_2, y_2 – координати на втората точка, то изчисляваме евклидовото разстояние м/у точките по формула (14); ако във функцията се предават само два параметъра, например x_1, y_1, то другите два параметъра по подразбиране са $x_2 = 0$ и $y_2 = 0$ и се изчислява евклидово разстояние м/у точката и началото на координатната система по формула (15).

```
06: double PythagorasFormula(double x1,double y1,double x2 = 0,double y2 = 0)
07: {return sqrt(pow((x1-x2),2) + pow((y1- y2),2));}
```

11–14: Дефинираме: *масиви* `x[4], y[4]` за съхраняване на координатите на четирите начални точки,
`xP[2], yP[2]` – за координатите на определяемата точка, изчислявани при едната комбинация на началните точки и при другата;
`distance[4]` – за разстоянията от определяната т. P до четирите начални точки.
12: *променливи* `XP, YP` – за средната стойност на координатите на определяемата точка;
`degrees`, `minutes`, `seconds` – за въвеждане на хоризонталните ъгли отделно в градуси, минути и секунди;
`mb` – за средноквадратичната грешка при измерване на ъгъл.
14: *масиви* `angle[3]` – за измерените при т. P ъгли във формат градуси с дробна част, `angleInRadian[3]` – за същите ъгли, но в радиани;
`ctgB[i]` – за котангенсите на ъглите;
`azimuthN_P[4]` – за дирекционните ъгли м/у линиите `1P, 2P, 3P` и `4P`, и линиите, съединяващи точки 1, 2, 3 и 4 с т. P.

```
10: int main()
11: { double x[4],y[4],xP[2],yP[2];
12:    double XP,YP,distance[4],degrees, minutes,seconds, mb;
14:    double angle[3], angleInRadian[3],ctgB[3],azimuthN_P[4];
16:    // Въвеждане координатите X, Y на точки 1-3
19:
```

21–26: *Въвеждане* големините на трите ъгъла в градуси, минути и секунди, *преобразуване* на ъглите във формат градуси с цяла и дробна част, и след това в радиани.
26: изчисляване котангенсите на ъглите и съхраняване резултатите в масив `ctgB[3]`.

```
21: for(int i = 0; i < 3; i++) {
22:  cout «"Въведете ъгъла между линия(P-1) и линия(P-≪< i+2«"), град.мин.сек:
";
23: cin » degrees » minutes » seconds;
24: angle[i] = degrees + minutes/60 + seconds/3600;
25: angleInRadian[i] = angle[i] * M_PI/180;
26: ctgB[i] = 1/tan(angleInRadian[i]);}
```

28: Изчисляване тангенс на дирекционния ъгъл на началното направление (лъчът от т. P към т. 1 съгласно формула (1).
29: Пресмятане големината на дирекционния ъгъл на началната посока чрез функция аркустангенс `atanl` (в радиани). Ако се получава отрицателна стойност, към големината на ъгъла се добавя 2π.

```
28: double tgA1_P = ((y[1]-y[0])*ctgB[0]+(y[0]-y[2])*ctgB[1]-x[1]+x[2])/((x[1]-
     x[0])*ctgB[0]+(x[0]-x[2])*ctgB[1]+y[1]-y[2]);
29: azimuthN_P[0] = atanl(tgA1_P);
```

31–34: Пресмятане дирекционните ъгли на вектори 1, 2, 3, 4 по формули (2) и (3).

33: Ако големината на дирекционния ъгъл е по-голяма от 360°, то се изважда 2π.

```
30: if(azimuthN_P[0] < 0) azimuthN_P[0] +=2*M_PI;
31: for(int i = 0; i < 3; i++){
32: azimuthN_P[i+1]= azimuthN_P[0]+angleInRadian[i];
33: if(azimuthN_P[i+1] > 2*M_PI) azimuthN_P[i+1] -=2*M_PI;
34: }
```

35–37:Изчисляване на X, Y-координатите на допълнителната точка P по формули (4) и (5);

38: И извеждане на резултата.

```
35: for(int j = 0,i = 0; i < 3; j++, i = i+2){
36: xP[j]=(x[i]*tan(azimuthN_P[i])-x[i+1]*tan(azimuthN_P[i+1])+y[i+1]-
    y[i])/(tan(azimuthN_P[i])-tan(azimuthN_P[i+1]));
37: yP[j] = y[i]+(xP[j]-x[i])*tan(azimuthN_P[i]);
38: cout «"X-координата на т. P«<j«": «< xP[j] «"m«< endl«"Y-координата на
    т. P«<j«": «< yP[j] «"m«< endl;
39:   }
```

40–83: Оценка на точността на даденото обратно геодезично засичане.

Променлива `mb` – средноквадратична грешка при измерване на ъгъла (в примера – $2''$)

променлива `ro = 206265` – брой секунди в 1 радиан (служи за преобразуване на грешката от радиани в ъглови секунди.

46: *Извикване* на ф-цията за изчисляване на разстояние (редове *06–07*) с четири параметъра – координатите на двете точки, едната е т. P.

```
40:cout«"Средноквадратична грешка за измерване на ъгъла: ";
41: cin » mb;
42: int ro = 206265;
43: double lengthBaseLine [3], azimuthBaseLine[3];
44: double deltaY[3], deltaX[3], fi[4], M_P[2];
45: for(int i = 0; i < 4; i++)
46: distance[i] = PythagorasFormula(x[i],y[i],xP[0],yP[0]);
```

48–49: Изчисляване в цикъл дължините на трите базисни линии (*масив* `lengthBaseLine[3]`) с Питагорова формула – към функцията `PythagorasFormula` се предават четири параметъра (координатите на две съседни точки).

```
48: for(int i = 0; i < 3; i++)
49: lengthBaseLine[i] = PythagorasFormula(x[i],y[i],x[i+1],y[i+1]);
```

51–55: Изчисляват се азимутите на базисните линии: изчисляване нарастването на координатите на линиите `deltaY[i]` и `deltaX[i]`;

54: определяне азимута на базисната линия с вградената C++ функция аркустангенс `atanl`. Ако се получи отрицателна стойност, се добавя 2π.

```
51: for(int i = 0; i < 3; i++){
52:    deltaY[i] = y[i+1]-y[i];
53:    deltaX[i] = x[i+1]-x[i];
54:    azimuthBaseLine[i] = atan2l(deltaY[i],deltaX[i]);
55:    if (azimuthBaseLine[i] < 0) azimuthBaseLine[i] += 2*M_PI;}
```

57–69: При оценката на грешките участват големините на ъгли φ_1 и φ_2. Ъглите се намират като разлика от азимутите на посоките на линиите. За φ_1 – формулата е φ_1=`azimuthN_P[i]- azimuthBaseLine[i]` (от азимута на линията, съединяваща т. P и началната т. 1 се изважда азимутът на базисната линия 1–2), а φ_2=`azimuthBaseLine[i-1]-` π `- azimuthN_P[i]` (от азимута на базисната линия 2–3 се

изважда π и се получава обратният азимут на линия 2–3 (линия 3–2) и се изважда азимутът на линията, съединяваща т. P и нач. т. 3.

58–68: Избор на формула за разчет на ъглите ϕ_1 и ϕ_2. Винаги получените величини се проверяват за допустимост на значенията на дирекционните ъгли, които не трябва да са отрицателни и не трябва да са по-големи от 360°. Ако тези условия не се изпълняват, получените стойности се привеждат към допустимия диапазон за ъгли $(0^\circ - 360^\circ)$.

```
57: for(int i = 0; i < 4; i++){
58:    if (i < 2) {
59:      fi[i]=azimuthN_P[i]- azimuthBaseLine[i];
60:      if (fi[i] < 0) fi[i] += 2*M_PI;
61:      if (fi[i] > 2*M_PI) fi[i] -= 2*M_PI;}
63:    else
64:    { fi[i] = azimuthBaseLine[i-1] - M_PI - azimuthN_P[i];
66:    if (fi[i] < 0) fi[i] += 2*M_PI;
67:    if (fi[i] > 2*M_PI) fi[i] -= 2*M_PI;
68:    }
69: }
```

70–71: Изчисляване на грешката при определяне положението на т. P съгласно формули (12), (13) по трите начални точки за първата комбинация точки и за втората комбинация. В примера се използва първата комбинация начални точки 1, 2, 3 и втората комбинация точки 2, 3, 4.

```
70: for(int i = 0; i < 2; i++)
71: M_P[i] = (distance[i+1]*mb)/(ro*sin(fi[i] + fi[i+2]))*sqrt(pow(distance[i]
   / lengthBaseLine[i],2) +pow(distance[i+2]/lengthBaseLine[i+1],2));
```

73: Изчисляване общата средноквадратична погрешност за положението на точка по формула (15) чрез функцията `PythagorasFormula`. Разминаванията в стойностите на координатите на определяната точка P, не трябва да надхвърлят „трите сигми“.

```
73: double M = PythagorasFormula(M_P[0],M_P[1]);
74: double r = PythagorasFormula (xP[0],yP[0],xP[1],yP[1]);
```

76–77: Ако намерените два варианта координати удовлетворяват правилото на „трите сигми“, то разликата се приема за допустима и X и Y-координатите на т. P се изчисляват като средноаритметични на двете стойности.

78: Извеждане на екран на изчислените координати на т. P.

```
75: if (r <= 3*M){
76:    XP = (xP[0] + xP[1])/2;
77:    YP = (yP[0] + yP[1])/2;
78:   cout «"X-coordinate of point P: ≪<XP«"m\n≪<"Y-coordinate of point P:
     ≪<YP«"m\n";
79: }
```

81: Иначе се извежда съобщение, че точността на ъгловите измервания не е достатъчна.

```
80: else
81:    { cout«"Точността на ъгловите измервания не е достатъчна: ≪< endl;}
84: return 0;
85: }
```

Фиг. 2. C++ програмен модул за определяне на неизвестни координати по метода на Деламбр

Резултати. Нека са въведени примерните данни (по [9]), представени в таблица 1.

Таблица 1. Тестови начални данни за програмата за обратно ъглово засичане с контролна точка

Пункт	Хоризонтални ъгли при т. P	Абциса	Ордината
1	$0^\circ 0' 00''$	25598,63	22704,04
2	$61^\circ 11' 00''$	25041,35	21282,61
3	$123^\circ 13' 10''$	26039,20	20101,88
4	$200^\circ 14' 02''$	27797,19	20732,44

Като резултат от работата на програмата (фиг. 2) на екрана се извежда следното:
X-координата на точка P: 26522.12 м
Y-координата на точка P: 21521.99 м

Заключение и бъдеща работа. Демонстрирана е предметно-ориентирана учебна програма на език C++ с геодезично съдържание. Примерната програма може да се използва както при студенти геодезисти и картографи, така и за ученици (11–12 клас), обучаващи се в природоматематически гимназии и професионални гимназии по архитектура, строителство и геодезия. Програмата изчислява плоски правоъгълни координати на допълнителна точка чрез решаване на обратното ъглово геодезично засичане (т. нар. *Задача на Потено*). Входните данни за програмата са координатите на четирите начални точки и големините на трите ъгъла, измерени в търсената точка в посоките от т. 1 до т. 2, от т. 1 до т. 3 и от т. 1 до т. 4. Програмата изчислява координатите на определяната точка по формулите на Деламбр и извежда на екран получените координати чрез използване на технологиите на процедурното програмиране.

Използването на подобни програми в часовете по информатика или като курсови задачи (за самостоятелна работа) са изключително полезни и ефективни, както като учебно средство на преподавателя по информатика и специализираните (профилиращи) предмети в математическите и техническите гимназии и университетите, така и като начин за самостоятелно овладяване на практически знания и умения от ученика и студента, изучаващ програмиране. Като едно продължение на представената работа, авторите си поставят за задача „да внедрят“ примерната програма в часовете по програмиране в 11. и 12. клас на профил *математика* в природоматематическа гимназия и да обобщят и анализират получените резултати.

Такъв тип задачи могат да бъдат реализирани и с други съвременни алгоритмични езици, както и в среди като Visual Studio и други, което предоставя огромно множество възможности за формулиране от преподавателите на най-разнообразни задания за самостоятелна работа на ученици (профил *математика* и профил *софтуерни и хадуерни технологии*) и студенти не само по картография и геодезия, но и по други университетски специалности, в които науките за Земята са от първостепенно значение за бъдещата професия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Прата. Язык программирования C++. Лекции и упражнения. Москва, ООО „ИД Вильямс“, 2014.

[2] В. Подбельский. Язык Си++. Москва, Финансы и статистика, 2003, 560 стр.

[3] М. Тодорова. Програмиране на C++, ч. 1, изд. Сиела, 2004, 378 с.
[4] Дж. Либерти. (2004) Освой самостоятельно C++ за 21 день. 1 Москва, ООО „ИД Вильямс“, https://vakho99.files.wordpress.com/2013/01/liberti_c__za_21_den.pdf (10.12.2019)
[5] Л. Иванова, В. Вазова, Б. Танева, И. Стоянов. Информатика за 9 клас: Програмиране на C++, 2007, Пловдив, Коала Прес.
[6] В. Заблоцкий, С. Василева. Многомодульная учебная программа, моделирующая измерение теодолитом расстояний, горизонтальных и вертикальных углов, *Известия высших учебных заведений „Геодезия и аэрофотосъемка“*, **62**, *6* 2018, 632–642. https://geocartography.ru/source/izvestia_vuzov/2018_6_632-642
[7] С. Василева, Е. Николова. Електронни таблици в обучението по агрономическите дисциплини. *Списание за наука Ново знание*, II, 1, Изд. на Висше училище по агробизнес и развитие на регионите, Пловдив, 2013, 298–307, https://uard.bg/files/custom_files/files/documents/New%20knowledge/year2_n1/paper_svvasileva_y2n1.pdf
[8] А. Маслов, А. Гордеев, Ю. Батраков. Геодезия, Москва, Изд. Колоср 2006.
[9] Г. Поклад, С. Гриднев. Геодезия: учебное пособие для вузов. Москва, Академический Проектр, 2007.

Владимир Заблоцкий
Московски държавен университет по геодезия и картография
Гороховский пер., 4
105064, Москва, Русия
e-mail: zablotskii@miigaik.ru

Светлана Василева
Природоматематическа гимназия „Иван Вазов“
бул. „Трети март“ 1
9300 Добрич, България
e-mail: svetlanaeli@abv.bg

GEODETIC TASKS IN PROGRAMMING TRAINING COURSES

Vladimir Zablotskii, Svetlana Vasileva

A typical training C ++ programming task for students and students studying cartography and surveying is presented. In the example, the flat rectangular coordinates of a search point are calculated by reverse geodetic detection with an additional checkpoint (the problem of Pothenot). In the program fragment the problem is solved by reducing it to the problem in the direct resection using the formulas of Delambre. The program calculates and outputs the values of the X, Y coordinates of the search point, if the discrepancy between the abscissa and the ordinates of the two solutions satisfies the rule for the "three-sigmas rule". The example uses procedural programming, making such tasks suitable for educational projects in Programming (C ++) classes for the "Mathematics" (Informatics) profile.
Key words: teaching C++ programming, computer program, Pothenot's problem, solution of an inverse geodetic angle resection with Delambre formulas.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ХАРДУЕРНА ЛАБОРАТОРИЯ И МУЗЕЙ В КЛАСНАТА СТАЯ

Гергана Карабелькова, Филип Петров

Когато се заговори за *материална база* за предметите *информатика* и *информационни технологии* в училищата, обикновено реалността се свежда до кабинет с работен компютър и достъп до интернет за всеки ученик, и средства за мултимедийна презентация за учителя – проектор и/или интерактивна дъска. Някои теми от обучението по тези учебни предмети включват и изучаване на знания, за които тази материална база е недостатъчна за постигане на желаното ниво на дидактически принцип за нагледност. В настоящия доклад е представен проект на учител, който преподава информационни технологии в ЧСУ „Свети Георги“, където е създаден малък музей на компютърната техника вътре в класната стая, включващ както стари, така и модерни компютърни компоненти и периферни устройства. Чрез него учениците могат не само да видят как изглежда реално част от изучавания от тях хардуер, но могат също да го докоснат с ръцете си, разглобят и да изучат механиката му.

Възможности за изучаване на хардуерни компоненти в учебните програми. По някои от темите в учебниците по информационни технологии (ИТ) се изучават знания, свързани с компютърен хардуер, за които е по-трудно учениците да получат възможност „да пипнат“ реални компютърни компоненти. След направен детайлен преглед на съществуващите утвърдени учебни програми от Министерство на образованието и науката (МОН), бяха установени следните теми или части от теми:

1. Като част от обобщената тема *Дигитални устройства* в [8] ученикът трябва да *познава основните компоненти на дигиталните устройства – стационарни и мобилни*, а освен основното ново понятие *дигитално устройство* в учебната програма се споменава и *входно и изходно устройство*;
2. В четвърти клас по Компютърно моделиране се изучават само софтуерни продукти, но възможностите на ЗИП по ИТ [1] за демонстрация на хардуерни устройства е голяма. В обобщената тема *Компютърна система и информационна култура* се очаква ученикът да *изброява основните части на компютърната система и обяснява тяхното функционално предназначение*, както и да *умее да предвижда резултата от действията си при работа с компютърна система и периферни устройства*, което само по себе си предполага и евентуално разглеждане на различни такива устройства;

3. В темата *Компютърни системи и информационни технологии* в [2] се изисква ученикът да може *да разпознава и изброява основните компоненти на компютърната система и да описва тяхното функционално предназначение, да класифицира устройства към съответната група според предназначението им – входни, изходни, входно-изходни, да изброява и разпознава най-често използваните носители на информация и да разпознава устройствата, необходими за работа с различните видове носители на информация.* Това е огромно поле за демонстрация на множество периферни устройства. Освен това пак в [2] в темата за *звук и видеоинформация* могат нагледно да се представят новите понятия *звукова карта; видеокарта; тонколони; микрофон; слушалки*;
4. При изучаване на подтемата *Носители на информация и файлови формати* в [3] се изисква ученикът да може да *използва различни носители на информация при работа с файлове*, което е широко поле за практическо използване на множество периферни устройства – както модерни като SSD, HDD дискове, флаш памети и оптични устройства, така и стари като флопи дискови устройства и защо не да се покажат дори ретро носители като перфокарти и перфоленти (които авторите смятат също като много подходящ нагледен пример, когато ученикът се учи да *изброява и сравнява основни единици за измерване на информация*). Естествено на толкова начално ниво в обучението би било по-подходящо учениците да се запознаят с тези технологии само бегло и по-скоро като атракция, а не да се изучават в детайли;
5. В темата *Компютърна система и защита на данните в нея* от [4] се очаква ученикът да *описва основните технически параметри на компонентите на компютърната система и обяснява как те влияят на нейната производителност* и да *разчита описание на компютърна конфигурация.* Част от новите понятия в тази тема са *процесор*, *оперативна памет (RAM)* и *постоянна памет (ROM)*;
6. При подтемата *Съвременни компютърни системи* в [5] за ученика се поставя изискване да *познава основни факти от историята на компютърните системи*, което авторите на настоящия доклад смятат за изключително полезно за учениците да получат досег до стар хардуер, който не е лесно достъпен в днешно време. Също така се изисква обучаемият да *познава основните принципи, върху които са конструирани съвременните компютри* и да *сравнява техническите характеристики на основните компоненти на съвременни компютърни конфигурации* – знания, чието изучаване може много силно да бъде подпомогнато от нагледно представяне и изучаване на компютърните компоненти;
7. В темата *Компютърни системи* в [6] се поставя фокус основно върху суперкомпютри и технологии от тип облак – техника, която е невъзможно да бъде налична нагледно в класната стая, но в темата за *Компютърни мрежи и услуги* се появяват редица нови понятия като *мрежова платка*, *модем*, *многопортов комутатор (switch)*, *маршрутизатор (router)*, *коаксиален кабел*, *кабел усукана двойка* и *оптичен кабел*, които с лекота биха могли да бъдат налични включително за практически занятия за учениците (например подготовка на *прав* и *обърнат лан кабел* чрез специализирани клещи, директна връзка между два компютъра, връзка посредством комутатор и т.н. биха били прекрасни

възможности за изучаване на знанията чрез практически труд);

8. В [7] учениците се запознават с работата на *цифров фотоапарат*, *видеокамера* и *диктофон*. Въпреки, че е възможно учениците да работят чрез заготовки на изображения, видео и музикални клипове при евентуална липса на техника, би било значително по-добре, ако разполагат с необходимите им устройства и сами да направят записите.

Вижда се, че елементи от изучаване на хардуер има във всеки клас от 3. до 9. Това мотивира първият автор на този доклад да намери финансиране за доставка на стъклени витрини, където да бъде възможно най-различни съвременни и стари компютърни компоненти да бъдат изложени под формата на хронологична експозиция. От лични колекции на авторите и познати хора от социалните мрежи този своеобразен скромен музей на компютърния хардуер постепенно започна да се попълва с най-разнообразна техника.

Подбор на наличните компоненти и визия за употребата им. Основната визия е, че осигурените хардуерни компоненти не трябва да служат само като музейна експозиция и да бъдат гледани зад витрините, а трябва да могат да бъдат докоснати, сглобявани и разглобявани от учениците. В този смисъл дори старите компютърни компоненти, които вече се намират все по-трудно, няма да бъдат разглеждани като някаква историческа ценност, а ще бъдат достъпни за работа. Някои от устройствата, които традиционно имат свои защитни кутии (например HDD, SSD дискове, четци на CD/DVD и други периферни устройства) ще бъдат целенасочено оставени със сравнително лесна възможност да бъдат разглобени от страна на учениците, за да може да видят вътрешната им механика. Целта на авторите е да се предизвика повишен интерес чрез подобни практически дейности – нещо, което да откъсне децата от традиционното пасивно гледане на снимки и видеоклипове и да ги въвлече с активна дейност в учебните часове. Подобна идея с цялостна визия за начален курс по компютърни архитектури е представена в [10].

Реализация на проекта. Проектът е реализиран в ЧСУ „Свети Георги“ в София. В компютърния кабинет освен традиционните П-образно разположени работни компютърни системи, са поставени маси в центъра на стаята, където учениците могат да разглеждат различни хардуерни компоненти и да работят в екип. На допълнителни места в стаята има витрини и маса, на която са изложени експонатите от различни компютърни части. На фиг. 1 и фиг. 2 е показано разположението на част от техниката в компютърния кабинет и работните маси. На фиг. 3–8 е показана част от експозицията.

Кабинетът се използва от общо 15 учебни групи от ученици от 3. до 11. клас. Всички те изучават по един час седмично информационни технологии. С оглед на това, че идеята е реализирана съвсем наскоро – от началото на 2019/2020 учебна година – би било некоректно да се прави опит за статистически анализ на ефекта от нововъведенията в класната стая, но би могло да се представи субективното мнение на учителя, който провежда обученията. То засега е изцяло положително:

- Учениците показват голямо желание за досег с компютърните компоненти;
- Разказите за стара компютърна техника, когато тя е изложена на работния плот, се слушат със значително повишен интерес спрямо случаите, в които се разглеждат картинки, статии или видеоклипове на мултимедийния екран;



Фиг. 1. Витрина и маси за техника



Фиг. 2. Общ изглед на класната стая



Фиг. 3. Дискети



Фиг. 4. Кабели



Фиг. 5. Видео и лан карти



Фиг. 6. HDD и FDD



Фиг. 7. Мишки



Фиг. 8. Дъно и рам памет

- Децата са активни и много по-често задават допълнителни въпроси;
- Наблюдава се пренасяне на разговори между учениците, свързани с учебни въпроси, по време на междучасията;
- На няколко пъти учителят е успявал да се възползва от наличието на допълнителната материална база, за да даде допълнителни индивидуални задачи на ученици, които са се справили по-бързо от останалите. Такива задачи са например да отворят компютърна кутия с отвертка и да намерят даден компонент; да свържат дадено хардуерно устройство с компютърната конфигурация; да се опитат да открият чрез интернет какво представлява дадено хардуерно устройство и да обобщят кратко резюме с информация за него и др. При всички подобни допълнителни дейности учителят не наставлява пряко учениците как

да решат поставената задача, а ги оставя сами да се справят с нея;

- Наблюдава се значително повишаване на физическата активност в класната стая – децата обикалят масите, а не стоят през целия час по столовете пред компютърния екран.

Винаги при реализацията на какъвто и да е обучителен проект се поставя въпросът за финансовата рамка за неговата реализация. За представеното материално осигуряване не са изхарчени почти никакви средства, но това се дължи основно на дарителство на хора през социалните мрежи. Само стъклените витрини са осигурени през бюджета на училището. Едно по-мащабно приложение на подобен проект в множество училища, разбира се, би било по-трудно за осъществяване, но в крайна сметка може да се отбележи, че отделените финансови средства със сигурност няма да бъдат значителни. Освен това не е непременно оборудването на залата да се прави накуп, а може да се натрупва постепенно. Така например от исторически аспект можем да видим как в [9] е показан начин да се натрупа поетапно много скъпа (спрямо сегашните цени) микропроцесорна техника от страна на училищата, като успоредно с това учениците получават ценни знания покрай нейното асемблиране. При настоящия проект не става въпрос толкова за финансова инвестиция, колкото за инвестиране във време за търсене на подходящи дарители.

Вероятно в повечето училища вече има подобни съществуващи практики. В почти всички компютърни кабинети, до които авторите са имали досег, е имало някакво налично количество стара компютърна техника, която епизодично се употребява в часовете по подобен начин. Най-често обаче е затворена в шкафове и не е изложена. Например подобен набор от части с исторически оттенък (макар и в по-малък обем) може да бъде намерен в кабинет 24 на НПМГ „Акад. Любомир Чакалов“. Изключенията са по-скоро при напълно нови компютърни зали, които са претърпели основен ремонт и съответно старата техника, която е била в тях, е била бракувана.

Естествено при специализирани училища (например ТУЕС в София, НПГ по КТС в Правец и други професионални гимназии) материалната база не е просто някаква добавка, а задължително изискване. При подобни училища децата не просто трябва да имат основни знания за компютърната техника, а трябва да работят активно с нея с практически дейности. Авторите смятат, че практиката да се предоставя възможност за физически досег до изучавани компютърни компоненти е добре да добие по-широка гласност сред учителската общност и да започне да се експериментира по-сериозно със системен подход при основните училища и неспециализираните гимназии. Предварителното очакване е, че такива дейности ще доведат до допълнителна мотивация за учене при учениците, което ще успее да компенсира „изхабеното“ допълнително учебно време.

Заключение. Представеният проект цели да разчупи постепенно наложилия се стереотип, че компютърният кабинет е просто стая, пълна с компютри. Идеята е да се покаже, че той може лесно и достъпно да бъде превърнат в лаборатория, в която учениците да експериментират не само със софтуер, но и с компютърен хардуер. По този начин компютърната зала може да въвлече учениците в повече екипни дейности, с което не просто да се повиши интересът, но и включително да се добави известна доза физическа активност. Началните резултати от пилотния експеримент са по-скоро положителни – отчетени са позитивни ефекти върху учебния процес,

които успешно тушират единствения негатив, който се изразява в малко повече отделено учебно време.

ЛИТЕРАТУРА

[1] МОН. Учебна програма по информационни технологии за IV клас (задължително-избираема подготовка), 2019 г.

[2] МОН. Учебна програма по информационни технологии за V клас (общообразователна подготовка), в сила от учебната 2016–2017 г.

[3] МОН. Учебна програма по информационни технологии за VI клас (общообразователна подготовка), в сила от учебната 2017–2018 г.

[4] МОН. Учебна програма по информационни технологии за VII клас (общообразователна подготовка), в сила от учебната 2018–2019 г.

[5] МОН. Учебна програма по информационни технологии за VIII клас (общообразователна подготовка), в сила от учебната 2017–2018 г.

[6] МОН. Учебна програма по информационни технологии за IX клас (общообразователна подготовка), в сила от учебната 2018–2019 г.

[7] МОН. Учебна програма по информационни технологии за XI клас (профилирана подготовка), модул 2. „мултимедия“, в сила от учебната 2020–2021 г.

[8] МОН. Учебна програма по компютърно моделиране за III клас (общообразователна подготовка), в сила от учебната 2018–2019 г.

[9] C. C. Price. Microcomputers in the classroom, *The Mathematics Teacher* **71**, *5*, Computers and Calculators (1978), 425–427.

[10] T. Urness. Teaching computer organization/architecture by building a computer. Proceeding WCAE'07 Proceedings of the 2007 workshop on Computer architecture education, 2007, 72–76.

Гергана Карабельова
ЧСУ „Свети Георги“ София
бул. „Никола Вапцаров“ № 47
1407 София, България
e-mail:
g.karabelyova@stgeorgeschool.eu

Филип Петров Петров
Факултет по математика и информатика
СУ „Св. Климент Охридски“
бул. „Джеймс Баучър“ № 5
1164 София, България
e-mail: philip@abv.bg

IT LAB AND MUSEUM IN THE CLASSROOM

Gergana Karabelyova, Philip Petrov

The paper presents a project in St. George International School & Preschool in Sofia for the exams of Information Technologies from grade 3 to 11. A computer hardware museum is built in the classroom. The students from all grades are using the historical and modern computer parts as a physical touch with what they must learn in some lessons. The first results from the study show that the students are much more active when they can "touch and feel" the hardware compared to learning from photos, internet articles or videos.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ОБУЧЕНИЕТО ПО ТЕКСТООБРАБОТКА С LaTeX ЗА СПЕЦИАЛНОСТ ФИНАНСОВА МАТЕМАТИКА В РУСЕНСКИ УНИВЕРСИТЕТ „АНГЕЛ КЪНЧЕВ“

Стефка Караколева

Статията представя практически опит в преподаването на текстообработка с LaTeX за студенти, специалност „Финансова математика“ в Русенския университет „Ангел Кънчев“. Обучението в курса има за цел запознаване на студентите с основите на издателската система LaTeX и изграждане на умения за самостоятелно създаване на електронни документи, съдържащи математически формули, графики и програмен код, предназначени за публикуване на хартия, електронен носител и в Интернет. Представено е съдържанието на курса: изучаване на основните структури в LaTeX-документа, плаващи обекти – фигури и таблици, математически формули, масиви, матрици, теореми и дефиниции, създаване и импортиране на изображения, създаване на хипертекстови документи и електронни учебници.

Въведение. Обучението по текстообработка с LaTeX има за цел запознаване на студентите с основите на издателската система LaTeX и изграждане на умения за самостоятелно създаване на електронни документи, съдържащи математически формули, графики и програмен код, предназначени за публикуване на хартия, електронен носител и в Интернет.

Обучението в курса включва лекции и практически упражнения. В рамките на лекционния материал подробно се разглеждат изискванията при оформяне на научен документ, работа с обекти, фигури, таблици, двумерни и тримерни графики, математически формули, изобразяване на числови данни от файл, създаване и оформяне на големи документи и презентации, както и създаване на хипертекстови документи и електронни книги. Практическите упражнения са тематично свързани с лекционния материал и целят задълбочаване на знанията на студентите. Проверката на знанията на студентите се извършва чрез две контролни работи и курсова задача, резултатите от които служат при оформяне на текуща оценка по дисциплината [2, 3, 4].

1. Методически аспекти на обучението. Обучението на студентите по текстообработка с LaTeX се извършва през пети семестър в компютърна зала. Всеки студент има индивидуално компютърно работно място, включено в мрежата на Русенския университет. Залата е оборудвана с мултимедия, което дава възможност за нагледно преподаване, демонстриране от страна на преподавателя и незабавно изпълнение на поставените задачи от страна на студентите.

Осигурен е и достъп на студентите до електронен вариант на курса в електронната платформа на Русенския университет E-learning Shell [2], където има материали за самоподготовка – лекции, упражнения, тестове, задания за подготовка на контролни работи, примерни варианти за изпит и др.

1.1. Съдържание на курса.

- Издателски системи на основата на TEX– исторически бележки. MiKTEX– съвременна LATEX– система за OS Windows. Потребителски интерфейс WinEdt. Инсталиране на MiKTEX, настройки на език и включване на речник в WinEdt.
- Изисквания при оформяне на научен документ. Структура на LATEX-документа. Технология за създаване на документи. Видове стилове за писане на книги, статии, презентации. Концепция на използване на опции и пакети.
- Основни структури в LATEX-документа: заглавие, автор, глави, раздели и параграфи, списъци.Подреждане в колони. Забележки под печатното поле. Брояч и. Етикети. Цитиране на страници, формули, таблици и др. Плаващи обекти – фигури и таблици. Дефиниране на команди и среди.
- Математически режим. Математически символи. Математически формули в текст и на отделен ред. Номериране на формули. Масиви. Матрици. Формули на няколко реда. Математически функции. Теореми и дефиниции. Пакет AMS.
- Създаване на графики. Обзор на графичните пакети за създаване на графики. Фамилия пакети PSTricks.
- Двумерна и тримерна графика. Пакети за кодиране на графики от фамилията PSTricks. Импортиране на графични файлове в документ.
- Големи документи – клас report и book. Създаване на специални раздели – заглавна страница, абстракт, съдържание, списък на фигури и таблици, библиография, азбучен указател (индекс). Подготовка на книга за отпечатване.
- Работа с pdfLATEX при създаване на хипертекстови документи. Пакет hyperref.
- Електронни учебници (e-books).
- Създаване на цветни презентации с пакетите pdfscreen и beamer.
- Работа с електронния архив на документация и програми, свързани с TEX-системите www.ctan.org. Каталог. Потребителски групи и мейлинг-листи.

1.2. Текущ контрол и оценяване. Според учебната програма, студентите имат две контролни работи по време на обучението и курсова задача. Контролните работи са разработени така, че да проверят усвоени ли са тези умения и компетенции, необходими за бъдещата дейност на студентите.

- Първата контролна работа включва текстообработка на документ от клас статия (около 5–6 страници), който съдържа всички основни елементи на такъв тип документ. В сайта за електронно обучение има публикувани примерни документи: „Комплексни числа“, „Числени методи за решаване на системи линейни алгебрични уравнения“, „Решаване на нелинейни системи с MATLAB“, „Нелинейни уравнения“ и др.

  Както всяка творба, и статията има определена структура, елементи и правила. От това доколко авторът спазва тези правила, зависи и дали информацията, която поднася, ще бъде добре възприета от читателя. Научните издателства са възприели разнообразни стилове на форматиране и изложение на материала. Общото между тези стилове е структурирането на статията и наличието на следните основни елементи: заглавие, автори, дата, резюме (abstract),

съдържание, заглавия на глави, раздели, подраздели, препратки (references), забележки в долната част на страницата (footnotes), списък на използваната литература, списък на фигурите, списък на таблиците, разнообразни среди за форматиране на текста, за математически формули, среди от тип „теорема“.

Целта на първата контролна работа е да провери дали са усвоени от студентите основните принципи и синтаксис на командите на TEX системата за създаване на такъв тип документ. По време на занятията освен създаване на документи от клас article, се усвоява и създаването на книги, реферати, електронни книги и презентации. Но работата по тези типове документи изисква повече време и затова те не са подходящи за изпитване.

За оценяване на изпълнението на поставената задача на първото контролно по текстообработка с LATEX, е разработена точкова система:

№	Въпрос	Точки
1	В документа има ли команди за заглавие, дата и автор?	3
2	Използвана ли е среда abstract?	2
3	Използвани ли са правилно команди за секциониране на документа?	2
4	Има ли дефинирани и използвани среди от тип „Теорема“?	2
5	Има ли номериран списък?	2
6	Има ли точков списък?	2
7	Има ли описателен списък?	1
8	Използвана ли е среда verbatim в кратка и пълна форма?	4
9	Правилно ли се поставят етикети на формули и др.	5
10	Правилно ли се цитират формули в текста?	5
11	Усвоен ли е механизмът на кодиране на формули?	5
12	Познават ли се правилата за писане на многоредови формули?	5
13	Правилно ли е форматирана таблицата?	4
14	Вмъкнати ли са две графики според изискването за мащаб и размер?	4
15	Има ли правилно форматирана литература?	2
16	Има ли правилни цитати на литература?	2
17	Има ли съдържание и списъци на фигури и таблици?	2
18	Получен ли е краен продукт за екран?	2
19	От документа личи ли, че студентът познава и прилага основните принципи на компютърна текстообработка?	5
20	Налице ли е целият документ (допуска се липса на текст)?	5
21	Налице ли са всички формули?	10
22	Оценка на стила на писане от 2 до 6	6
	Общ брой точки:	80

Фиг. 1. Точкова система за критерии за оценка

Оценката на първата контролна работа се пресмята по формулата: $O = 2 + k * 0.05$, където k е брой точки.

- Втората контролна работа е предназначена да провери уменията и знанията на студентите за кодиране на изображения с пакетите PSTricks. Тук критериите за оценка се определят от вида на задачите, поставени в този момент. Правилно използване на синтаксиса на PSTricks носи 5 точки на всяка от двете задачи, изобразяването на всеки верен елемент носи по една точка. Общият брой точки

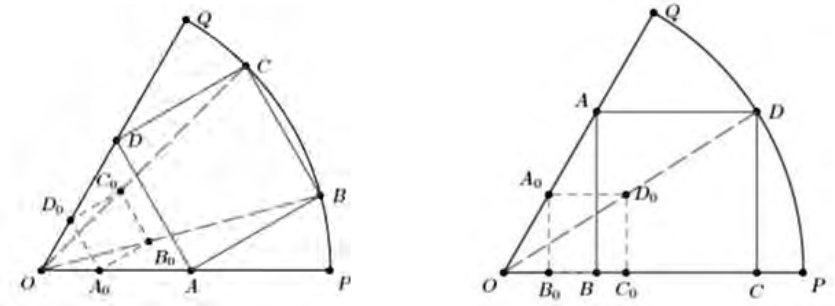
за двете задачи е 40. Оценката се пресмята по формулата: $O = 2+k*0.1$, където k е брой получени точки.

- Курсовата задача, с обем около 20-30 страници, е част от учебник по математика, съдържащ много формули. Задачата е всеки студент да форматира една глава от учебник, за да придобие практически умения за работа с ръкопис, след което един студент обединява всички глави в книга чрез използване на класа book.

2. Типични задачи, включени в курса по текстообработка.

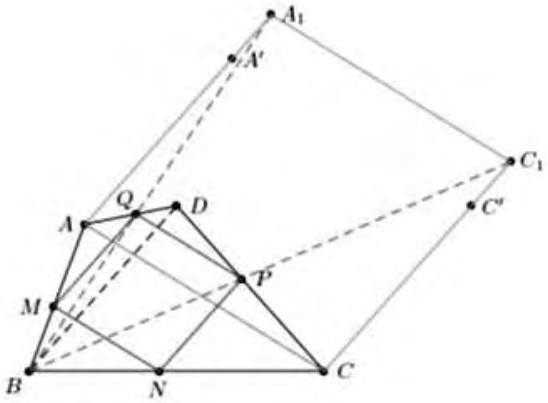
Задача 1 (Вписан квадрат в сектор)**.** *Даден е сектор с радиус* 11 *и остър ъгъл* 66°. *В сектора да се впише квадрат в случай, че:*

1. *Два от върховете на квадрата лежат на радиусите, а другите два – на дъгата на сектора;*
2. *Един от върховете на квадрата лежи върху дъгата на сектора, а останалите върхове – върху радиусите на сектора* (Фиг. 2), [1].



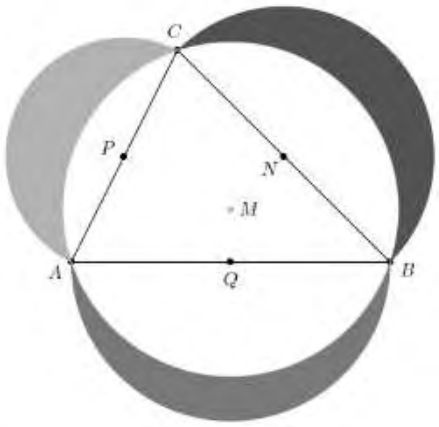
Фиг. 2. Вписан квадрат в сектор

Задача 2 (Вписан ромб в четириъгълник)**.** *Даден е произволен изпъкнал четиривъгълник. В четиривъгълника да се впише ромб, чиито страни са успоредни на диагоналите на четиривъгълника* (Фиг. 3), [1].



Фиг. 3. Вписан ромб в четириъгълник

Задача 3 (Задача за хипократови луни)**.** *Даден е остроъгълен триъгълник. Да се начертае описаната окръжност и луничките, образувани от дъгите между нея и полуокръжностите с диаметри страните на триъгълника* (Фиг. 4), [1].



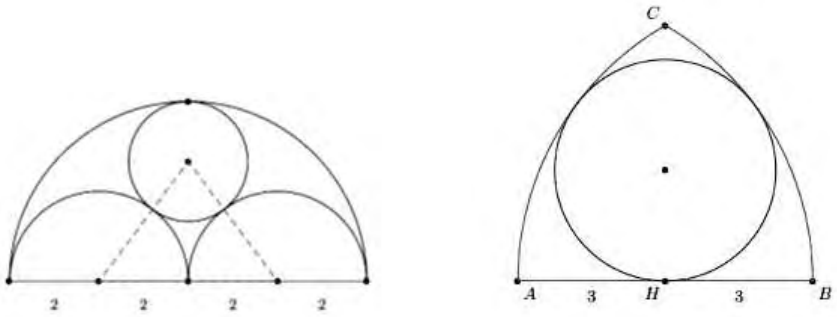
Фиг. 4. Задача за хипократови луни

Според археологическата наука романската архитектура е създадена през периода от XI до средата на XII век. В нея са използвани технологии и форми от архитектурата на Римската империя, най-вече римският цилиндричен свод, полукръглата арка и кулите. Готическата архитектура възниква през XII век във Франция и е характерна със заострените кули и арки, оребрени сводове, големи ажурни прозорци и богато украсени фасади. На Фигура 5 са представени изображения на прозорци от две църкви – в Истанбул, Турция (романски стил) и в Краков, Полша (готически стил).



Фиг. 5. Архитектурни елементи: романски и готически прозорци

Задача 4 (Изобразяване на романски прозорец)**.** *В романски прозорец със страна 8 са вписани две полуокръжности върху основата с диаметри* 4*. Да се впише окръжност, която се допира до двете полуокръжности и до горната страна на прозореца* (Фиг. 5 и 6) [1].



Фиг. 6. Изобразяване на романски (вляво) и на готически прозорец

Задача 5 (Изобразяване на готически прозорец)**.** *Даден е готически прозорец със страна 6. Да се впише в него окръжност* (Фиг. 5 и 6), [1].

3. Отзиви от студенти за курса. Обучението по текстообработка с LaTeX се провежда от 2013 година. Тук са представени две мнения на студенти:

Слави Георгиев – докторант: Курсът по текстообработка с LaTeX е един от практическите курсове с най-голяма стойност от прослушаните от мен и колегите ми през годините на обучение в бакалавърската степен. Настоящата ми работа като докторант по финансова математика е пряко свързана с публикуване и докладване на резултати от изследванията ми в различни научни издания. Както е известно, почти всички научни организации изискват научната публикация да е написана с TeX-базирана издателска система. В тази връзка, на мен ми се налага почти ежедневно да използвам LaTeX и да прилагам знанията си, придобити по време на обучението. Разбира се, диспиплината, водена от д-р Караколева, предоставя фундаментални умения, които изискват надграждане за професионална научна дейност. Днес, поглеждайки назад, за мен е трудно да си представя работата без основополагащите знания за обработване и редактиране на статии и книги, които получих по време на курса.

Александра Клименко – студентка в трети курс: В момента подготвям курсова работа по текстообработка с LaTeX. През семестъра беше трудно, защото използването на системата TeX изисква промяна в начина на мислене, но с желание, упоритост и много практика, постепенно става все по-лесно. През миналата година по програма Еразъм бях в University of Konstanz, Германия. Там всички – и студенти, и преподаватели, пишат само с LaTeX. Заданията на студентите, презентациите, всичко се подготвя с LaTeX. Тази програма се преподава във всички водещи световни университети. Тя е инструмент при изготвяне на презентации, дипломни работи, реферати и статии. Убедена съм, че владеенето на системата е предимство за всички любознателни студенти. Чувствам се подготвена и ще използвам LaTeX за компютърна текстообработка на статии и дипломната ми работа.

Заключение. Обучението в курса по „Текстообработка с LaTeX“ създава у студентите в бакалавърския курс на специалност „Финансова математика“ практичес-

ки умения за самостоятелно създаване на научни документи: научни статии, реферати, дипломни работи, презентации. Подбраните задачи и разгледаните подходи за кодиране на изображения в практическите упражнения са занимателни, използват нестандартни математически идеи и предизвикват откривателския дух на студентите. Знанията, усвоени от студентите, се прилагат в ежедневната им дейност, при обучението им по програма Еразъм в европейски университети, при компютърна текстообработка и презентация на дипломната им теза. Разработеният курс по текстообработка с LaTeX е практически ориентиран и приложим за обучение на студенти, докторанти и научни работници.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Георгиев, С. Караколева. Създаване на изображения чрез LaTeX-пакети от фамилията PSTricks. Сборник доклади на студентска научна сесия, Русенски университет „Ангел Кънчев“, Русе, 2016, 14–23.

[2] С. Караколева. Текстообработка с LaTeX. Русенски Университет „А. Кънчев“, 2013, http://e-learning.uni-ruse.bg

[3] С. Караколева. Въведение в издателската система LaTeX2e. Русенски Университет „А. Кънчев“, 2005, (Налична в Университетска библиотека и сайта за електронно обучение http://ecet.ecs.uni-ruse.bg/else/).

[4] Д. Родригес, С. Р. Караколева. Пакет pst-eucl. Евклидова геометрия с PSTricks. CTAN, Comprehensive TeX Archive Network, 2010, стр. 1–56, ISBN The LaTeX PPL, https://www.ctan.org/pkg/pst-eucl-translation-bg.

[5] G. Williams. The TeX Catalogue: www.can.org/help/Catalogue/catalogue.html

[6] MiKTeX Project page: http://www.miktex.org

Стефка Романова Караколева
Русенски Университет „Ангел Кънчев“
Катедра „Приложна математика и статистика“
ул. „Студентска“ 8
7017 Русе, България
e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg

LaTeX TYPESETTING TRAINING IN FINANCIAL MATHEMATICS AT “ANGEL KANCHEV” UNIVERSITY OF RUSE

Stefka R. Karakoleva

The article presents practical experience in teaching Typesetting with LaTeX for students, majoring in Financial Mathematics at the Angel Kanchev University of Ruse. The course familiarizes the students with the bases of computer typesetting system LaTeX and builds skills for independent creation of digital documents with a lot of mathematical text, figures and computer code in various scientific areas for publishing on paper, digital media or Internet. The content of the course is presented: type and structure of a document, floating objects – figures and tables, mathematical formulas, arrays, matrix, creation and importing of graphics, theorems and definitions, hypertext documents and e-books.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ИЗПОЛЗВАНЕ НА ПОМОЩНИТЕ ФАЙЛОВЕ В ОНЛАЙН СЪСТЕЗАНИЕТО „VIVA МАТЕМАТИКА С КОМПЮТЪР“*

Петър Кендеров, Тони Чехларова

Разглежда се една от спецификите на онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“, което се организира от 2014 г. от Института по математика и информатика при Българска академия на науките, Съюза на математиците в България и телекомуникационната компания VIVACOM. Задачите, давани на това състезание, често се съпровождат от файлове на *GeoGebra*, които подпомагат изследването и решаването на съответната задача. В статията е показано с конкретни примери, как тези файлове допринасят за едновременното развитие и на дигиталната и на математическата компетентност на учащите се. Тези файлове са и удобен инструмент за популяризиране сред ученици, учители и родители на образователни ресурси, изработени със специализиран динамичен софтуер.

Въведение. Онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“ се организира от Института по математика и информатика на Българска академия на науките, Съюза на математиците в България и телекомуникационна компания VIVACOM [1]. Основните цели още от самото му основаване бяха: едновременно развитие на дигиталната и математическата компетентности и популяризиране сред ученици, учители и родители на образователни ресурси, разработени със специализиран динамичен софтуер.

Една от характерните особености на състезанието е, че към голяма част от задачите се предоставят помощни файлове (изработени с безплатната за ползване система *GeoGebra* [2]), които подпомагат изследването и решаването на съответната задача. Тези файлове обикновено не са във вид „готов за пряка употреба“. Необходимо е нещо в тях да бъде променено и съобразено с данните на съответната задача. Обикновено трябва да се променят стойности – с плъзгач, да се премести обект, например точка, да се въведат стойности на параметър и др. Понякога се налага да се добавят нови команди. Във всеки случай е необходимо ученикът да разбере какво всъщност прави помощният файл, каква е логиката зад него и как той действа. Това развива алгоритмичното мислене и става основа за активно използване на

*Изследването е реализирано с подкрепата на Националната научна програма „Информационни и комуникационни технологии за единен цифров пазар в науката, образованието и сигурността (ИКТвНОС)“, финансирана от МОН, и проект „Изследване на концептуалното знание и наличието на грешни представи в часовете по математика и природни науки“ между БАН и МАНИ.

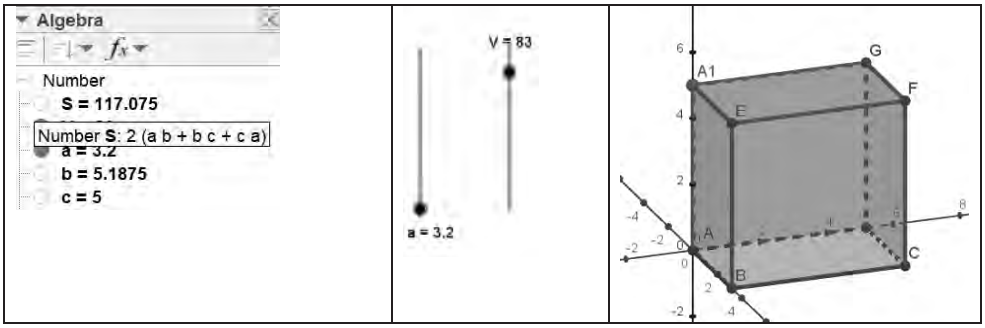
Ключови думи: онлайн състезание, дигитална компетентност, математическа компетентност, образователни ресурси.

дигиталните технологии, включително и до степен на създаване на собствени дигитални ресурси. Така неусетно се усвояват и възможностите на софтуера. Освен това се прониква по-дълбоко и в математическата същност на задачата. Участниците могат да използват и други изчислителни среди и средства (не само *GeoGebra*), за да решат задачата. Тъй като от значение при равен брой точки е времето за работа, участникът трябва да прецени с какво помощно средство ще си служи при решаване на задачата. Изборът на подходящ инструмент за решаване на дадена задача също е част от дигиталната компетентност.

Видове отговори на задачите в онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“. Според вида на отговора задачите в състезание „VIVA Математика с компютър“ се разделят на три вида: с възможност за избиране на точно един от n дадени отговора; с възможност за избиране на k от n дадени отговора, където $k \leq n$; със свободен отговор, който е число в десетичен запис, обикновено с посочена точност [1]. Оценяването на свободните отговори е тип мишена [3], т.е. максимален брой точки се получават за верен отговор, а когато отговорът е приблизително верен, броят на получените точки съответства на близостта на дадения отговор до верния. Помощни файлове може да има към задачи и от трите вида. Тук ще илюстрираме казаното по-горе с конкретни примери на задачи, давани на състезание „VIVA Математика с компютър“.

Модификация на помощни файлове.

Задача 1. (Фиг. 1.) Намерете възможно най-малката пълна повърхнина на правоъгълен паралелепипед с обем 83 cm^3, ако единият му ръб е с дължина 5 cm. Запишете отговора в cm^2 с точност до стотните.



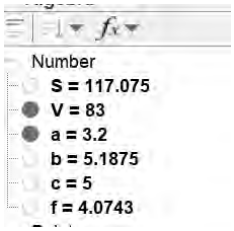
Фиг. 1. Задача 10 от Работния лист за 8. клас, дадена на състезанието през декември 2019 г.
`http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview{\&}testidselectedbyuser=196`

Можем да считаме, че $c = 5$. Следователно, на всяко положително число a съответства правоъгълен паралелепипед с дължина a, ширина $b = \dfrac{83}{5a}$ и височина $c = 5$. Задачата се състои в това, да намерим такова a, за което пълната повърхнина $S = 2\,(ab + bc + ca)$ на съответстващия на това a правоъгълен паралелепипед е най-малка. Помощният файл към тази задача е достъпен посредством връзката под фиг. 1. Самата фигура показва един изглед от него. Вижда се плъзгач за обема

V на правоъгълния паралелепипед и плъзгач за числото a. Очаква се участникът сам да постави плъзгача за V в позиция $V = 83$. Тогава помощният файл пресмята околната повърхнина S по горната формула за всяко отделно число $a > 0$. С движение на плъзгача за a от долния край – нагоре участникът в състезанието вижда, че стойността на S първоначално намалява, достига някаква минимална стойност, а после започва да расте. Намирането на минималната стойност на S може да стане или с внимателно боравене с плъзгача, или като се използва командата

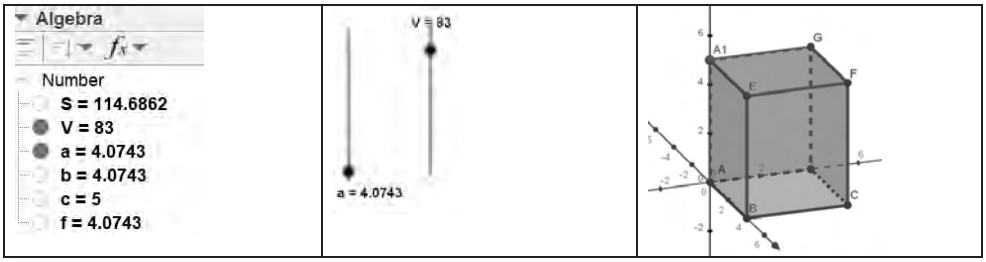
`Minimize(<Dependent Number>, <Free Number>)`

за намиране на минимум на величина (в случая S), която зависи от друга величина (в случая – от числото a). За целта е необходимо първо да се изведе на екрана „Командният ред“ („Поле за въвеждане на команди“ от менюто на фиг. 10), да се запише в него командата `Minimize(S,a)`, след което тя да се изпълни (с щракване върху клавиша „Enter“). Като резултат *GeoGebra* вписва в алгебричния прозорец число, при което S приема минимална стойност и дава име на това число. На фиг. 2 това е числото $f = 4.0743$.



Фиг. 2. Минимизиране с команда

Ако сега се изпълни командата $a = f$, *GeoGebra* ще пресметне и впише в първия ред на алгебричния прозорец минималната пълна повърхнина $S = 114.6862$ и ще изобрази съответния на числото $a = f = 4.0743$ паралелепипед в прозореца за тримерна графика (фиг. 3). Като отговор на задачата следва да се впише 114.69.



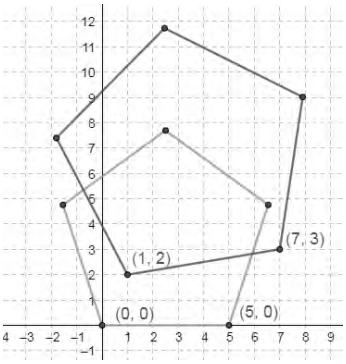
Фиг. 3. Визуализация на решението

От участвалите 199 ученици в тази група 11,6% са получили точен отговор, 9,9% – с точност до цялата част, 10,1% – с точност 2 единици. Независимо от това, че 35,2% не са посочили отговор, като имаме предвид големия брой на тези, които за първи път участват в състезанието, считаме, че е висок процентът на решилите задачата с достатъчно добра точност. Практиката показва, че след първото участие

стремежът към повишаване на точността на свободните отговори нараства.

Помощният файл към която и да е задача се предоставя в два формата: а) като .html-файл, който се отваря директно в Работния лист с някой от обичайните браузери и б) като .ggb-файл (*GeoGebra* файл), който може да се свали на използваното устройство и да се отвори „резидентно“ (ако системата *GeoGebra* вече е инсталирана на устройството). Във втория случай е по-лесно да се правят модификации на файла и да се постига висока точност на отговора. Това обаче е за сметка на известна загуба на време (за свалянето и отварянето на .ggb-файла).

Задача 2. (Фиг. 4.) Намерете лицето на сечението на двата правилни петоъгълника. Запишете с точност до стотните.

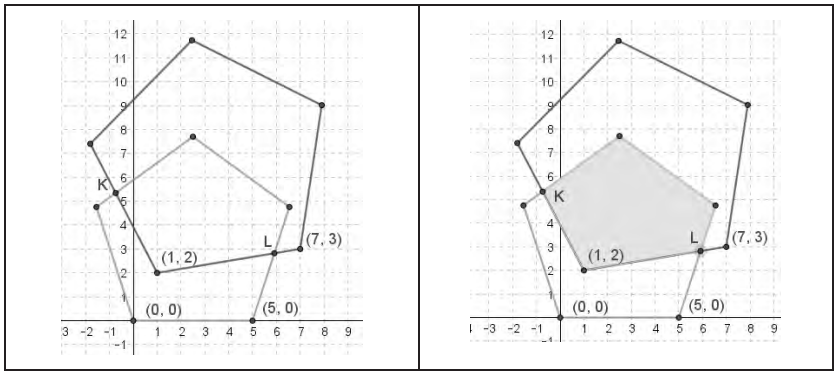


Фиг. 4. Задача 2 от Работния лист за 10. клас, дадена на състезанието през септември 2017 г.
`http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview{\&}testidselectedbyuser=109`

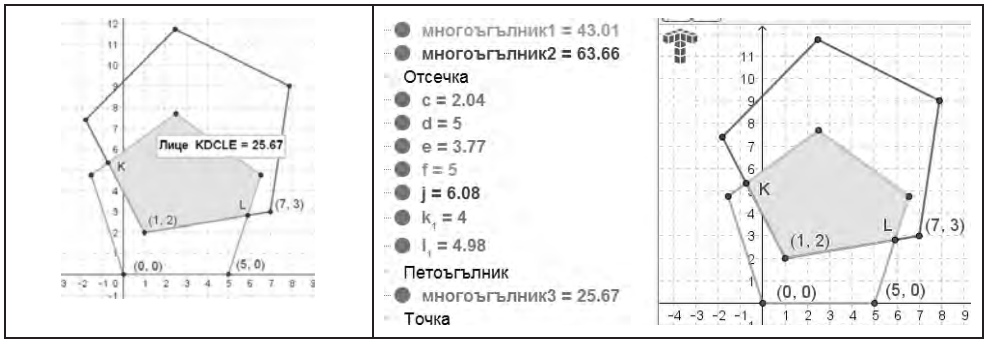
И тук помощният файл е достъпен чрез връзката под фиг. 4. Той просто изобразява на екрана двата дадени правилни многоъгълника. Сечението им също е петоъгълник, като три от неговите върхове са вече известни. Очаква се участниците в състезанието да намерят останалите два върха, като построят пресечните точки K и L (фиг. 5) на две двойки отсечки. За целта могат да използват бутона  за пресичане на обекти.

Лицето на сечението може да се намери чрез активиране на бутона за лице на фигура  или на бутона  за построяване на многоъгълник, последвано от обхождане на върховете с щракване върху всеки от тях. В първия случай лицето на сечението е изведено в геометричния прозорец (лявата част на фиг. 6), а във втория е записано в последния ред на алгебричния прозорец като името **многоъгълник3 = 25.67** (дясната част на фиг. 6).

Решавалите задачата са участници във втори кръг, до който се допускат добре представилите се в първи кръг състезатели. Те вече имат опит и се стремят да постигнат исканата точност. Всичките 5 участници са се ориентирали добре и са използвали правилно предоставения помощен файл. Получили са точния отговор и съответно максималния брой точки за тази задача. В стандартните тестове такъв резултат би означавал, че задачата не е подходяща за състезанието, защото с нея



Фиг. 5. Допълнителни построения



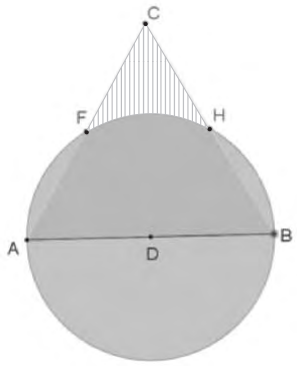
Фиг. 6. Извеждане на числов резултат

и без нея класирането ще е едно и също. В това състезание обаче е от значение и времето, за което е намерено решението на 10-те задачи. При равен брой точки, предимство има онзи състезател, който по-рано е подал попълнения с отговори Работен лист.

Задача 3. (Фиг. 7.) Даден е равностранен триъгълник ABC със страна 7 cm. Построен е кръг с диаметър AB. Намерете лицето на частта от триъгълника ABC, която е извън кръга (на фигурата тази част е защрихована вертикално) [4].

Очаква се участниците да намерят, например с бутона , пресечните точки H и F на триъгълника и окръжността. Средата D на отсечката AB може да се намери с бутона  за среда на отсечка. След това, с активиране на бутона 

и избиране (с щракване върху тях) на точките D, H, C, F, системата *GeoGebra* пресмята лицето на многоъгълника DHCF и го записва в алгебричния прозорец като **q1 = 10.60881**. Накрая, чрез бутона  за кръгов сектор и избиране на точките D, H и F (в този ред – по посока обратна на часовата стрелка) системата *GeoGebra* пресмята лицето на кръговия сектор DHF и го записва в алгебричния прозорец



Фиг. 7. Задача 8 от Работния лист за 9. клас, дадена на състезание през декември 2015 г.
`http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview{\&}testidselectedbyuser=60`

като e = 6,41409. Разликата $q1 - e$ е точно лицето на частта от триъгълника ABC, която е извън кръга. Това лице е записано в алгебричния прозорец като = 4.19473. Ако в условието на задачата е указано, че се очаква да въведем отговора с точност до стотните, за отговор на задачата следва да се запише числото 4.19.

От решавалите тази задача (87 ученици) 13,8% са получили точен отговор, а още 16,1% – отговор с достатъчно добра точност, показваща, че са се ориентирали добре в използването на файла. Ще обърнем внимание, че продължителността на състезанието, което включва 10 задачи, е 1 час. Освен това стремежът е не само за справяне със задачите, а и за по-бързо подаване на решенията.

Задача 4. (Фиг. 8.)

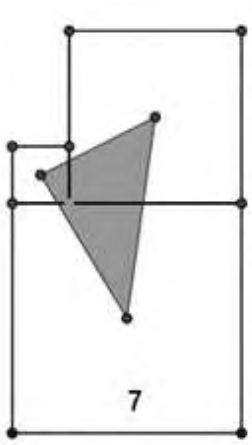
На една от страните на квадрат 7×7 cm са построени външно два квадрата, както на фигурата. Центровете на трите квадрата са върхове на триъгълник. Каква е най-малката възможна обиколка на такъв триъгълник [5]?

В предоставения помощен файл дължината на страната на големия квадрат не е 7, а е 2. Очаква се участниците да променят тази дължина от 2 на 7, например с преместване на връх. Освен това, трябва да построят центровете на трите квадрата. Това може да стане по няколко начина, като използваме свойства на квадрата и възможностите на софтуера. Като имаме предвид, че средата на всеки от диагоналите на квадрат съвпада с центъра му, можем да активираме бутона за намиране на среда на отсечка  и след това да щракнем последователно върху краищата на кой да е от диагоналите на квадрата (фиг. 9).

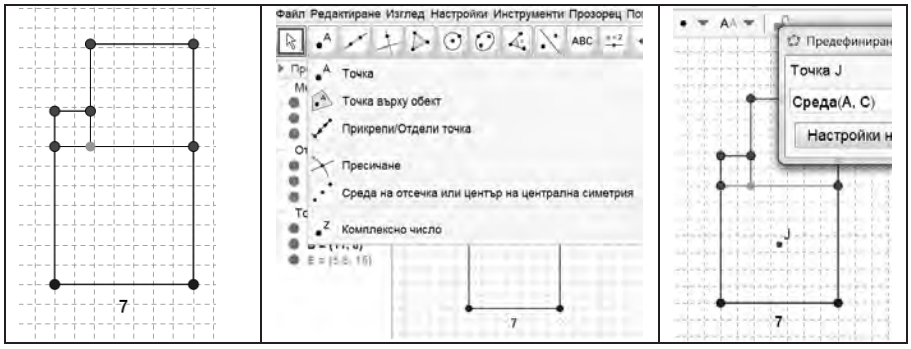
Същото се повтаря и с останалите два квадрата. Друга възможност е да се използва командата за център на правилен многоъгълник **Медицентър (<Многоъгълник>).**

За целта първо извеждаме на екрана Командния ред (полето за въвеждане на команди фиг. 10) и в него записваме **Медицентър(многоъгълник2)**.

Забелязваме, че при движение на *зелената*[1] точка от единия връх на големия квадрат към другия първоначално обиколката на триъгълника с върхове центровете на трите квадрата намалява, след това нараства (фиг. 11). Търсената точка е средата



Фиг. 8. Задача 10 от Работния лист на тема за 5.–6. клас, дадена на състезанието през декември 2018 г.
`http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview{\&}testidselectedbyuser=138`



Фиг. 9. Построяване на център на квадрат

на отсечката, по която се движи зелената точка.

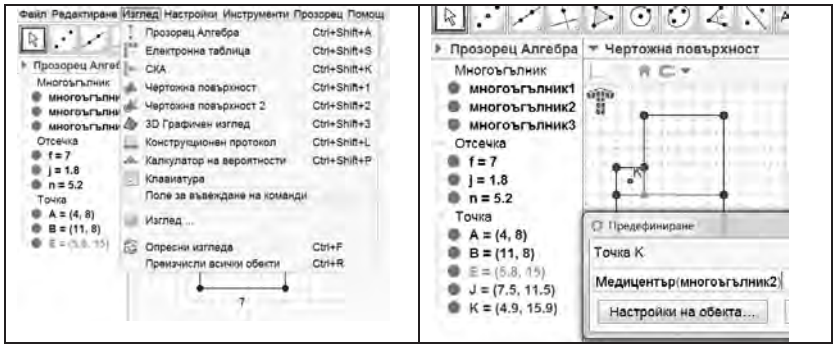
От гледна точка на симетрията можеше да се очаква, че минимумът ще се постигне в средата или в край на разглежданата отсечка.

От 267 участници 35,6% са се справили с точност под 1 с решаването на задачата.

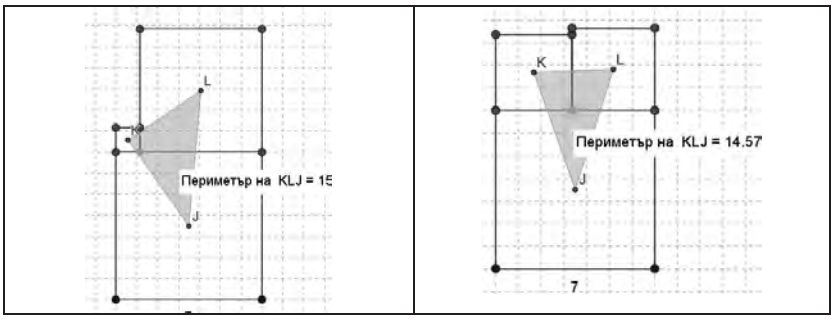
В [6], [7], [8], [9] и [10] могат да се намерят още примери за използване на файлове при решаване на задачи от онлайн състезания „VIVA Математика с компютър“ и „Тема на месеца“. От Виртуалния училищен кабинет по математика свободно могат да се използват файлове, видео материали, теми, включително темите от миналите издания на разглежданото тук онлайн състезание.

Заключение. Учениците, които вече са участвали в състезанието (един или

[1] В динамичния файл точките са оцветени (бел. ред.)



Фиг. 10. Построяване на център на квадрат чрез команда



Фиг. 11. Изследване с динамична конструкция

повече пъти), се справят по-добре със задачите от онези, които участват за пръв път. По-добре се справят и учениците на учители, които системно използват новите технологии и разработваните с тях инструменти и образователни среди при формалното или неформалното математическо образование.

Участниците в състезанието придобиват и първоначални навици за учене чрез изследване. Много от тях усещат, че кръгът от задачи, които могат да се решават със задоволителна точност още на училищно равнище (с помощта на системи като *GeoGebra*), е много голям и обхваща възникващи от практиката проблеми. Това има потенциал да промени в положителна посока негативните нагласи към образованието по математика и към математиката въобще.

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Кендеров, Т. Чехларова. Състезание *Математика с компютър и изследователски подход в образованието по математика*, 2016, 128 с.

[2] J. Hohenwarter, M. Hohenwarter, Z. Lavicza. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, **28**, *2* (2009), 135–146.

[3] G. Gachev. Online system for assessing of mathematical knowledge. In: UNESCO

International Workshop: Quality of Educa-tion and Challenges in a Digitally NetworkedWorld (eds E. Kovatcheva, E. Sendova). Za Bukvite, O'Pismeneh, Sofia, 2015, 117–122
[4] П. Кендеров, Т. Чехларова. Подготовка за състезания по математика с компютър в 9.–10. клас. Регалия 6, 2020, 32 с.
[5] Т. Чехларова, П. Кендеров. Подготовка за състезания по математика с компютър в 5.–6. клас. Регалия 6, 2020, 32 с.
[6] P. Kenderov, T. Chehlarova, E. Sendova. A mathematical theme of the month – a web-based platform for developing multiple key competences in exploratory style. *Mathematics Today*, **51**, *6* (2015), 305–309.
[7] П. Кендеров, Т. Чехларова. Състезанието „Viva Математика с компютър“ и ролята му за развитие на дигиталната компетентност на учениците. Шумен, MATTEX, 2014, 3–10.
[8] T. Chehlarova, P. Kenderov. Mathematics with a computer – a contest enhancing the digital and mathematical competences of the students. In: UNESCO International Workshop: Quality of Education and Challenges in a Digitally Networked World (eds E. Kovatcheva, E. Sendova), Za Bukvite, O'Pismeneh, Sofia, 2015, 50–62.
[9] P. Kenderov. Powering Knowledge Versus Pouring Facts. In: Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. (eds G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, B. Xu) ICME-13 Monographs, Springer, Cham, 2018, 289–306.
[10] Т. Чехларова. Подготовка на обучители за внедряване на изследователския подход в училищното образование по математика. Пловдив, Макрос 2000, 2017.

Петър Кендеров
e-mails: kenderovp@cc.bas.bg, vorednek@gmail.com
Тони Чехларова
e-mail: toni.chehlarova@gmail.com
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България

THE USE OF AUXILIARY FILES IN THE ONLINE COMPETITION "VIVA MATHEMATICS WITH A COMPUTER"

Petar Kenderov, Toni Chehlarova

The object of a paper is one of the specifics of the online competition "VIVA Mathematics with a Computer", having been organized since 2014 by the Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences, the Union of Bulgarian Mathematicians and the telecommunication company VIVACOM. The problems given at this competition are often accompanied by auxiliary GeoGebra files, which help the participants to better understand and solve the problem. The article shows, on the base of some examples, how these files contribute to the simultaneous development of both the digital and mathematical competence of students. These files are also a handy tool for promoting among students, teachers, and parents the importance of educational resources based on specialized dynamic software.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ОТНОСНО ОЦЕНКАТА НА ПОСТИЖЕНИЯТА НА УЧЕНИЦИТЕ В ТУРНИРА „ЧЕРНОРИЗЕЦ ХРАБЪР“ И В TIMSS

Борислав Лазаров

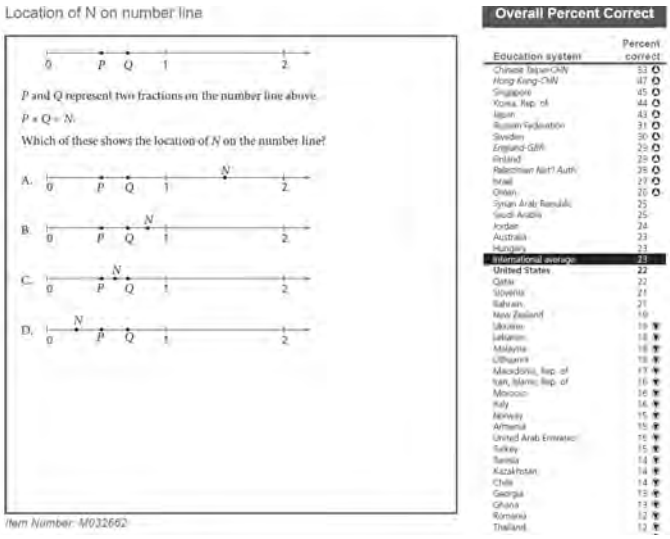
В статията се сравняват постиженията на учениците по две задачи от международното изследване TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) и техни аналози от Есенния турнир по математика и информатика **Черноризец Храбър**. Предлага се правдоподобно обяснение на резултатите по тези задачи.

Увод. През 2021 г. се планира провеждането на поредното международно измерване на ученическите постижения по математика PISA (Programme for International Student Assessment). Това ни дава повод да повдигнем някои въпроси около адекватността на международните измервания. В [3] сме изложили нашата позиция относно съвместяването на теоретичната рамка на двете измервания PISA и TIMSS с тази на българската нормативна база. Тук ще наблегнем на една технологична особеност, която, по наше мнение, е от решаващо значение за представянето на българските ученици.

Две задачи от TIMSS и техни аналози от наше състезание. Задачата на фигура 1 е от TIMSS [2]. Условието, дадено в карето, е следното:

T1. Точките P и Q представляват две дроби на числовата ос, показана най-отгоре. Коя от графиките A., B., C., D. показва положението на $N = P \times Q$ на числовата ос?

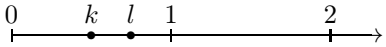
Отдясно извън карето са средните резултати в проценти на съответните държави (България не е участвала в това измерване). Например, най-високият резултат е от Китай (Тайпе) – 53%, средно за измерването е 23%, Северна Македония – 17%, Румъния – 12%. Съгласно с регламента на TIMSS не се предвижда наказание за грешен отговор и значи средният резултат е под статистическата нула (когато всички участници по случаен начин са попълвали отговорите).



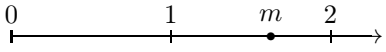
Фиг. 1. Item Number M032662 от [2]

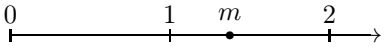
В темите за V–VI клас и VII–VIII клас на двадесет и осмото издание на турнира **Черноризец Храбър** беше включена задача, която по същество е повторение на разглежданата задача от TIMSS. В темата VII–VIII клас тази задача беше под номер 5, което от гледна точка на съставителя на темата я нареждаше сред леките задачи. Ето условието:

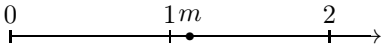
ЧХ1. На числовата ос са изобразени числата k и l.

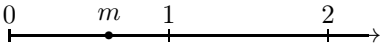


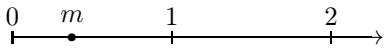
На кой чертеж е изобразено числото $m = k \cdot l$?

А) 

Б) 

В) 

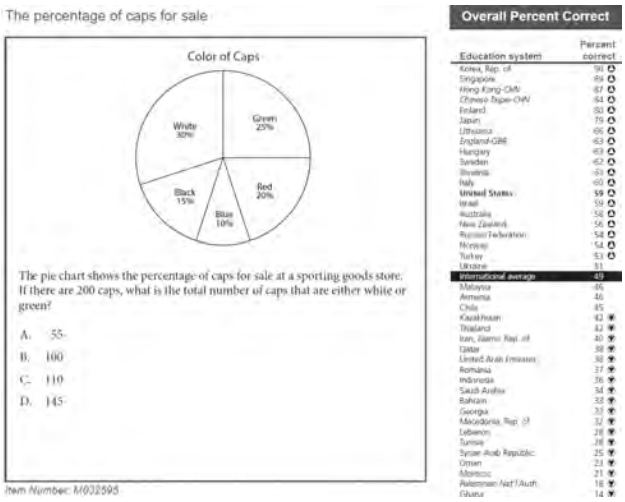
Г) 

Д) 

Правилен отговор е даден от 84% от участниците (общо 93 ученици) в тази група, които са се явили в 125. СУ – София, и от 92% от явилите се в ПЧМГ (от общо 59). Средно 87% за извадката. Да отбележим, че според регламента на турнира **Черноризец Храбър** за грешен отговор се налага сериозно наказание, като се дава възможност да се остави непопълнено поле, носещо значителни точки. Затова може да считаме, че верният отговор означава обоснован избор на вариант.

На фигура 2 е дадена още една задача от TIMSS. Условието е следното:

Т2. Кръговата диаграма показва процента шапки за продан в спортен магазин. Ако шапките са общо 200, то колко от тях са бели (White) или зелени (Green)?

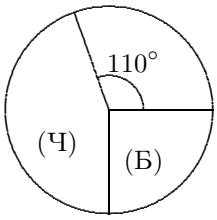


Фиг. 2. Item Number M032595 от [2]

A) 55 B) 100 C) 110 D) 145

Ето резултатите по тази задача в проценти за някои държави: Южна Корея 90%, Финландия 80%, САЩ 59%, Норвегия 54%, СРЕДНО 49%, Румъния 37%, Македония 32%.

Аналогът на **Т1** от турнира **Черноризец Храбър** в темата за VII–VIII клас е задачата



ЧХ2. Диаграмата показва процентното разпределение на продадените в магазин бели (Б), червени (Ч) и зелени спортни екипи – общо 36. Колко бели и червени екипи (общо) са продадени?

А) 20 Б) 19 В) 25 Г) 24

Д) никое от тези

Статистиката по **ЧХ2**: правилен отговор е даден от 87% от общо 152 ученици. Задачата е измежду поставените априори средни по трудност в темата (под номер 15), но резултатът я определя като по-лесна от **ЧХ1**. Макар **ЧХ2** да не е буквално повторение на **Т2** (както беше при {**Т1**,**ЧХ1**}), ясно е, че **Т2** и **ЧХ2** са задачи, проверяващи едни и същи знания и умения по съизмерим начин.

Дидактически анализ и коментар. В рамката на TIMSS за основен конструкт е приета *числовата грамотност* (numeracy) [1]. Тя е разгледана в две измерения: учебно съдържание и когнитивни процеси. Учебното съдържание включва 4 области: числа, алгебра, геометрия, данни и вероятност. Когнитивното измерение е разбито на три области: знание, приложение, разсъждение. Свързващо звено за учебното съдържание и когнитивните процеси са 6 процедури, интерпретирани в математически контекст: припомняне, разпознаване, класифициране, пресмятане, обработване, измерване. Съществено е да се отбележи, че съставителите на теста са се стремили тестовите единици да са възможно най-близки до стила на преподаване

в клас. Разгледаните задачи са със следните характеристики:
– **T1** учебно съдържание: числа (дроби); когнитивна област: разсъждение.
– **T2** учебно съдържание: числа (отношения, пропорции, проценти); когнитивна област: приложение.

На 14 учители, работещи с изявени ученици по математика, бяха зададени следните въпроси по задача **T1**:
а) Доколко тази задача се вписва в учебната програма? За кой клас?
б) Какви знания и умения се проверяват със задачата?
в) Какъв коментар ще предложите относно статистиката?

Ето в обобщен вид отговорите, които получихме:
а) Задачата се вписва в програмата за V клас; подходяща е за V клас или входно ниво в VI клас.
б) Проверяват се знания и умения за действия с дробни числа, умения за сравняване на дробни числа и за подреждане на дробни числа върху числовата ос, разпознаване на части от цяло.
в) Задачата е типична за обичаен учебник по математика. Резултатите са по-ниски от тези при **T2** (изненадващо по-ниски).

Считаме, че има сериозно разминаване по преценката на учителите и реалиите. Ето защо.
а) Резултатите по задача **ЧХ1** в групата V-VI клас: правилно са отговорили 39% (от 353 ученици). Като вземем предвид, че в турнира **Черноризец Храбър** участват изявени и високо мотивирани ученици, следва да заключим, че такава задача **не се вписва** в програмата за V клас, **нито е подходяща** за входно ниво в VI клас.
б) В задачата няма конкретни изчисления, няма части от цяло, но се изисква качествена оценка на резултат от умножаване на дроби. Така проверка на знания и умения за действия с дроби такава задача не прави.
в) Не ни е известно в учебниците за V клас да има подобна задача. Сега вече престава да е изненада, че резултатите по **T1** са ниски.

Заблуждението на колегите иде от привидната простота на условието. Всъщност, ако потърсим свързващата когнитивна процедура в списъка на TIMSS, с изненада ще открием, че нито една не върши работа поотделно. Да се очаква, че в V-VI клас учениците имат способности да съчетават (синтезират) по няколко когнитивни процедури, е неоснователно. Това вече не е така при изявените ученици в VII-VIII клас.

Задачи {**T2**,**ЧХ2**} са формулирани в стила на обичаен учебник. Те не биха били сериозен проблем за мотивирани ученици, както е видно от статистиката за **ЧХ2**. Затова ниският резултат на TIMSS за Румъния и Македония може да се изтълкува като технологична неудача на самото изследване.

Заключение. Съпоставянето на резултатите от TIMSS за Румъния и Македония с тези на наши ученици, явили се на турнира **Черноризец Храбър**, очевидно е в полза на последните. Дотолкова ли обаче нашите ученици са по-добри? По-скоро измерваните чрез TIMSS характеристики не отговарят на реалните знания и умения на учениците. Една основна причина е липсата на мотивация за добро представяне на учениците, включени в международните програми за оценяване на постиженията по математика.

Предстоящото изследване PISA остана извън обсега на тази статия. В него има съществени различия от обичайната практика на оценяването на знанията и уменията по математика на българските ученици. Това прави несъстоятелно съпоставянето на резултатите от такова изследване с някакви убедителни за нас резултати, получени в системата на българското образование. Оттук иде и непригодността на PISA да бъде измерител на качествата на националната ни образователна система.

Благодарност. Авторът благодари на рецензента на статията и на доц. Евгения Сендова за съдържателните бележки по ръкописа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Groenmo, M. Lindquist, A. Arora, I. Mullis. TIMSS 2015 Mathematics Framework. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston, 2015.

[2] `https://nces.ed.gov/timss/pdf/TIMSS2011_G8_Math.pdf` (последно посетена декември 2019 г.)

[3] Б. Лазаров. Относно преноса на математически знания и умения в контекста на международните програми за оценяване на постиженията по математика. ИМИ–БАН, София, 2019.

Борислав Лазаров
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Георги Бончев“, бл. 8
1113 София, България
e-mail: `lazarov@math.bas.bg`

ON STUDENTS' ACHIEVEMENTS ASSESSMENT IN CHERNORIZEC HRABAR TOURNAMENT AND TIMSS

Borislav Lazarov

Two pairs of similary problems from the *Chernorizec Hrabar* Math Tournament and TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) are compared. An attempt to explain the statistics of these problems is done.

Key words: multiple-choice competitions, Chernorizec Hrabar tournament, TIMSS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

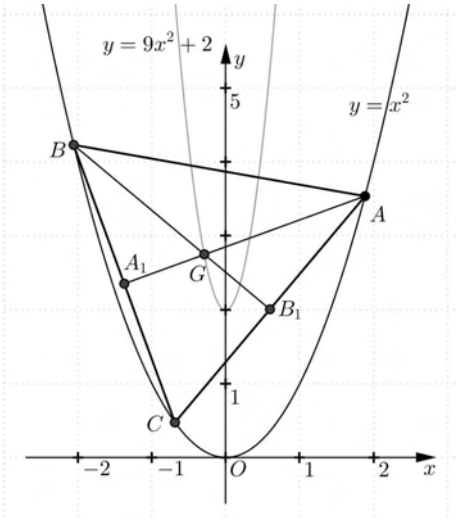
ГЕОМЕТРИЧНО МЯСТО НА МЕДИЦЕНТРОВЕТЕ НА ВПИСАНИ В ПАРАБОЛА РАВНОСТРАННИ ТРИЪГЪЛНИЦИ

Мартин Станев

Геометрично място от медицентровете на равностранните триъгълници, вписани в дадена парабола, е отново парабола.

1. Увод. Геометричното място (ГМ) на средите на хордите на парабола, успоредни на дадена права, е добре известно. По аналогия се формулира задачата за описание за ГМ за медицентровете на фамилия от триъгълници, вписани в парабола.

Задачата за намиране на ГМ на медицентровете на вписани в парабола равностранни триъгълници е оригинална (доколкото ни е известно) и не се среща в литературата.



Оказва се, че ако се разглежда фамилията от вписани в парабола равностранни триъгълници, то ГМ на техните медицентрове е отново парабола. Числени експерименти подсказват, че ако вместо медицентрове се разглеждат точки с други фиксирани барицентрични координати, то геометричното място от точки (ГМТ) е

твърде сложно множество. При това, ако се разглежда фамилия от подобни триъгълници, които не са равностранни, то ГМ на медицентровете е отново твърде сложно множество. Вероятно, такова ГМТ е парабола единствено при разглеждане на медицентровете на равностранни триъгълници, които са вписани в парабола.

Главната теорема в настоящата статия е Теорема 2.1 и в нея е описано ГМ на медицентровете на вписани в парабола равностранни триъгълници.

Теорема 2.1 се доказва със средствата на аналитичната геометрия. В декартова координатна система Oxy е достатъчно да се разгледа случаят на равностранни триъгълници, вписани в параболата $y = x^2$. Общият случай се свежда до този с помощта на подобност. Положението на трите върха на вписан триъгълник се характеризира с техните три абсциси. Координатите на медицентъра на вписан триъгълник се изразяват чрез елементарните симетрични полиноми на три променливи. След това се получава, че медицентровете описват параболата $y = 9x^2 + 2$. Някои от формулите са сравнително големи и преобразуването им без помощта на системата за компютърна алгебра Maxima щеше да е предизвикателство.

При подготовката на тази разработка е използван софтуерният продукт GeoGebra. Чертежът е подготвен с *GeoGebra* [8] и е експортиран чрез PGF/TikZ код. Основният евристичен инструмент в тази разработка е GeoGebra.

Резултати, аналогични на Теорема 2.1, съществуват за елипса, хипербола, двойка прави. В случая на елипса, резултатът е публикуван в [4] и ГМТ е отново елипса. В случая на хипербола това ГМТ е хипербола (за равнораменна хипербола се получава, че ГМТ е същата хипербола) или двойка успоредни прави (успоредни на имагинерната ос). В случая на прави ГМТ е двойка прави (или една права). Трудността на проблема за хипербола е сравнима с тази за елипса. В случая на парабола проблемът е значително по-лесен за решаване и в случая на прави решението е очевидно.

В литературата специалните разположения на конично сечение и триъгълник се проследяват в ред теореми. Така, известна е теоремата [3, 2] за елипса, допираща се до средите на страните на триъгълник — фокусите на такава елипса са нули на производната на полином от трета степен от комплексна проеменлива с нули във върховете на триъгълника. По даден триъгълник се определя елипса, в която той е вписан и допирателните във върховете са успоредни на срещуположните страни — това е елипсата на Щайнер[1] (триъгълникът е вписаният триъгълник с максимално лице) или описаната елипса е с минимално лице [5, 1, 6].

2. Главна теорема.

Теорема 2.1. *Нека в декартова координатна система Oxy са дадени параболите $\mathcal{P} : y = x^2$ и $\mathcal{P}_1 : y = 9x^2 + 2$. Ако A, B и C са три различни точки, такива, че $\{A, B, C\} \subset \mathcal{P}$ и $\triangle ABC$ е равностранен, то медицентърът на $\triangle ABC$ лежи на $\mathcal{P}_1$. Обратно, ако точка $G \in \mathcal{P}_1$, то съществуват точки A, B и C, такива, че $\{A, B, C\} \subset \mathcal{P}$, $\triangle ABC$ е равностранен и е с медицентър в точка G.*

Така, $\mathcal{P}_1$ е ГМ на медицентровете на вписаните равностранни триъгълници в $\mathcal{P}$.

Забележка 1. Съществуват равностранни триъгълници ABC, чиито върхове са три различни точки от $\mathcal{P}$.

[1] Jakob Steiner (1796–1863) швейцарски геометър (бел. ред.).

Например, директна проверка показва, че $A\left(\frac{-29\sqrt{3}}{36}, \frac{841}{432}\right)$, $B\left(\frac{49\sqrt{3}}{36}, \frac{2401}{432}\right)$, $C\left(\frac{-55\sqrt{3}}{36}, \frac{3025}{432}\right)$ са три различни точки от $\mathcal{P}$ и $\triangle ABC$ е равностранен. Медицентърът на $\triangle ABC$ е точка $G\left(\frac{-35}{36\sqrt{3}}, \frac{2089}{432}\right)$ и тя лежи на параболата $\mathcal{P}_1$.

Забележка 2. Ако A е произволна точка от $\mathcal{P}$, то съществуват точки $B \in \mathcal{P}$ и $C \in \mathcal{P}$ такива, че $\triangle ABC$ е равностранен. Точките $B \in \mathcal{P}$ и $C \in \mathcal{P}$ се построяват по следния алгоритъм:

(стъпка 1.) намира се образът $\mathcal{P}'$ на $\mathcal{P}$ при ротация на ъгъл $+60^o$ с център точка A;

(стъпка 2.) намират се пресечните точки на $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}$ — те са поне две различни точки и едната е точка A;

(стъпка 3.) избира се точка B да е различна от A и да е една от пресечните точки на $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}$;

(стъпка 4.) намира се образът C на B при ротация на ъгъл $(-60)^o$ с център точка A.

Триъгълник ABC е равностранен и върховете му са точки от $\mathcal{P}$. Твърдението от тази *Забележка* не се използва в доказателството на Теорема 2.1, но намира приложение при изготвяне на динамичен чертеж с GeoGebra.

Забележка 3. Нека x_A, x_B и x_C са реални числа. Да положим $\sigma_1 = x_A+x_B+x_C$, $\sigma_2 = x_Ax_B+x_Bx_C+x_Cx_A$, $\sigma_3 = x_Ax_Bx_C$ и $\triangle ABC$ да е с върхове $A(x_A, x_A^2)$, $B(x_B, x_B^2)$ и $C(x_C, x_C^2)$.

Лема 2.1. *Нека за реалните числа x_A, x_B и x_C да е в сила, че $x_B \neq x_C$ и точките A, B и C да са с координати $A(x_A, x_A^2)$, $B(x_B, x_B^2)$ и $C(x_C, x_C^2)$. Отсечките AB и AC имат равни дължини* $\Longleftrightarrow$

$$3x_A^3 - 3\sigma_1 x_A^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x_A - (2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1) = 0,$$

където $\sigma_1 = x_A + x_B + x_C$, $\sigma_2 = x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A$, $\sigma_3 = x_Ax_Bx_C$.

Доказателство на Лема 2.1. Равенството $|AB| = |AC|$ на дължините на отсечките AB и AC е еквивалентно на $|AB|^2 = |AC|^2$ и като се запише с координати, се получава

$$\begin{aligned}
&(x_B - x_A)^2 + (x_B^2 - x_A^2)^2 - (x_B - x_A)^2 - (x_B^2 - x_A^2)^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &(x_B - x_C)(x_B + x_C - 2x_A) + (x_B^2 - x_C^2)(x_B^2 + x_C^2 - 2x_A^2) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &(x_B + x_C - 2x_A) + (x_B + x_C)(x_B^2 + x_C^2 - 2x_A^2) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\sigma_1 - 3x_A + (\sigma_1 - x_A)(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 - 3x_A^2) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\sigma_1 - 3x_A + (\sigma_1 - x_A)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 3x_A^2(\sigma_1 - x_A) = 0.
\end{aligned}$$

□

Лема 2.2. *Ако точките $A(x_A, x_A^2)$, $B(x_B, x_B^2)$ и $C(x_C, x_C^2)$ са различни и $\triangle ABC$ е равностранен, то $\sigma_1 = x_A + x_B + x_C$, $\sigma_2 = x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A$ и $\sigma_3 = x_Ax_Bx_C$*

удовлетворяват системата

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{l}\sigma_2 = -3 - \sigma_1^2,\\ 3\sigma_3 = -7\sigma_1 - 3\sigma_1^3\end{array}\right.$$

Доказателство на Лема 2.2. Нека точките A, B и C да са различни и дължините на страните на $\triangle ABC$ да са равни. От Лема 2.1 следва и

- от $|AB|^2 = |AC|^2$ следва
$$3x_A^3 - 3\sigma_1 x_A^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x_A - (2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1) = 0;$$
- от $|AB|^2 = |BC|^2$ следва
$$3x_B^3 - 3\sigma_1 x_B^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x_B - (2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1) = 0;$$
- от $|AC|^2 = |BC|^2$ следва
$$3x_C^3 - 3\sigma_1 x_C^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x_C - (2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1) = 0.$$

Така се получава, че трите различни числа x_A, x_B и x_C са корените на уравнението

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \frac{2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3}{3}x - \frac{2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1}{3} = 0.$$

Следователно, $\sigma_2 = \dfrac{2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3}{3}$ и $\sigma_3 = \dfrac{2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1}{3}$, откъдето следва (1). □

Доказателство на Теорема 2.1. Да предположим, че $A(x_A, x_A^2)$, $B(x_B, x_B^2)$ и $C(x_C, x_C^2)$ са три различни точки, такива, че $\triangle ABC$ е равностранен. Прилага се Лема 2.2 и се получава, че е в сила (1). Пресмятат се координатите на медицентъра $G(x_G, y_G)$ на $\triangle ABC$

$$x_G = \tfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \tfrac{1}{3}\sigma_1,$$
$$y_G = \tfrac{1}{3}(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2) = \tfrac{1}{3}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^2 + 2.$$

Следователно, $y_G = 9x_G^2 + 2$, т.е. точката $G \in \mathcal{P}_1$.

Обратно, нека точка $H(x_H, y_H) \in \mathcal{P}_1$ т.е. в сила е $y_H = 9x_H^2 + 2$. Да положим $\sigma_1 = 3x_H$, $\sigma_2 = -3 - \sigma_1^2$, $\sigma_3 = \dfrac{-7\sigma_1 - 3\sigma_1^3}{3}$. Уравнението $x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0$ има три комплексни корена x_A, x_B, x_C. Изчислява се[2]

$$(-27)\sigma_3^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 = \frac{4(4\sigma_1^2 + 9)^2}{3} > 0.$$

Следователно x_A, x_B и x_C са три различни реални числа и точките $A(x_A, x_A^2)$, $B(x_B, x_B^2)$ и $C(x_C, x_C^2)$ са три различни точки от $\mathcal{P}$.

Освен това, x_A, x_B и x_C са корените на уравнението

$$3x^3 - 3\sigma_1 x^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 3)x - (2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - \sigma_1) = 0.$$

Прилага се Лема 2.1 и се получава, че отсечките AB, BC и AC имат равни дължини.

Точка $H(x_H, y_H)$ е медицентър на $\triangle ABC$, защото

$$x_H = \tfrac{1}{3}\sigma_1 = \tfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_C),$$
$$y_H = \sigma_1^2 + 2 = \tfrac{1}{3}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \tfrac{1}{3}(x_A^2 + x_B^2 + x_C^2).$$ □

[2] Изчислението е направено с Maxima [7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Frink, F. Underwood. 3565. *The American Mathematical Monthly*, **40** (1933), No 6, 372–373, www.jstor.org/stable/2301542.

[2] P. Gorkin, E. Skubak. Polynomials, Ellipses, and Matrices: Two Questions, One Answer. *The American Mathematical Monthly*, **118** (2011), No 6, 522–533. www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.118.06.522.

[3] D. Kalman. An Elementary Proof of Marden's Theorem. *The American Mathematical Monthly*, **115** (2008), No 4, 330–338, doi:10.1080/00029890.2008.11920532.

[4] M. At. Stanev. Locus of the centroid of the equilateral triangle inscribed in an ellipse. *International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM)*, **4** (2019), 54–65, http://www.journal-1.eu/.

[5] R. Woods. Some Lines and Curves Associated with the Plane Triangle. *The American Mathematical Monthly*, **35** (1928), No 8, 428–431, doi:10.2307/2299770.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Steiner_inellipse (посетена на 2019.09.03)

[7] Computer Algebra System Maxima, http://maxima.sf.net, Maxima: ver. 5.42.0, Lisp: CLISP 2.49.92, wxMaxima 18.10.1.

[8] GeoGebra, http://www.geogebra.org/, ver. 5.0.237.0-3D.

Мартин Станев
Катедра „Математика и физика“
Лесотехнически университет
бул. „Климент Охридски“ № 10
София, България
e-mail: martin_stanev@yahoo.com

LOCUS OF THE CENTROIDS OF THE EQUILATERAL TRIANGLES INSCRIBED IN A PARABOLA

Martin Stanev

The locus of the centroids of the equilateral triangle inscribed in a parabola is also a parabola. The proof features some capabilities of the computer algebra system Maxima and the dynamic geometry software *GeoGebra*.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

МОДЕЛИ НА ЗЛАТНИ ПРАВОЪГЪЛНИЦИ*

Тони Чехларова

Представени са компютърни модели на златен правоъгълник, разработени с динамичен софтуер *GeoGebra*. Те са предоставени със свободен достъп във Виртуалния училищен кабинет по математика, разработван в Института по математика и информатика при БАН `http://cabinet.bg/`. Част от тях са предназначени за организиране на изследователска работа за достигане до златен правоъгълник и формулиране на негови свойства. Други са за самопроверка и развитие на окомера. На моделите за построяване на златен правоъгълник гледаме като на инструменти, които могат да се използват и като добавена реалност.

Въведение. Златното сечение е една от трите забележителни константи в математиката – Архимедова константа (Лудолфовото число) π, Неперовото число (Ойлеровото число) e и златното сечение (Божествената пропорция) φ. От тези три константи в учебното съдържание по математика най-малко е използвана третата. Златното сечение е число, представящо отношението на две части a и b, за които е изпълнено $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$.

Дигиталните ресурси позволяват лесно да се организира изследователска работа по преоткриване на закономерности, свързани със златното сечение. Мотивираща включването на съдържание със златно сечение в училищното математическо образование е възможността за приложение на знанията в различни области, включително с използване на добавена реалност, лесното организиране на самопроверка и развитие на окомера с атрактивни обекти.

Една от златните фигури е златният правоъгълник. Правоъгълник, на който отношението на страните е златното сечение, ще наричаме *златен правоъгълник*.

Тук представяме компютърни модели на златен правоъгълник, разработени с динамичен софтуер *GeoGebra* [1].

Модели за откриване на златен правоъгълник. Страните на правоъгълника на фиг. 1 се променят чрез преместване на два от върховете му `http://cabinet.bg/content/bg/html/d15106.html`. На екрана са изведени стойностите на двете отношения, които са определящи за златния правоъгълник. При промяна на правоъгълника стремежът е двете отношения да са равни.

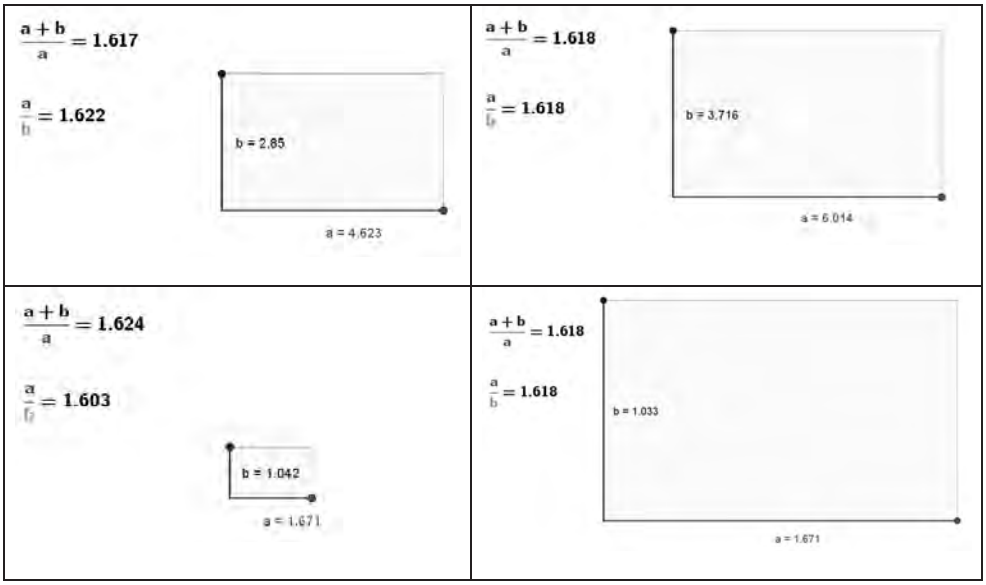
*Изследването е реализирано с подкрепата на Националната научна програма „Информационни и комуникационни технологии за единен цифров пазар в науката, образованието и сигурността (ИКТвНОС)“, финансирана от МОН.

Ключови думи: златно сечение, златен правоъгълник, компютърен модел, динамичен софтуер, изследователски подход, окомер.



Фиг. 1. Модел за откриване на златен правоъгълник

На фиг. 2 са показани няколко решения с различна точност. В последния случай е използван бутон *zoom*, за да се подобри точността.

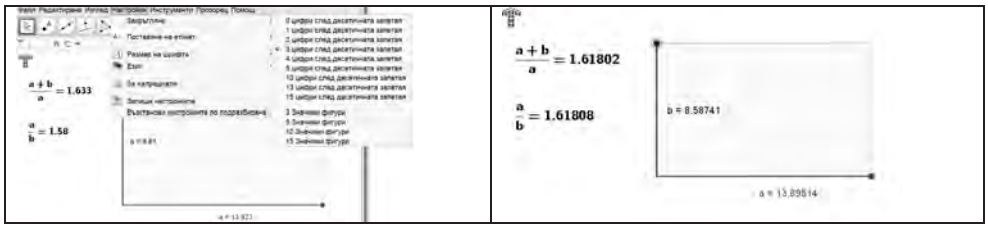


Фиг. 2. Приближения на златни правоъгълници

За увеличаване на точността може да се промени настройката на файла, например да се показват пет знака след десетичната запетая.

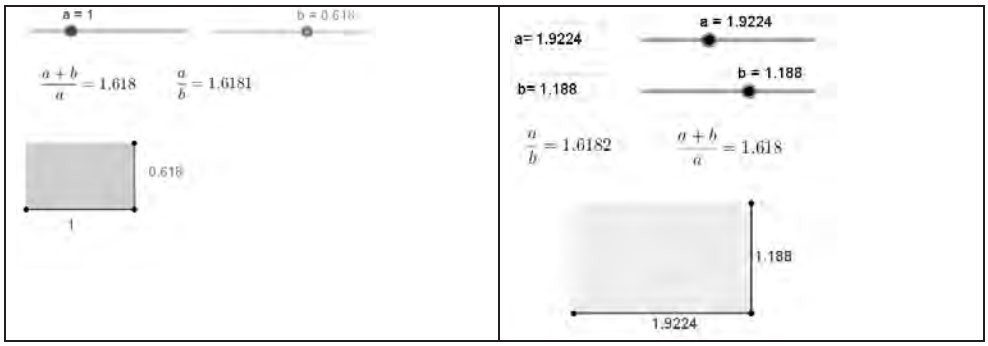
При създаване на този модел единият връх на правоъгълника е в началото на координатната система, вторият връх е точка от абсцисната ос, а третият – точка от ординатната ос.

На втория кръг на онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“ [2] бе предоставен разглежданият файл като придружаващ задачата „За страните a и b на правоъгълник е изпълнено равенството $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Намерете отношението $\frac{a}{b}$. Запишете с точност до стотните.“ Всички участници са се ориентирали и използвали адекватно файла.



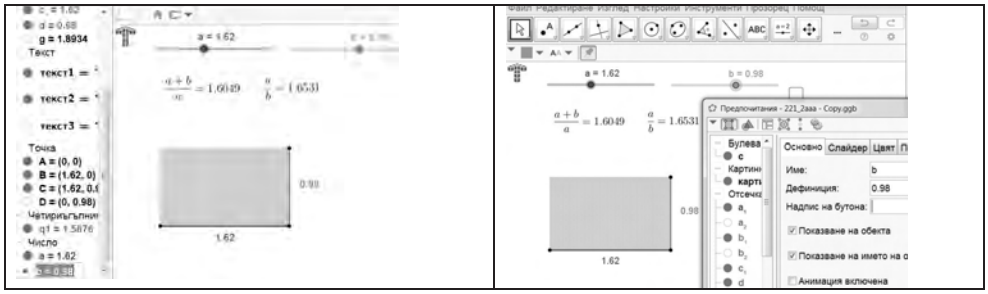
Фиг. 3. Подобряване на точността с увеличаване на знаците след десетичната запетая

Използването на параметри за двете измерения на правоъгълника дава възможност за управлението му чрез въвеждане на конкретни числа, което обикновено води до по-бързо постигане на резултат (фиг. 4).



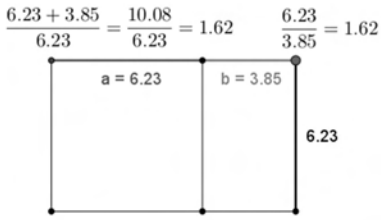
Фиг. 4. Подобряване на точността чрез въвеждане на параметър

За параметрите a и b се използват два плъзгача, като в единия файл е предоставена възможност за въвеждане и чрез „поле за въвеждане“. Разбира се, може да се използват и други варианти за промяна на стойността на параметъра, например в алгебричния прозорец или чрез настройки.



Фиг. 5. Промяна на стойността на параметъра

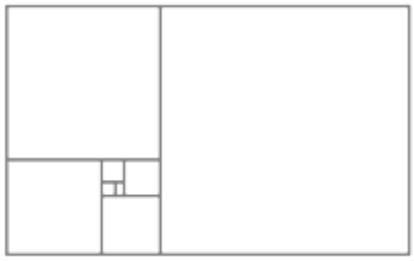
Модел за откриване на свойство на златния правоъгълник. Моделът на фиг. 6 е удобен за преоткриване на свойство, позволяващо получаването на златен правоъгълник от друг златен правоъгълник чрез отстраняването на квадрат. За няколко конкретни златни правоъгълника може да се наблюдава, че след изрязване от всеки от тях на квадрат със страна, равна на малката му страна, останалата част е отново златен правоъгълник.



Фиг. 6. Модел за откриване на свойство на златен правоъгълник

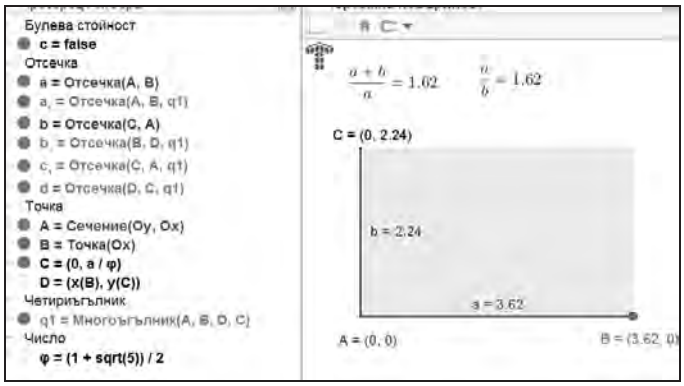
Модел на златен правоъгълник от хартия е подходящ за демонстриране на откритото свойство.

Модел за преброяване на златни правоъгълници. В модела на фиг. 7 е приложено няколкократно получаването на златен правоъгълник от златен правоъгълник чрез изрязване на квадрат. В резултат се получава редица от намаляващи златни правоъгълници. От друга страна, забелязваме, че даденият правоъгълник се покрива с нееднакви квадрати, т.е може да се разглежда като съвършен квадрируем правоъгълник [3]. Този модел е подходящ за задача за преброяване на златни правоъгълници, както и за получаване на спирала в златен правоъгълник.



Фиг. 7. Задача за преброяване на златни правоъгълници

Модели за построяване на златен правоъгълник. Ако се използва фактът, че златното сечение $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, то дължините на правоъгълника ще са в следната зависимост: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, където a е по-голямата страна на правоъгълника. Нека единият връх на правоъгълника е $A(0,0)$. Ако върхът B е точка от абсцисната ос, тогава дължината на едната страна на правоъгълника е равна на абсцисата на точката B, т.е. $a = x(B)$, а $C(0,\, x(B)/\varphi)$.

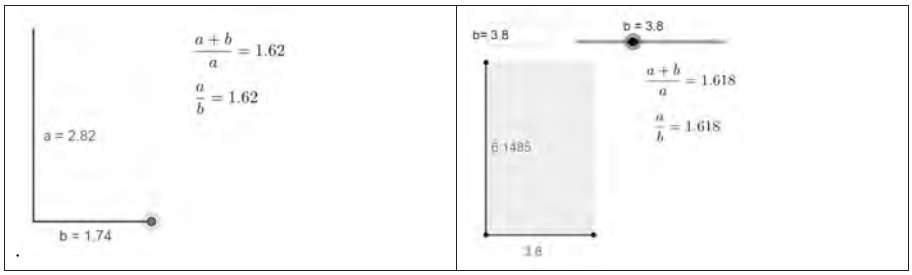


Фиг. 8. Построяване на златен правоъгълник

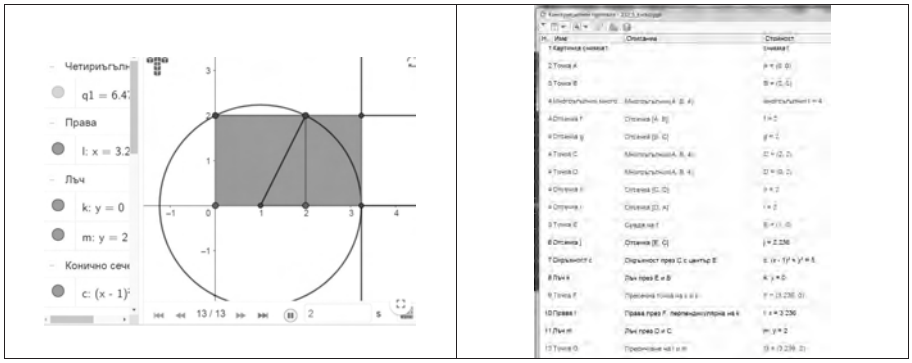
И тук, както в моделите за откриване на златно сечение, може да се използва параметър-плъзгач. В два от моделите на адрес

`http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=232`

по-дългата страна на правоъгълника е зависима от по-късата (фиг. 9).



Фиг. 9. Модел за построяване на златен правоъгълник, ако е дадена по-малката му страна



Фиг. 10. Построяване на златен правоъгълник по идея от „Елементи“ на Евклид

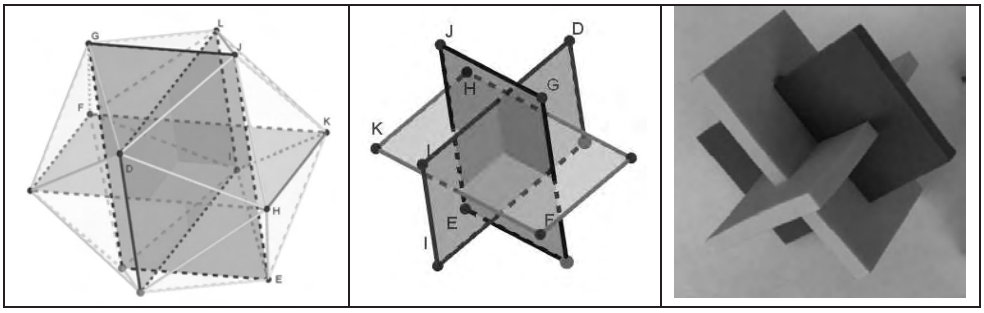
В следващия модел е използван алгоритъмът за построяване на златно сечение по книга II на „Елементи“ на Евклид [4]
http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=221.

Могат да се наблюдават стъпките, включително и конструкционният протокол.

Златни правоъгълници чрез икосаедър. Лесно е построяването на златен правоъгълник при наличие на икосаедър. Файлът на адрес

http://cabinet.bg/content/bg/html/d15145.html

може да се използва и за изследване. Последната снимка на фиг. 11 е на пъзел от три златни правоъгълника, с които се създава модел на икосаедър, т.е. за решаване на обратната задача.



Фиг. 11. Златни правоъгълници в икосаедъра

Може да се използва и додекаедърът за построяване на златен правоъгълник. Двете тела – икосаедър и додекаедър са дуални. Ако при икосаедъра използваме негови върхове за построяване на златен павоъгълнк, то при додекаедъра ще използваме центрове на негови стени.

Развитие на окомера със златен правоъгълник. В темата „Окомер със златен правоъгълник“

(http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=255)

файловете са за развитие на окомера чрез задачи за получаване на златен правоъгълник. Някои от примерите са със самостоятелно създаване на следващ пример, а други – с генериране по случаен начин.

Във Виртуалния училищен кабинет по математика (http://cabinet.bg/) има модели за визуализация на безкрайността на процеса на генериране на златни правоъгълници от златен правоъгълник, както и модел за използване на златен правоъгълник и на спирала в златен правоъгълник за изследване на художествени произведения [5].

Заключение. В училище „Златен правоъгълник“ може да се разглежда като самостоятелна тема. Отделни елементи са походящи за включване в час по математика или по информационни технологии: в 6. клас – при изучаване на пропорции; в 7. клас – при построителни задачи; в 8. клас – при реални числа и решаване на системи, в 10. клас – стереометрия. Златният правоъгълник е една от златните фигури и представените тук модели са включени в съдържанието на квалификационен курс за учители по темата [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Hohenwarter, M. Hohenwarter, Z. Lavicza. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, **28**, *2* (2009), 135–146.

[2] П. Кендеров, Т. Чехларова. Състезание Математика с компютър и изследователски подход в образованието по математика. София, Макрос, 2016, 128 с.

[3] М. Гарднер. Математически развлечения. т.1. София, Наука и изкуство, 1977.

[4] O. Byrne. The First Six Books of the Elements of Euclid. TASCHEN GembH, 2017.

[5] E. Sendova, T. Chehlarova. Studying fine-art compositions by means of dynamic geometry constructions. Scientia iuvenis, Book of Scientific Papers, Scientific guarantee: prof. RNDr. Ľubomír Zelenický, CSc. Slovak Republic, Constantine the Philosopher University in Nitra, 2013, 495–502.

[6] Т. Чехларова. Сборник от работни листове „Златни фигури“. София, Макрос, 2020.

Тони Чехларова
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България
e-mail: toni.chehlarova@gmail.com

MODELS OF GOLDEN RECTANGLES

Toni Chehlarova

Golden Rectangular computer models developed with dynamic GeoGebra software are presented. They are freely accessible at the Virtual Mathematics Laboratory, developed at the Institute of Mathematics and Informatics at BAS (http://cabinet.bg/). Some of them are designed to organize research to reach a gold rectangle and formulate its properties. Others are for self-examination and the development of eyeball estimation skills. We look at golden rectangle models as tools that can also be used as augmented reality.

Key words: golden section, golden rectangle, computer model, dynamic software, research approach, estimation by sight

ОБРАЗОВАТЕЛЕН ПРОЕКТ

AN EDUCATIONAL PROJECT

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

ПРОГРАМА „ОБРАЗОВАНИЕ С НАУКА“*

Анна Самева, Тодор Брънзов

В доклада се представя програмата „Образование с наука“, изпълнението на която е възложено на Българската академия на науките от Министерството на образованието и науката. Институтът по математика и информатика е координатор на програмата от страна на БАН. Програмата си поставя за цел да подобри информираността и достъпа на учениците, учителите и работещите в сферата на образованието, до институтите, лабораториите и музеите на БАН. Представят се накратко проектите, разработвани по програмата, като специално внимание се обръща на проектите в направление „Математика и информатика“.

За програмата. През 2019 г. Министерството на образованието и науката възложи на Българската академия на науките (Договор за изпълнение на образователни дейности „Образование с наука“, възложени на БАН от МОН със Споразумение № Д01-100 от 27.05.2019 г. и Решение на УС на БАН, Протокол № 10, точка 5.6 от 18.07.2019 г.) осъществяването на мащабна образователна инициатива, имаща за цел разработването и прилагането на образователни ресурси и дейности за ученици и учители. Програмата получи названието „Образование с наука“ и изпълнението ѝ стартира заедно с началото на новата учебна година 2019/2020. Официалното откриване на програмата се състоя на 11 септември 2019 г. в Етнографския музей на БАН и на него присъстваха председателят на Българската академия на науките акад. Юлиан Ревалски и министърът на образованието и науката Красимир Вълчев.

Задачите по проекта бяха разделени на три стълба:

- STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) общности на знанието;
- Образование в музея;
- Летни школи.

Беше обявен конкурс за проекти по линията на два от стълбовете: STEM и летни школи, за които бяха предвидени 340 000 лева от отпуснатите 500 000 лева за цялата програма. Постъпиха 39 проекта от 20 института и лаборатории на БАН на обща сума над 1 000 000 лева, които бяха оценени от комисия. Бяха класирани 21 проекта, за които беше сключен договор между БАН и 13 института. Съгласно договора, ИМИ е базова организация, а останалите 12 института са изпълнители. Шест от класираните проекти, както и организацията и оперативния контрол на обща сума 115 000 лева, бяха възложени на ИМИ.

* **Ключови думи:** образование, изследователски подход, обучение с правене



Министър Вълчев и акад. Ревалски откриват програмата в Етнографския музей

Програмата „Образование с наука“ си поставя за цел да подобри информираността и достъпа на учениците, учителите и работещите в сферата на образованието до институтите, лабораториите и музеите на БАН. Въвеждането на иновативни практики и методи в обучението е от първостепенна важност и ще предостави възможност на българските учени, работещи в Академията, да споделят своя опит и да предизвикат у учениците интерес към науката и изследователската работа. Предвидените дейности по програмата имат за цел да ангажират интереса на ученици в прогимназиалния и гимназиалния етап на образованието. Организират се посещения в институтите, лабораториите и музеите на БАН, а по време на ваканциите учениците участват в тематично организирани школи.



Доц. Абаджиева от Института по биология и имунология на размножаването демонстрира новаторски образователни практики пред министър Вълчев, акад. Ревалски и чл.-кор. Николов

За изпълнение се класираха проекти на учени от Института за български език, Института за етнология и фолклористика с Етнографски музей, Института за изследване на атмосферата, климата и водите, Института за космически изследвания, Института по биология и имунология на размножаването, Института по експериментална морфология, патология и антропология с музей, Института за литерату-

ра, Института по катализ, Института по математика и информатика, Института по механика и биомеханика, Института по роботика, Лабораторията по телематика, Националния археологически институт с музей, Националния институт по геофизика, геодезия и география, Националния природонаучен музей и Националната лаборатория по компютърна вирусология.

Екипи от учени на Института по математика и информатика спечелиха осем проекта за финансиране по програмата. ИМИ е институтът, реализиращ най-много проекти – „Изследователски подход в STEAM образованието“ с ръководител проф. д-р Тони Чехларова (изпълнява се съвместно с Лабораторията по телематика), „Национална система за състезателна информатика в България“ с ръководител Емил Келеведжиев, „Съвременни методи и тематики в олимпиадите по математика“ с ръководител проф. дмн Петър Бойваленков, „Ученически институт по математика и информатика“ с ръководител проф. дмн Емил Колев, “Юбилеен научен панаир *150 години Българска академия на науките*“ с ръководител доц. д-р Христо Костадинов и „GoBIOLOGY“, изпълняван съвместно с Института по биология и имунология на размножаването Акад. „Кирил Братанов“.

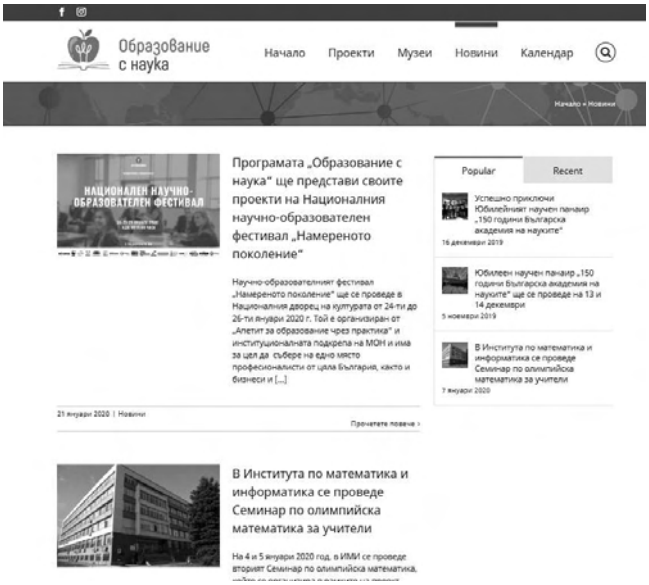
Програмата „Образование с наука“ предлага на училищата образователни ресурси, музейни уроци по различни теми, ателиета и работилници, прожекции на документални филми, летни изследователски школи във всички области на човешкото познание. Цел на програмата през първата година на нейното изпълнение е да достигне до 5000 ученици на възраст 5.–12. клас и техните учители.

С помощта на разнообразни и атрактивни дейности (дискусии, игри, изработка на проект), децата ще затвърждават трайно не само наученото в музея, лабораторията или института, но и голяма част от преподадения в училище материал.

Като специална задача по Програмата бе създаден информационен уеб портал образованиеснаука.бг, който служи като входна точка (каталог) към образователните инициативи, развити в рамките на програмата „Образование с наука“. Този портал е „лицето“ на програмата и има за своя основна цел да информира публиката за развитието и изпълнението на дейностите по самата програма, за образователните инициативи в нея и да дава достъп до тях. Всяка инициатива (проект, събитие) е подробно описана и представена като съдържание, целева група и тематична област. Порталът има адаптивен дизайн, подходящ за разглеждане върху широк набор от устройства, вкл. смартфони, таблети, монитори, смарт телевизори.

Одобрени проекти. Най-много – девет – са одобрените проекти в област „Природни науки“. Това са:

- GoBIOLOGY
- Академия „Моят зелен град“
- Въвеждане на иновации в образователната школа по биология и имунология
- Запознаване на ученическата и младежка аудитория с изследователските подходи във физиката; по специално в астрономията, космическата физика и космическите технологии
- Иновативна лаборатория за изучаване на природни бедствия и екологични катастрофи от Космоса –Е#КОСЛАБ
- Климатична кутия (Учени, учители и ученици заедно за климата, атмосферата и водите)



Изглед от уеб страницата образованиеснаука.бг

- Физиката е забавна
- Химичният експеримент – метод, средство и условие за формирането на природонаучната грамотност
- Холографски запис на реален 3D обект с изследователски подход в образованието

В сферата на инженерните науки се работи по два проекта:

- Академия Механика
- Робо-Академия 2

В област „Математика и информатика“ се изпълняват 5 проекта:

- Изследователски подход в STEAM образованието
- Национална система за състезателна информатика в България
- Повишаване на компетенциите по компютърна и информационна сигурност за ученици и учители (от 9. до 12. клас)
- Съвременни методи и тематики в олимпиадите по математика
- Ученически институт по математика и информатика

В област „Хуманитарни и обществени науки“ за изпълнение бяха одобрени два проекта:

- Написаното остава. Пиши правилно!
- Образование в литературния музей

Два са общонаучните проекти:

- Ученически институт на БАН с малки учебно-изследователски общности
- Юбилеен научен панаир „150 години Българска академия на науките“

Четири музея на БАН разработиха образователни ресурси и осъществяват дейности по програма „Образование с наука“:

- Национален антропологичен музей

- Национален археологически музей
- Национален етнографски музей
- Национален природонаучен музей

Заедно с тях в програмата участва и Националната астрономическа обсерватория Рожен.





В музеите на БАН учениците и техните учители не просто наблюдават, а активно участват в работата на учените и изследват света наоколо



Учените в Националния природонаучен музей с радост отговарят на безбройните въпроси на децата

Тук ще обърнем малко повече внимание на проектите, изпълнявани от учени и екипи от учени от Института по математика и информатика. Това са:

„Изследователски подход в STEAM образованието“, ръководител – проф. д-р Тони Чехларова (изпълнява се съвместно с Лабораторията по телематика). Целта на проекта е разширяване на условията за внедряване на изследователския подход в STEAM образованието чрез разработване на ресурси и работа с учители, ученици и родители.

Виртуалният училищен кабинет по математика е ефективен инструментариум за разпространяването на изследователския подход в образованието по математика. Ресурсите в него са средство за развитие на дигиталната компетентност в съчетаване с математическата. Могат да се използват за подготовка и самоподготовка и

за успешно представяне на международното проучване PISA. Към момента той съдържа над 1600 аплета и 80 теми, които позволяват редица математически понятия и резултати да се усвоят чрез експериментиране със съответните виртуални математически обекти, да се решават приложни задачи чрез компютърни модели, да се използват математически знания за създаване и изследване на художествени произведения, да се използват математически инструменти при изучаване на понятия от други предметни области.

В рамките на този проект ще бъдат разработени още аплети, теми и видеоматериали. Семинарите с учители и курсовете с ученици са насочени към внедряване на изследователския подход в STEM образованието. На участниците се създават условия за преживяване на елементи от изследователския процес, за творческа работа. Използват се интерактивни методи на обучение. Ще се проведат и уебинари, които ще бъдат записани и публикувани като образователен ресурс.

„Национална система за състезателна информатика в България“, ръководител – Емил Келеведжиев. В основата на проекта стои създаването на софтуерна система с уеб достъп към архив от задачи, давани на състезания по информатика от национален и международен ранг през последните 10 и повече години. Системата ще бъде „жив“ архив – всеки желаещ след предварителна регистрация ще може да изпраща свое решение към всяка избрана от него задача и да получава веднага обратна връзка за своя резултат.

Един от основните компоненти в подготовката на състезателите по информатика е решаването на задачи, вече давани на реални състезания. За тази цел Комисията за националната олимпиада поддържа от 1998 г. уебсайта Инфос (`http://www.math.bas.bg/infos/`), на който са дадени условията на задачите, давани на националните кръгове във вид на текст в pdf файлове. Тази „система“ не дава никаква възможност за обратна връзка и наблюдение на развитието на състезателите, за идентификация и анализ на потенциала на нови участници, което я прави сериозно остаряла спрямо съществуващите съвременни системи. Основен компонент в тях е възможността за онлайн решаване на задачите, проверка в реално време на подаваните решения и изграждане на статистика за резултатите на всеки участник. Такива системи постепенно бяха изградени и с тях разполагат на практика всички държави, които бележат сериозни успехи през последните години. Липсата на подобна система у нас ще започне да се отразява на представянето на нашите състезатели на международните състезания.

Този проект има за цел създаването на такава система за Република България. С нейна помощ ще могат да бъдат запазени успехите, отбелязани през годините (5. място във вечната класация), и ще бъдат идентифицирани още по-успешно изявените таланти в областта на информатиката в страната. Създателите на системата вярват, че тя ще увеличи участието в националните състезания, тъй като ще предостави качествена възможност за самоподготовка на участници, които нямат възможност за достъп до преподаватели, школи или други способи. Тя ще помогне на преподавателите в процеса на подготовката на талантливите ученици, тъй като ще им позволи да ги поставят в условия, максимално близки до тези в реално състезание.

Като институция с наложили се традиции в подготовката и провеждането на състезания от национален и международен мащаб, Институтът по математика и информатика е най-подходящото място за създаването и поддържането на система-

та. Това е важно и за продължаването и дори утвърждаването на традиционната роля на института в подготовката на състезателите – роля, която винаги е била повод за особена гордост.

Софтуерната система и свързаните с внедряването ѝ действия се изпълняват от екип, включващ представители на националната комисия, бивши състезатели, софтуерни инженери и учени. Системата е с отворен достъп за всички, които се занимават с подготовка на състезатели и/или самите те са състезатели.

„Съвременни методи и тематики в олимпиадите по математика“, ръководител – проф. дмн Петър Бойваленков. Целта на проекта е да се обогати със съвременни методи и теми системата за извънкласни и извънучилищни занимания по математика на високо ниво, като по този начин се разширят и подобрят извънкласните и извънучилищни дейности по математика. Важна част от проекта е работата с учители за подготовка на курсове на високо ниво.

На 4 и 5 януари 2020 г. в ИМИ се проведе вторият Семинар по олимпийска математика. В семинара взеха участие учители от Враца, Пазарджик, Плевен и София. Учени от ИМИ изнесоха лекции „Как да изградим курс по ...“ и бяха обсъдени програми за извънкласна работа на високо ниво по четирите олимпийски тематики – алгебра, комбинаторика, теория на числата и геометрия.

В първия ден на семинара, член-кореспондент Николай Николов от ИМИ изнесе лекция на тема „Метод на безкрайното спускане в теория на числата“ , а д-р Стоян Боев от Нов български университет представи темата за ролята на построителните задачи в олимпийската подготовка по геометрия. На 5 януари участниците в семинара бяха запознати с тенденциите в трудните задачи по комбинаторика в Балканската и Международната олимпиади по математика от доц. д-р Станислав Харизанов (ИИКТ/ИМИ–БАН). Темата „Приложения на линейната алгебра в комбинаториката“ представи проф. дмн Петър Бойваленков (ИМИ–БАН).

Във всеки от двата семинарни дни преподавателите разработваха и примерни теми за извънкласна работа по алгебра и геометрия.

Семинарът се проведе паралелно със Седмицата на олимпийската математика в ИМИ (СОМ), която Институтът организира и провежда за шеста поредна година. Бе проведена дискусия и с учениците, участници в Седмицата на олимпийската математика в ИМИ, и с учителите относно съставянето на книгата „Олимпийски теми 2020“. По предложение на проф. Бойваленков и доц. Харизанов в книгата ще бъдат включени и разработки на учители (досега са включвани само на ученици).

Инициативата СОМ се провежда ежегодно от 2015 г. в началото на януари в ИМИ-БАН. Участието е само по покана, като се канят 40 ученици от цялата страна. Програмата включва четири тематични контролни (стил и трудност – МОМ), по едно във всяка от основните олимпийски области – алгебра, геометрия, комбинаторика и теория на числата.

По време на СОМ бяха събрани материали (лекции) на модерни тематики, които ще бъдат публикувани след рецензиране и редактиране в поредицата „Олимпийски теми“. Покана за подготовка на работи за сборника ще получат всички учители – участници в семинара, студентите, изнесли лекции на СОМ, и учениците, представили се най-добре на сесията с ученически доклади в рамките на СОМ.

„Ученически институт по математика и информатика“, ръководител – проф. дмн Емил Колев. Ученическият институт по математика и информатика



Проф. Бойваленков пред участниците в шестата Седмица на олимпийската математика в ИМИ

(УчИМИ) е създаден през септември 2000 г. Учредители на УчИМИ са: Съюзът на математиците в България (СМБ), Фондацията „ЕВРИКА“, Международната Фондация „Св. Св. Кирил и Методий“ и Институтът по математика и информатика (ИМИ) на БАН. Целта на Ученическия институт е да привлече и мотивира учениците за самостоятелна научно-изследователска работа, да предложи възможности за изява на техните способности и талант, да създаде условия за професионалното им развитие и израстване като висококвалифицирани специалисти в различни области на математиката, информатиката и информационните технологии.

Целева група на настоящия проект са учители и студенти с интерес към STEM дейности. Основен очакван резултат е привличане и мотивиране на учители и студенти за научно-изследователска работа с ученици. Това създава възможности за изява на техните способности и условия за професионалното им развитие и израстване като висококвалифицирани специалисти.

„Юбилеен научен панаир „150 години Българска академия на науките““, ръководител – доц. д-р Христо Костадинов. Панаирът се проведе на 14 и 15 декември 2019 г. в София. Събитието бе насочено към широко участие на ученици от различни населени места и видове училища. Участниците кандидатстваха за участие в Панаира с авторски проекти в областта на природните науки. Журирането се проведе посредством серия от индивидуални събеседвания на членовете на журито с участниците. В журито участваха както учени от БАН, така и учени и експерти от други организации, които имат опит в работата с ученици. Авторите на най-добрите проекти бяха наградени с грамота за отлично представяне.

В събитието взеха участие много изравнени по качество и перспектива проекти. Журито на конкурса бе в състав доц. д-р Димитър Младенов, доц. д-р Христо Костадинов, Георги Шарков, доц. д-р Десислава Абаджиева, доц. д-р Юлиан Цанков, и д-р Жеко Найчов. Наградите бяха връчени на лауреатите от инж. Таня Михайлова, заместник-министър на образованието и науката.

Юбилейният научен панаир определи българските участници в International Science and Engineering Fair 2020 (ISEF), който ще се проведе в Анахайм, САЩ, през май 2020 година, а също така и българските участници в Expo Sciences Luxembourg. Наградният фонд на конкурса е ориентиран към участието в събития, които да дадат ранен кариерен стимул на лауреатите и ще бъдат връчени в партньорство с различни организации, имащи традиции в работата с талантливи ученици. Допъл-



Заместник-министърът на образованието и науката инж. Таня Михайлова награждава един от тримата лауреати в Научния панаир

нителни финансови и материални награди бяха осигурени от Института по математика и информатика–БАН, Министерството на образованието и науката, Society for Science and the Public, Музей за история на София и Клуб Млади таланти, като партньор на конкурса.

„GoBIOLOGY“, изпълняван съвместно с Института по биология и имунология на размножаването Акад. „Кирил Братанов“ (ИБИР). Ръководители – доц. д-р Десислава Абаджиева (ИБИР), ас. д-р Тодор Брънзов (ИМИ). Основна цел на проекта е да бъде предоставена достъпна алтернатива на онези училища, ученици и учители, които не разполагат със специализирани кабинети и изпитват трудност да демонстрират връзката между теоретично и експериментално.

По проекта се създават обучителни продукти – видеозаписи на лекции, текстови материали, презентации и графики, както и широк набор продукти за проверка на знанията – тестове, адаптиращи се към нивото на обучаемия, експериментални постановки и др. Създадените продукти ще бъдат обединени в тематичен курс, като приоритет ще бъде даден на теми, при които би бил максимален ефектът от демонстрация с лабораторен експеримент. Те ще бъдат съобразени с изучаваното в настоящия курс на обучение в 6.–10. клас и ще бъдат разпространени чрез онлайн платформата VIVA Cognita.

Продуктите ще бъдат достъпни свободно и безплатно, като ще бъдат фокусирани върху описване и демонстриране на концепции и явления в биологията, които могат да бъдат репродуцирани и изследвани с достъпните инструменти в училищната лаборатория или дори с подръчни материали.

Основната целева група са учениците от 6. до 10. клас, като всички материали ще могат да бъдат използвани и в преподавателската дейност на учителите. Ще бъдат организирани две посещения на лабораториите в ИБИР, по време на които желаещите ученици ще имат възможност да проследят на живо експерименти, чието провеждане са наблюдавали в онлайн платформата.

Участие на програмата „Образование с наука“ на научни и образователни фестивали. Важна част от работата по програмата е увеличаване на информираността за разработваните по нея ресурси и предлаганите дейности и достъпът до тях. През последните години в България все по-голям интерес привличат атрактивно организираните и провеждани научно-образователни фестивали, панаири и други подобни събития, чиято цел е да привлекат вниманието на обществото и на бизнеса върху все по-широките възможности за образование, които се предлагат на пазара. Многобройни държавни, частни, неправителствени и доброволчески организации разработват ресурси и предоставят среда за осъществяването на разнообразни образователни техники, модели и системи. До момента Програмата „Образование с наука“ взе участие в няколко такива инициативи.

На 14 ноември 2019 г. на специално организирана среща в Международното висше бизнес училище в София бе представена програмата пред представители на Българската асоциация на частните училища (БАЧУ). В дискусията взеха участие зам.-министър Карина Ангелиева, акад. Веселин Дренски, Мария Каменова, председател на БАЧУ, Константин Делчев, Албена Василена и Анна Самева от ИМИ, колеги от музеите на БАН, участващи в програмата. Беше представен сайтът на програмата и неговите функционалности.

На 13 и 14 декември 2019 г. се проведе Юбилеен научен панаир „150 години Българска академия на науките“, който се изпълнява по програма „Образование с наука“. Пред залата на панаира бяха разположени щандове, представящи дейности по програмата. На тях колеги от институти и музеи на Българската академия на науките демонстрираха дейностите по своите проекти пред участниците в панаира, както и пред жителите и гостите на столицата. Участие в панаира взеха колеги от Института по катализ, Института за български език, Института за литература, Института за изследване на атмосферата, климата и водите, Националния антропологичен музей, Националния археологически музей и от Института по математика и информатика.





Щандове, представящи дейности по програмата

Научно-образователният фестивал „Намереното поколение“ се проведе в Националния дворец на културата от 24 до 26 януари 2020 г. Той бе организиран от „Апетит за образование чрез практика“ с институционалната подкрепа на МОН и имаше за цел да събере на едно място професионалисти от цяла България, бизнес организации и такива, които работят съвместно за популяризирането на иновациите в образованието.

Като образователна програма с доказани резултати и голям потенциал „Образование с наука“ получи покана за участие във фестивала. В него самостоятелно бяха представени и някои от проектите, разработени по програмата. Официални гости на фестивала бяха Мария Габриел, еврокомисар по иновации, научни изследвания, култура, образование и младеж и инж. Таня Михайлова, заместник-министър на образованието и науката.



Щанд на програма „Образование с наука“ в НДК



Колеги от Института за български език представят проекта, с който участват в програма „Образование с наука“

Програмата „Образование с наука“ е естествено продължение на над 50-годишната традиция екипи от учени в БАН да създават или въвеждат в България иновативни образователни продукти, инструменти и методи. Институтът по математика и информатика е един от лидерите в тези дейности в Академията, а популярността на програмата дава възможност за трансфер на натрупаното ноу-хау към други институти и лаборатории на БАН. Изказаната предварителна готовност от страна на партньорите – МОН и БАН, за продължаване на програмата и през следващите години ще позволи насочването на ресурс за подобряване на образованието, което е определено като една от най-приоритетните дейности за българското общество в множество стратегически документи на всички власти.

Анна Самева
e-mail: sameva@math.bas.bg
Тодор Брънзов
e-mail: tbranzov@math.bas.bg
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Георги Бончев“, бл. 8
1113 София, България

THE “EDUCATION WITH SCIENCE” PROGRAM

Anna Sameva, Todor Branzov

The paper presents the Education with Science programme, the implementation of which was entrusted to the Bulgarian Academy of Sciences by the Ministry of Education and Science. The Institute of Mathematics and Informatics is the coordinator of the programme. The aim of the programme is to improve the awareness and access of the students, teachers and workers in the field of education, to the institutes, laboratories and museums of BAS. The projects developed under the program are briefly presented, with special attention paid to the projects in the fields of Mathematics and Informatics.

КВАЛИФИКАЦИОННИ КУРСОВЕ ЗА УЧИТЕЛИ

PROFESSIONAL DEVELOPMENT COURSES FOR TEACHERS

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

СЪЗДАВАНЕ И ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЕЛЕКТРОННИ РЕСУРСИ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Стефка Караколева

Курсът има за цел квалификация на учители в областта на „облачните“ технологии в образованието. Обучението в курса протича на два етапа:

- Запознаване на учителите с основите на издателската система LaTeX и изграждане на умения за самостоятелно създаване на електронни документи, съдържащи текст, формули, графики и програмен код, предназначени за публикуване на хартия, електронен носител и в Интернет.
- Усвояване на „облачни“ образователни технологии за създаване и публикуване на електронни документи, анкети, тестове, презентации и др. чрез Google приложения.

Завършилите курса ще имат знания и практически умения за създаване на pdf електронни материали, съдържащи текст, формули и графики; ще умеят сами да подготвят своите материали за публикуване онлайн, да ги споделят и съхраняват чрез „облачни технологии“, да провеждат онлайн анкети и онлайн изпитване.

Програмата на курса включва обучение за работа с TeX, Google Docs, Google Disc, Google Forms, Google Slides, Google Classroom и др. При обучението се използват само свободнодостъпни програми и ресурси.

Описание на преподавателския състав. Обучението се осъществява от д-р Стефка Караколева, преподавател в Русенски университет „Ангел Кънчев“, катедра „Приложна математика и статистика“. Преподавателят има дългогодишен опит в обучението на студенти по дисциплините „Текстообработка с LaTeX“ и „Математически софтуер“, както и на студенти-магистри, бъдещи учители по математика, по методика на обучението по математика. Осигурени са учебни материали (вкл. на български език), които са достъпни онлайн.

Материална осигуреност на курса и брой на лицата, включени в учебната група. Обучението се осъществява в зала с Интернет, като на всеки курсист се осигурява работно място без компютър. Всеки курсист трябва да си осигури преносим компютър с ОС Windows, където преди започване на занятията ще бъдат инсталирани необходимите програми. Осигурена е и мултимедия. Целесъобразен брой на лицата в учебната група е до 20 включително.

Изисквания към курсистите. Начална компютърна грамотност, Интернет, Google Apps (препоръчително).

Административни характеристики. Курсът се организира от Факултета за продължаващо обучение на Русенски университет „Ангел Кънчев“ и е с продължителност 16 часа: 8 часа присъствено, 8 часа дистанционно, 1 кредит.

Кандидат-курсистите трябва да попълнят онлайн форма за предварителна регистрация на адрес `https://goo.gl/forms/TW5Vwyaw9mQAdjOj2`. Повече информация за курса ще намерите в описанието във формата за регистрация.

Стефка Караколева
Русенски университет „Ангел Кънчев“
Катедра „Приложна математика и статистика“
ул. „Студентска“ 8
7017 Русе, България
e-mail: skarakoleva@uni-ruse.bg

CREATING AND USING OF DIGITAL RESOURCES IN MATHEMATICAL TRAINING

Stefka Karakoleva

The course introduces the technology of creating and using online interactive tests that validate the knowledge of the students. Tests are created using LaTeX and Google Apps cloud technologies. The online tests are available on any mobile device (smartphone, tablet, computer). The use of cloud technology allows remote testing with quality and fast online verification by an expert.
Key words: online test, mathematics, cloud technology, education.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

АНАЛИЗ НА ДАННИ И ГРАФИЧНОТО ИМ ПРЕДСТАВЯНЕ ЧРЕЗ КОМПЮТЪР

Марусия Славчова-Божкова, Деница Григорова, Емил Каменов

Настоящето издание на квалификационния курс „Анализ на данни и графичното им представяне чрез компютър“ е трето, мотивирано от успеха и интереса към първото [4] и второто [5] от една страна, и от друга, поради Наредба № 12 от 1 септември 2016 г. за статута и професионалното развитие на учителите, директорите и другите педагогически специалисти. Курсът се състои от две части. Първата част (която е присъствена) се води от квалифицирани преподаватели в областта на вероятности и статистика от Факултета по математика и информатика (ФМИ) на СУ „Св. Климент Охридски“, а втората част (която е самостоятелна) има за цел да предостави възможност на курсистите да приложат и покажат придобитите знания под формата на подготовка на проекти.

Статистическата компетентност е особено актуална в днешно време в различни сфери на човешката практика, започвайки от най-високите управленски нива, във връзка с взимане на решение и стигайки до следене и предоставяне на ежедневна информация за валутни и борсови индекси, прогнози за времето, прогнозиране на тенденции на развитие, изследване на фактори, определящи поведението на разнообразни по своя характер системи, мониторинг на разпространението на грипа и други заразни и епидемични заболявания, наблюдение с цел контролни действия на замърсяването на въздуха и още много други дейности, свързани с качеството на живот от една страна и с широка обществена значимост от друга. Статистиката е задължителна част от грамотността на населението във връзка с развитие на критичното мислене и възможността за информиран избор [1–3].

Предвиждат се следните ключови теми, върху които да се приложат съответните статистически процедури, като ще бъдат коментирани и интерпретирани резултатите и изводите от тях. Курсът включва по-голямата част от следния материал (част от него ще остане за самостоятелна работа):

1. Комбинаторни съединения – пермутации, вариации и комбинации (със и без повторение). (2 ч.)

2. Експеримент, елементарни изходи (събития), случайни събития. Класическа и геометрична вероятност. Съвместимост и независимост на събития. (2 ч.)

3. Графично представяне на събития чрез диаграма на Вен. Примери. (1 ч.)



Моменти от процеса на обучението по време на 46-та пролетна конференция

4. Генериране на случайни числа от дискретни и непрекъснати разпределения (равномерно, биномно и нормално разпределение). (3 ч.)

5. Графично представяне на данни (едномерни и двумерни) чрез правоъгълни и кръгови диаграми и хистограми. Извличане на информация от различните видове графики. (3 ч.)

6. Линейна регресия. (1 ч.)

За компютърната реализация на предложените теми ще се използва програмата *Microsoft Excel 2010*. На участниците в курса по време на Четиридесет и деветата пролетна конференция на Съюза на математиците в България ще се проведе присъствено обучение в рамките на 2 дни с продължителност по 4 академични часа, в което ще се покрият част от посочените по-горе теми. Целта на този квалификационен курс е учителите да могат да генерират самостоятелно данни от конкретни

дискретни и непрекъснати разпределения, да сортират данни, да съчетават класическите методи на преподаване на елементи от вероятности и статистика с дигитални средства, да представят графично данни от реални изследвания или симулации и обратно, да извличат информация от графично представени данни. След което (с цел достигане на необходимия брой часове) ще се формулират проекти за самостоятелна подготовка, което по предварителна преценка на лекторите ще предполага не по-малко от още 8 часа за самостоятелна подготовка и предаване на проекти.

Удостоверението, съгласно изискванията на Наредбата за статута и професионалното развитие на учителите, директорите и другите педагогически специалисти, ще бъде издавано на всички самостоятелно подготвили и предали зададения проект.

За курсистите няма предварителни изисквания за входно ниво.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пл. Матеев, М. Славчова-Божкова, Сн. Матакиева. Обучението по комбинаторика и статистика. Реалност и перспективи. *Математика и математическо образование*, **41** (2012), 118–119.

[2] К. Банков, Пл. Матеев, М. Славчова-Божкова. Обучението по стохастика. *Математика и математическо образование*, **42** (2013), 145–146.

[3] М. Славчова-Божкова. Образованието по статистика/стохастика – задължителна част от културата на Европа. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 102–108.

[4] М. Славчова-Божкова, Д. Григорова, Е. Каменов. Квалификационен курс за учители „Анализ на данни и графичното им представяне чрез компютър“. *Математика и математическо образование*, **45** (2016), 299–302.

[5] М. Славчова-Божкова, Д. Григорова, Е. Каменов. Квалификационен курс за учители „Анализ на данни и графичното им представяне чрез компютър“. *Математика и математическо образование*, **46** (2017), 343–345.

Марусия Славчова-Божкова
e-mail: bojkova@fmi.uni-sofia.bg
Деница Григорова
e-mail: dgrigorova@fmi.uni-sofia.bg
Емил Каменов
e-mail: kamenov@fmi.uni-sofia.bg
Факултет по математика и информатика
Софийски университет „Св. Кл. Охридски“
бул. „Дж. Баучер“ № 5
1164 София, България

DATA ANALYSIS AND GRAPHICS USING SOFTWARE

Maroussia Slavtchova-Bojkova, Denitsa Grigorova, Emil Kamenov

This course is addressed especially to the professional development of teachers in the field of probability and statistics. The course content is related to the new school syllabus in mathematics and more precisely to the part related to the probability theory and statistics. Our efforts are motivated by the deep conviction that statistical reasoning is a compulsory skill for making an informed choice. We present statistical methods using real data and computer software (*Microsoft Excel 2010*) to introduce the most popular graphical methods for depicting data and emphasizing on the interpretation of the results of the most common statistical methods used in data analysis.

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2020
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2020
Proceedings of the Forty-ninth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2020

КВАЛИФИКАЦИОНЕН КУРС ЗА УЧИТЕЛИ „ИЗУЧАВАНЕ НА СТЕРЕОМЕТРИЯ С ДИНАМИЧНИ КОНСТРУКЦИИ“*

Тони Чехларова

Описано е съдържанието и методиката на квалификационния курс „Изучаване на стереометрия с динамични конструкции“. Представени са примери от образователни ресурси за изучаването на геометрични тела: компютърни модели на геометрични тела, техни развивки и сечения; манипулативи. Обсъдени са оптимизационни задачи с тримерни обекти, както и задачи за развитие на окомера. Те са предоставени със свободен достъп във Виртуалния училищен кабинет по математика, разработван в Института по математика и информатика при БАН.

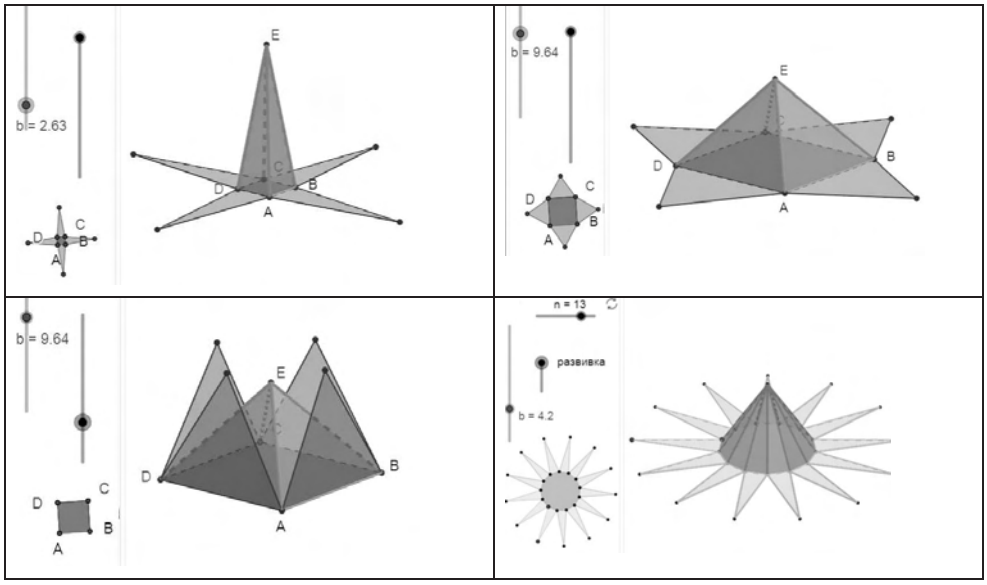
Развитието на специализираните софтуерни среди, подходящи за математическото образование, разшириха значително възможностите за разработване на ресурси за обучението по стереометрия. Познаването на такива ресурси ще подпомогне учителите при онагледяване на изучаваните стереометрични обекти и техните свойства, както и при съставяне и поставяне на задачи. В курса ще бъдат използвани учебни среди от Виртуалния училищен кабинет по математика [1], както и ресурси, разработени по проект DALEST [2]. Те са със свободен достъп и участниците ще имат възможност да работят с представяните примери. Ще бъде представена методика на използване на конкретни ресурси.

За формиране на понятие за пирамида са построени динамични модели, на които могат да се променят основите и височината. Развивка на съответната пирамида може да се наблюдава като равнинна фигура, както и да се проследява получаването на съответното тяло от развивката. На фиг. 1 са представени няколко файла с модели на правилни пирамиди, изработени с динамичния софтуер *GeoGebra* [3], а на фиг. 2 – с модели на неправилни пирамиди.

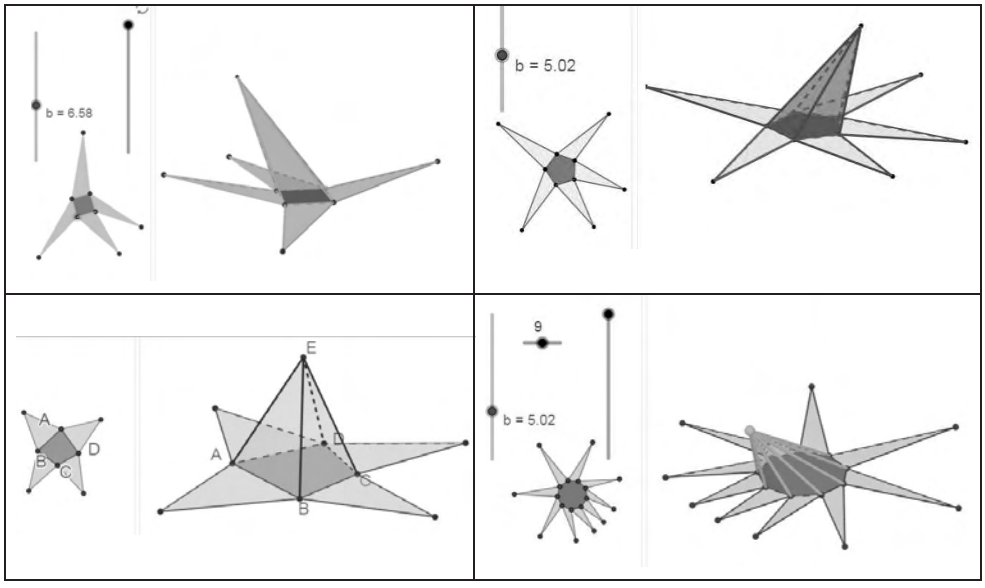
Разгледани са частни случаи на неправилни пирамиди, например такива, на които основата е правилен многоъгълник.

За решаване на оптимизационни задачи с геометрични тела може да се използва равнинен компютърен модел, както и тримерен компютърен модел. Такива задачи са давани на онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“ [4], [5], [6] и предоставяните придружаващи файлове, както и описанията на решаване на задачите с тях, могат да бъдат използвани за подготовка за аналогични състезания.

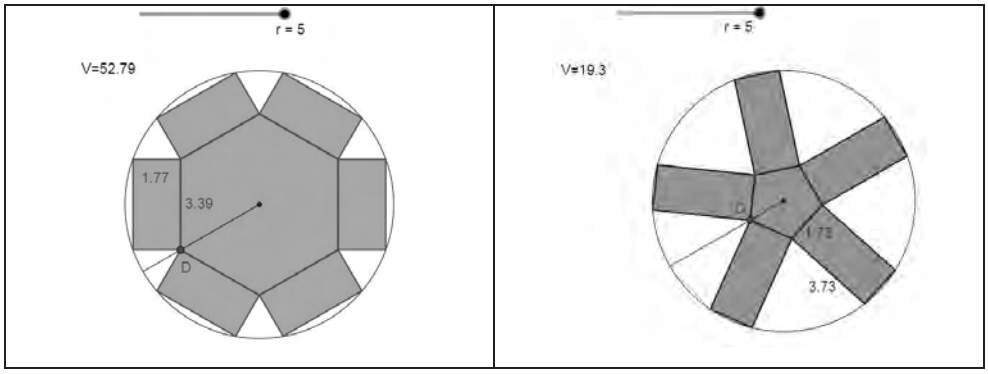
*__Ключови думи:__ Компютърен модел, дигитална компетентност, пространствена интелигентност, стереометрия, окомер.



Фиг. 1. Развивки на правилна пирамида
http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=248

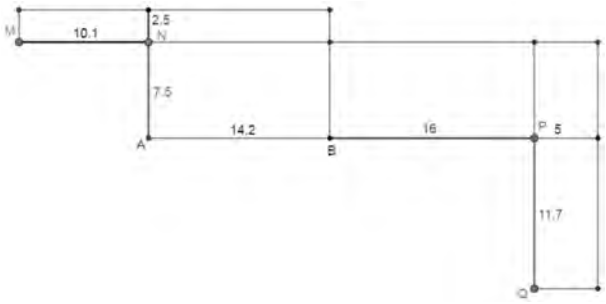


Фиг. 2. Развивки на неправилна пирамида
http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=249



Фиг. 3. Оптимизационни задачи
http://cabinet.bg/content/bg/html/d16155.html
http://cabinet.bg/content/bg/html/d16165.html

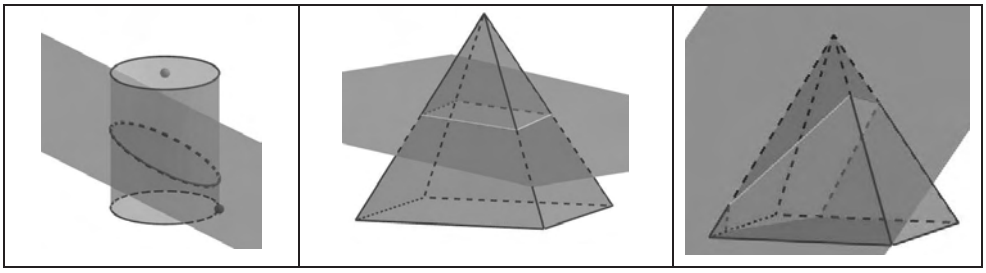
В някои от задачите в това състезание динамичните файлове са придружаващи, а в други – неотменна част от условието на задачата. Например, за решаване на задачата „Преместете червените точки в динамичната конструкция така, че да се получи развивка на правоъгълен паралелепипед“, при действие с файла учениците се ориентират за подвижните и неподвижните точки, т.е. файлът е част от задачата.



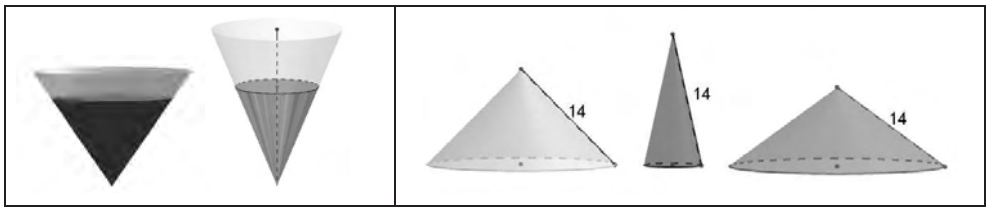
Фиг. 4. Пъзели с развивки на тела
http://cabinet.bg/content/bg/html/d16100.html

За онагледяване на сечение на тяло с равнина отделни учители са инициирали изработването на модели, най-често от метал. Така има натрупани малък брой модели в част от българските училища. Специализираният софтуер силно разширява възможността за онагледяване и изследване на сеченията на геометрични тела с равнина (фиг. 5).

За развитие на интуицията и на умения за оценка на количество е полезно решаването на задачи за развитие на окомера. На фиг. 6 са представени изображения на конуси, за които се иска оценка на част от цяло (например да се оцени каква част от конуса е запълнена с течност, или да се сравни спрямо половината от обема) и сравняване по един показател при фиксиран друг елемент (например да се оцени



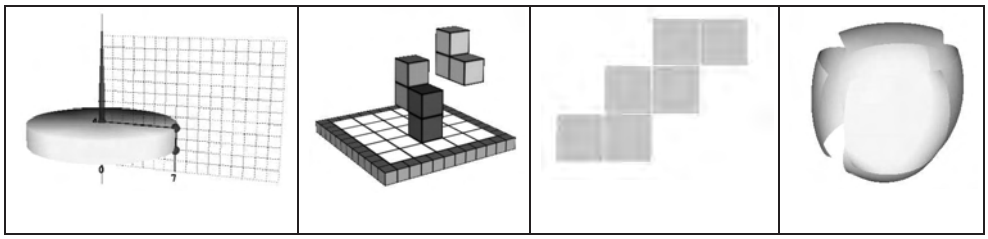
Фиг. 5. Сечения на тяло с равнина



Фиг. 6. Задачи за развитие на окомера

кой от трите конуса с равни образуващи има най-голям обем) [7].

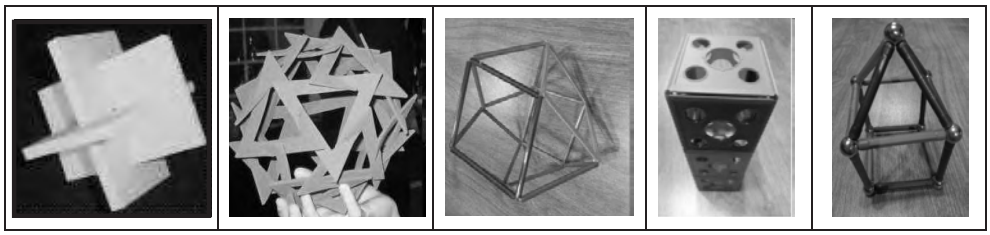
Подходящи за използване в средния курс са ресурсите, разработени по проект DALEST. На фиг. 7 са представени модели, получени с програмите Math Wheel, Cubix Editor, Origami Nets, Stuffed Toys на пакет Elica [8], [9].



Фиг. 7. Пакет Elica

Акцент в квалификационния курс ще бъде поставен и върху съчетано използване на компютърни модели и манипулативи. На фиг. 8 са показани някои манипулативи, използвани в Академичната класна стая на Института по математика и информатика при БАН.

Познаването на виртуални ресурси разширява възможността за осигуряване на разбирането и организирането на изследователска работа при изучаване на стереометрия. Съществено е съчетаването на компютърни модели с манипулативи. Важно е да се осигурява индивидуална подкрепа на всеки ученик, както и да не се допуска задържане на ниско равнище на абстрактност. Защото важна цел на обучението по



Фиг. 8. Манипулативи за изработване на геометрични тела

стереометрия е развитие на пространственото въображение.

Част от ресурсите са разработени по програма „Образование с наука“ на МОН и БАН.

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Chehlarova, G. Gachev, P. Kenderov, E. Sendova. A Virtual School Mathematics Laboratory. In: V National Conference on e-Learning, 2014, Ruse, Academic Press “University of Ruse”, 146–151.

[2] C. Christou, E. Sendova, J. F. Matos, K. Jones, T. Zachariades, D. Pitta-Pantazi, N. Mousoulides, M. Pittalis, P. Boytchev, M. Mesquita, T. Chehlarova, C. Lozanov. Stereometry Activities with Dalest, Nicosia, University of Cyprus, 2007.

[3] J. Hohenwarter, M. Hohenwarter, Z. Lavicza. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: the Case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, **28**, *2* (2009), 135–146.

[4] П. Кендеров, Т. Чехларова. Състезание „Математика с компютър и изследователски подход в образованието по математика“. София, Макрос, 2016, 128 с.

[5] P. Kenderov, T. Chehlarova. Extending The Class Of Mathematical Problems Solvable in School. *Serdica J. Computing* **9**, *3–4* (2015), 191–206.

[6] P. Kenderov. Powering Knowledge Versus Pouring Facts. In: Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. (eds G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, B. Xu) ICME-13 Monographs, Cham, Springer, 2018, 289–306.

[7] Т. Чехларова. Подготовка на обучители за внедряване на изследователския подход в училищното образование по математика. Пловдив, Макрос 2000, 2017.

[8] T. Chehlarova, E. Sendova. Explorations with rotational solids. 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education 22–26 April 2009, Plovdiv, 259–268, ISBN 978-9963-9277-9-1.

[9] E. Sendova, T. Chehlarova, P. Boytchev. Words are silver, mouse-clicks are gold? (or how to optimize the level of language formalization of young students in a Logo-based cubics world). *Informatics in education, Vilnius*, **6**, *2* (2007), 411–428.

Тони Чехларова
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България
e-mail: toni.chehlarova@gmail.com

STUDYING STEREOMETRY WITH DYNAMIC CONSTRUCTIONS

Toni Chehlarova

The content and methodology of the “Studying Stereometry with Dynamic Constructions” professional development course for teachers are described. Examples of educational resources for the study of geometric solids are presented: computer models of geometric solids, their nets and sections; manipulatives. Optimization problems with three-dimensional objects are discussed, as well as problems for the development of eyeball estimation skills. They are freely accessible at the Virtual Mathematics Laboratory, developed at the Institute of Mathematics and Informatics of BAS.

СЪДЪРЖАНИЕ

ПРЕДГОВОР 5

IN MEMORIAM

Петър Кендеров, Андрей Андреев. Академик Благовест Сендов (1932 – 2020) 9

Христо Сендов. Поглед върху най-добрите резултати на Благовест Сендов и Христо Сендов 22

Иван Тонов. В памет на Чавдар Лозанов (1946 – 2020) 26

ЮБИЛЕИ

Евгения Сендова, Албена Василева, Емил Колев. Не „изтичане“, а „спечелване“ на мозъци: 20 години Ученически институт по математика и информатика 31

Цонка Байчева, Петър Бойваленков, Илия Буюклиев. 75 години от рождението на акад. Стефан Додунеков 48

Гено Николов. 75 години от рождението на Борислав Боянов 58

Николай К. Витанов. Академици и член-кореспонденти на БАН в областта на математическите науки с юбилей през 2019 г.: академик Станимир Трояновски, член-кореспондент Иван Димовски и член-кореспондент Емил Хорозов 63

Иван Ланджев. Индийският математик Раманудджан 75

ДОКЛАДИ ПО ПОКАНА

Силвия Бумова, Веселин Дренски, Боян Костадинов. Една диофантова транспортна задача от 2016 година и нейното възможно решение през 1903 година 89

Стоян Михов. Математически методи в автоматичното разпознаване на реч 114

Емил Келеведжиев, Тодор Брънзов, Петър Петров, Марин Шаламанов. Българска платформа за състезателна информатика 123

СЕКЦИЯ А: МАТЕМАТИЧЕСКИ СТРУКТУРИ
СЕКЦИЯ Б: МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ И ИНФОРМАТИКА

Чавдар Дангалчев. Използване на ентропия на категорийни данни за клъстъризация 133

Олег Илиев. „Горещо“ обновяване на версията при системи за управление на учебното съдържание и системи за управление на обучението 137

Олег Илиев, Радослав Йошинов, Георги Цочев. Верификация на идентичността на потребителя и сигурността на данните в контекста на LMS и LCMS 144

Орлин Кузов. Многокомпонентен информатизационен модел за успешна трансформация на образователния процес 152

Детелин Лучев, Лилия Павлова, Максим Гойнов. Към персонализирано разглеждане на съдържанието във виртуален музей за древна история 159

Мария Пашинска, Илия Буюклиев. Използване на OpenMP в някои комбинаторни алгоритми 167

Стела Железова. Разширяване на частично решение от d спреда до паралелизъм 173

СЕКЦИЯ В: ОБРАЗОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Александър Ганчев. Преподаване на теория на категориите на бакалаври 181

Десислава Георгиева. Диагностичен инструментариум за определяне на равнището на формираните умения у обучаваните по темата „Обикновени дроби“ 190

Владимир Заблоцкий, Светлана Василева. Геодезични задачи в обучението по програмиране 198

Гергана Карабелъова, Филип Петров. Хардуерна лаборатория и музей в класната стая 207

Стефка Караколева. Обучението по текстообработка с LaTeX за специалност финансова математика в Русенски университет „Ангел Кънчев“ 213

Петър Кендеров, Тони Чехларова. Използване на помощните файлове в онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“ 220

Борислав Лазаров. Относно оценката на постиженията на учениците в турнира „Черноризец Храбър“ и в TIMSS 229

Мартин Станев. Геометрично място на медицентровете на вписани в парабола равностранни триъгълници 234

Тони Чехларова. Модели на златни правоъгълници 239

ОБРАЗОВАТЕЛЕН ПРОЕКТ

Анна Самева, Тодор Брънзов. Програма „Образование с наука“ 249

КВАЛИФИКАЦИОННИ КУРСОВЕ ЗА УЧИТЕЛИ

Стефка Караколева. Създаване и използване на електронни ресурси в обучението по математика 263

Марусия Славчова-Божкова, Деница Григорова, Емил Каменов. Анализ на данни и графичното им представяне чрез компютър 265

Тони Чехларова. Квалификационен курс за учители „Изучаване на стереометрия с динамични конструкции“ 269

CONTENTS

PREFACE 5

IN MEMORIAM

Petar Kenderov, Andrey Andreev. Academician Blagovest Sendov (1932 – 2020) 9

Hristo Sendov. A glance at the best results of Blagovest Sendov and Hristo Sendov 22

Ivan Tonov. Chavdar Lozanov (1946 – 2020) 26

ANNIVERSARIES

Evgenia Sendova, Albena Vassileva, Emil Kolev. It is not about "brain drain", it is about "brain gain" – 20 years High School Institute of Mathematics and Informatics 31

T. Baicheva, P. Boivalenkov, I. Bouyukliev. Stefan Dodunekov's 75th birthday 48

Geno Nikolov. 75 years from the birth of Borislav Bojanov 58

Nikolay K. Vitanov. Academicians and corresponding members of the Bulgarian Academy of Sciences having jubilee in 2019: Academician Stanimir Troyanski, Corresponding Member Ivan Dimovski and Corresponding Member Emil Horozov 63

Ivan Landjev. The Indian mathematician Ramanujan 75

INVITED TALKS

Silvia Boumova, Vesselin Drensky, Boyan Kostadinov. A Diophantine transport problem from 2016 and its possible solution from 1903 89

Stoyan Mihov. Mathematical methods in automatic speech recognition 114

Emil Kelevedjiev, Todor Branzov, Petar Petrov, Marin Shalamanov. Bulgarian platform for competitions in informatics 123

SECTION A: MATHEMATICAL STRUCTURES
SECTION B: MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

Chavdar Dangalchev. Using entropy of categorical data for clustering 133

Oleg Iliev. "Hot releases" in learning management systems and learning content management systems 137

Oleg Iliev, Radoslav Yoshinov, Georgi Tsochev. Verification of user identity and data security in the context of LMS and LCMS 144

Orlin Kouzov. Multi-component informatization model for the successful transformation of the educational process 152

Detelin Luchev, Lilia Pavlova, Maxim Goynov. Towards personalized content observation in an ancient history virtual museum 159

Maria Pashinska, Iliya Bouykliev. About OpenMP and some combinatorial algorithms 167

Stela Zhelezova. On the extension of a partial solution of d spreads to a parallelism 173

SECTION C: EDUCATION IN MATHEMATICS AND INFORMATICS

Alexander Ganchev. Teaching category theory to undergraduates 181

Desislava Georgieva. Diagnostic assessment tools for determining the level of learners' fraction skills 190

Vladimir Zablotskii, Svetlana Vasileva. Geodetic tasks in programming training courses 198

Gergana Karabelyova, Philip Petrov. IT lab and museum in the classroom ... 207

Stefka R. Karakoleva. LaTeX typesetting training in financial mathematics at "Angel Kanchev" University of Ruse 213

Petar Kenderov, Toni Chehlarova. The use of auxiliary files in the online competition "VIVA Mathematics with a Computer" 220

Borislav Lazarov. On students' achievements assessment in Chernorizec Hrabar Tournament and TIMSS 229

Martin Stanev. Locus of the centroids of the equilateral triangles inscribed in a parabola 234

Toni Chehlarova. Models of golden rectangles 239

AN EDUCATIONAL PROJECT

Anna Sameva, Todor Branzov. The "Education with science" program 249

PROFESSIONAL DEVELOPMENT COURSES FOR TEACHERS

Stefka Karakoleva. Creating and using of digital resources in mathematical training 263

Maroussia Slavtchova-Bojkova, Denitsa Grigorova, Emil Kamenov. Data analysis and graphics using software 265

Toni Chehlarova. Studying stereometry with dynamic constructions 269

Формат: 1000 × 700/16	Печатни коли 17,5
Дадена за печат на 26.03.2020 г.	Подписана за печат на 26.03.2020 г.
Тираж 200	**ISSN 1313-3330**